

Theoretische Physik III: Elektrodynamik

A.Komnik, Institut für Theoretische Physik, Universität Heidelberg

Inhaltsverzeichnis

1	Differential- und Integralrechnung für Felder	3
1.1	Was ist ein Feld?	3
1.2	Differenzialrechnung für Felder	3
1.2.1	Erste Ableitungen	3
1.2.2	Zweite Ableitungen	4
1.3	Integralrechnung für Vektorfelder	4
1.3.1	Wegintegral über $\nabla\psi$	4
1.3.2	Gaußscher Integralsatz	5
1.3.3	Der Satz von Stokes	7
2	Elektro- und Magnetostatik	8
2.1	Fundamentale Gleichungen der Elektrostatik	8
2.1.1	Coulombsches Gesetz	8
2.1.2	Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik	8
2.1.3	Poisson- und Laplace-Gleichungen	9
2.1.4	Elektrostatische potentielle Energie	10
2.2	Elementare elektrostatische Probleme	11
2.2.1	Dipol, Quadrupol etc.	11
2.3	Randwertprobleme der Elektrostatik	15
2.3.1	Methode der Bildladungen	15
2.3.2	Trennung der Variablen	15
2.3.3	Methode der Greenschen Funktion	21
2.4	Elektrostatik in dichten Medien	24
2.4.1	Leiter	24
2.4.2	Dielektrika	24
2.5	Magnetostatik	28
2.5.1	Das Biot–Savartsche Gesetz	28
2.5.2	Differentialgleichungen der Magnetostatik. Vektorpotential.	30
2.5.3	Lokalisierte Stromverteilung, Magnetisches Moment.	32
2.5.4	Magnetostatik in dichten Medien. Grenzbedingungen.	36
2.5.5	Randwertprobleme der Magnetostatik	38
3	Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik	40
3.1	Faradaysches Induktionsgesetz	40
3.2	Energie des magnetischen Feldes	41
3.3	Maxwellscher Verschiebungsstrom. Maxwellsche Gleichungen	42
3.4	Elektromagnetische Potentiale	43
3.4.1	Vektor- und Skalarpotentiale	43
3.4.2	Eichtransformationen. Eichinvarianz	44
3.5	Energie- und Impulserhaltungssätze der Elektrodynamik	46
3.5.1	Theorem von Poynting	46
3.5.2	Der Impulserhaltungssatz	47

4	Elektromagnetische Wellen	49
4.1	Ebene Wellen	49
4.1.1	Homogene Wellengleichung und ihre Lösungen	49
4.1.2	Polarisation ebener Wellen	53
4.1.3	Wellenpakete	54
4.2	Kugelwellen	55
4.3	Greensfunktion der Wellengleichung I	55
4.4	Strahlung einer lokalisierten oszillierenden Quelle	57
4.4.1	Allgemeine Betrachtungen	57
4.4.2	Felder und Strahlung eines elektrischen Dipols	58
4.5	Greensfunktion der Wellengleichung II	61
4.5.1	Elemente der Funktionentheorie. Residuensatz.	61
4.5.2	Greensfunktion der Wellengleichung via Residuensatz	66
5	Kovariante Formulierung der Elektrodynamik	67
5.1	Spezielle Relativitätstheorie	67
5.1.1	Einsteins Relativitätsprinzip	67
5.1.2	Abstand und Eigenzeit	67
5.1.3	Lorentz-Transformation	68
5.1.4	Vierervektoren und Vierertensoren	70
5.1.5	Differential- und Integralrechnung in 4D	72
5.2	Relativistische Mechanik	73
5.2.1	Prinzip der kleinsten Wirkung	73
5.2.2	Energie und Impuls	74
5.3	Elementarteilchen in elektromagnetischen Feldern	75
5.3.1	Viererpotential des elektromagnetischen Feldes	75
5.3.2	Bewegungsgleichungen	76
5.3.3	Der elektromagnetische Feldstärketensor	77
5.4	Gleichungen für elektromagnetische Felder	78
5.4.1	Lorentz-Transformation des Feldstärketensors	78
5.4.2	Kovariante Maxwell-Gleichungen I	79
5.4.3	Wirkung für das elektromagnetische Feld	80
5.4.4	Kovariante Maxwell-Gleichungen II	81
5.4.5	Energie-Impuls-Tensor	82

Literaturhinweise

Einführend:

- Feynman Vorlesungen über Physik, Bd.2, Elektromagnetismus und Struktur der Materie, Oldenbourg 2001

Begleitend:

- J.D.Jackson, Klassische Elektrodynamik, Gruyter, 2006
- L.D.Landau and E.M.Lifshitz, Lehrbuch der theoretischen Physik,Bd.2, Klassische Feldtheorie, Harry Deutsch Verlag, 1997

Ergänzend:

- L.D.Landau and E.M.Lifshitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd.8, Elektrodynamik der Kontinua, Harry Deutsch Verlag, 1991

1 Differential- und Integralrechnung für Felder

1.1 Was ist ein Feld?

- Wechselwirkung durch den unmittelbaren Kontakt – ein Ball wird getreten – er fliegt weg
- Kontaktlose Wechselwirkung – ein Magnet lenkt eine Kompassnadel aus auch wenn diese sich weit weg von ihm befindet \Rightarrow der Magnet erzeugt am Ort der Nadel irgendetwas, was die Nadel beeinflusst – ein Magnetfeld

Definition 1 *Ein Feld ist eine Funktion der Koordinaten im 3D Raum. Es kann skalar [z.B. Temperaturverteilung $T(\mathbf{r})$ oder Gravitationspotential $\Pi(\mathbf{r})$] oder vektorwertig [z. B. die Geschwindigkeitsverteilung einer Flüssigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ oder das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$] sein.*

- Skalarfeld - einfach
- Vektorfeld - man benutze, dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{Skalar}$ für zwei Vektoren, z. B.

$$\begin{aligned} \text{Wärmefluss} &= \frac{\text{Wärme pro Zeiteinheit}}{\text{Fläche normal zur Wärmeausbreitungsrichtung}} \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (1)$$

\mathbf{n} – Vektor, eine Normale zur Fläche, über die der Wärmefluss ermittelt wird, \Rightarrow \mathbf{w} – Vektorfeld

- Tensorfelder? (später, s. Kapitel 5)

1.2 Differenzialrechnung für Felder

1.2.1 Erste Ableitungen

Vermutung: Aus der skalaren Temperaturverteilung $T(\mathbf{r})$ bekommt man ein Vektorfeld

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

Wie zeigt man das? Man betrachte die Temperaturdifferenz ΔT zwischen \mathbf{r} und $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ für kleine $\Delta \mathbf{r}$,

$$\Delta T = T(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - T(\mathbf{r}) = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z = \nabla T \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (2)$$

mit

$$\nabla T(\mathbf{r}) = \text{grad } T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (3)$$

$\Delta \mathbf{r}$ – Vektor, $\Rightarrow \nabla T$ – Vektorfeld. Das gilt unabhängig von T , deswegen abstrahiert man sich von T und definiert einen Differentialoperator

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (4)$$

mit Vektoreigenschaften (was die Transformationen im Raum angeht).

Der (Vektor)operator ∇ ist mit T auch in der Form $T \nabla = \text{Vektoroperator}$ kombinierbar. Man beachte dabei, dass sich der Vektoroperator (Gradient) $T \nabla$ fundamental von ∇T unterscheidet,

$$\nabla T \neq T \nabla$$

∇T zeigt in die Richtung der größten Temperaturzunahme.

Andere Kombinationen:

- Divergenz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{Skalar} \quad (5)$$

- Rotation

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{Vektor} \quad (6)$$

Beispiel: Fouriersches Gesetz der Wärmeleitung . Wärmeleistung (Energie pro Zeiteinheit) für eine Wand der Dicke d mit den Temperaturen $T_{2,1}$ zweier gegenüberliegenden Flächen mit Flächeninhalt A :

$$J = \kappa(T_2 - T_1) \frac{A}{d}.$$

Differentialform:

$$\Delta J = \kappa \Delta T \frac{\Delta A}{\Delta d}.$$

Mit der Grenzwertbildung $\Delta T / \Delta d \rightarrow \nabla T$, $\Delta J / \Delta A \rightarrow \mathbf{w}$ folgt:

$$\mathbf{w} = -\kappa \nabla T. \quad (7)$$

1.2.2 Zweite Ableitungen

Mögliche Kombinationen

- (a) $\nabla \times (\nabla T) = 0 = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} T)$. Das ist formal ähnlich zu $\mathbf{B} \times (\mathbf{B}T) = 0$. Beweis durch explizites Nachrechnen.

Theorem 1 Wenn $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, dann existiert ein Skalarfeld ψ , so dass $\mathbf{A} = \nabla \psi$.

Gibt es andere Möglichkeiten Null zu bekommen? Aus $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$ folgt z. B.

- (b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0$. Beweis durch explizites Nachrechnen.

Theorem 2 Wenn $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, dann existiert ein Vektorfeld \mathbf{C} , so dass $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{C}$.

- (c)

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T = \nabla^2 T \quad (8)$$

$\nabla^2 = \Delta$ ist der Laplace-Operator. Er ist ein skalar, deswegen kann er auch auf Vektorfelder wirken: $\nabla^2 \mathbf{A} = \text{Vektor}$.

- (d) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{A}) = \text{Vektorfeld}$

- (e) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \neq 0!$ Man benutze die Regel

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (9)$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \text{Vektorfeld}$$

- (f) $\nabla \times \nabla \cdots = 0$, klar

1.3 Integralrechnung für Vektorfelder

1.3.1 Wegintegral über $\nabla \psi$

Man betrachte das Wegintegral

$$\int_{a,\Gamma}^b f ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i^N f_i \Delta s_i$$

entlang des Weges Γ zwischen den Punkten a und b , s. Abbildung 1. Sei $f = (\nabla \psi)_t$ die Projektion

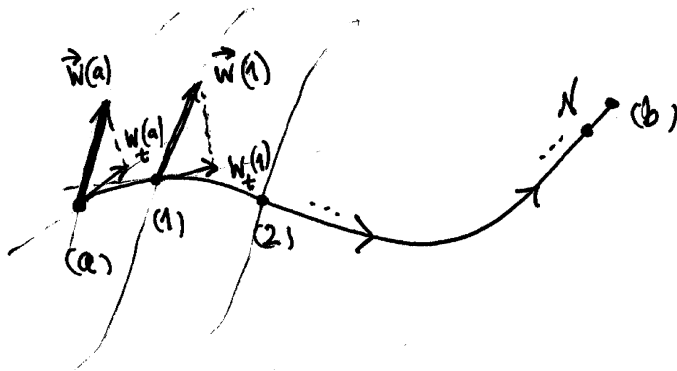


Abbildung 1:

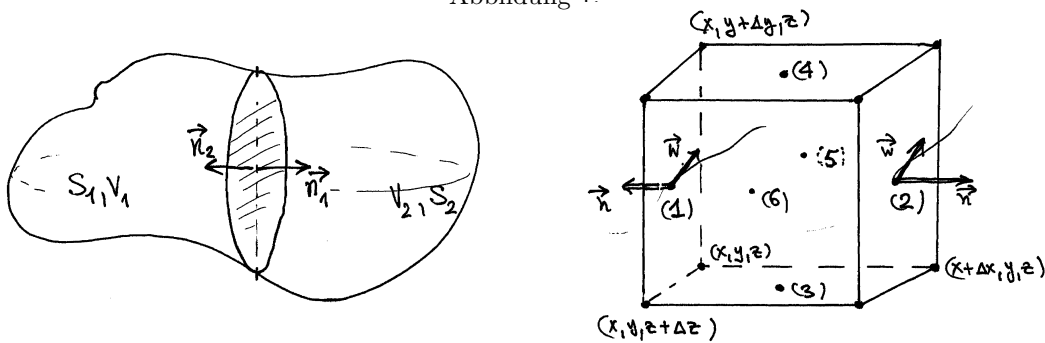


Abbildung 2:

des Gradienten auf die Tangente des Wegs, dann gilt $f_i \Delta s_i = (\nabla \psi)_i \cdot \Delta s_i$, d. h. für kleine Δs_i

$$\begin{aligned} (\nabla \psi)_1 \cdot \Delta s_1 &= \psi(1) - \psi(a) \\ (\nabla \psi)_2 \cdot \Delta s_2 &= \psi(2) - \psi(1) \\ &\dots \end{aligned}$$

Das führt dann automatisch zu

Theorem 3

$$\psi(b) - \psi(a) = \sum_i (\nabla \psi)_i \cdot \Delta s_i = \int_{a,\Gamma}^b \nabla \psi \cdot ds \quad (10)$$

gilt für alle Wege Γ von a nach b .

1.3.2 Gaußscher Integralsatz

Gesamtwärmestrom W nach aussen aus einem Volumen V mit Oberfläche S ,

$$W = \int_S da \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, \quad (11)$$

da - infinitesimales Flächenelement. Wenn $S = S_1 + S_2$ und $V = V_1 + V_2$ (s. Abbildung 2), dann

$$W_{i=1,2} = \int_{S_i} da \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} + \int_{S_{12}} da \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_i. \quad (12)$$

Da $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, deswegen heben sich die Integrale über die Grenzfläche auf.

Theorem 4 Der Gesamtvektorfluss aus einem Volumen ist gleich der Summe der Flüsse aus den Bestandteilen unabhängig von der Art der Aufteilung.

Man betrachte nun einen (kleinen) Würfel mit Abmessungen $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, s. Abbildung 2. Der Fluss aus der Fläche yz ist

$$-\int dy dz w_x \approx -w_x(1)\Delta y\Delta z, \quad (13)$$

wobei $w_x(1)$ den Wert des Vektorfeldes in der Mitte der Fläche xy bedeutet. Für die gegenüberliegende Fläche erhält man entsprechend

$$\approx w_x(2)\Delta y\Delta z.$$

Mit

$$w_x(2) = w_x(1) + \frac{\partial w_x}{\partial x} \Delta x$$

folgt für die Summe der beiden Ströme

$$= \frac{\partial w_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Aus ähnlichen Überlegungen für die anderen Flächen geht hervor, dass

$$\int_{\text{Würfeloberfläche}} da \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (14)$$

Zerlegt man ein beliebiges Volumen in kleine Würfel, so folgt damit der **Gaußscher Integralsatz**:

Theorem 5 Sei S eine beliebige geschlossene Fläche und V das von ihr eingeschlossene Volumen, dann gilt

$$\int_S da \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \int_V dV \operatorname{div} \mathbf{A} \quad (15)$$

Beispiel 1: Kontinuitätsgleichung . Energiedissipation aus einem kleinen Volumen ΔV . Energieverlustrate = Gesamtwärmefluss aus dem Volumen. dann:

$$\int_{\text{Würfel}} da \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \operatorname{div} \mathbf{w} \Delta V = -\frac{d}{dt}(q\Delta V)$$

$$\frac{dq}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \quad (16)$$

q bezeichnet dabei die Energiedichte . Das ist die Kontinuitätsgleichung, die nichts anderes ist als der Energieerhaltungssatz in Differenzialform.

Beispiel 2: Diffusionsgleichung/Wärmeleitungsgleichung. Man nehme (16) und (7):

$$\frac{dq}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) = \kappa \nabla^2 T. \quad (17)$$

Für konstante spezifische Wärme c_V : $\Delta q = c_V \Delta T \Rightarrow dq/dt = c_V dT/dt$ und

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{c_V} \nabla^2 T. \quad (18)$$

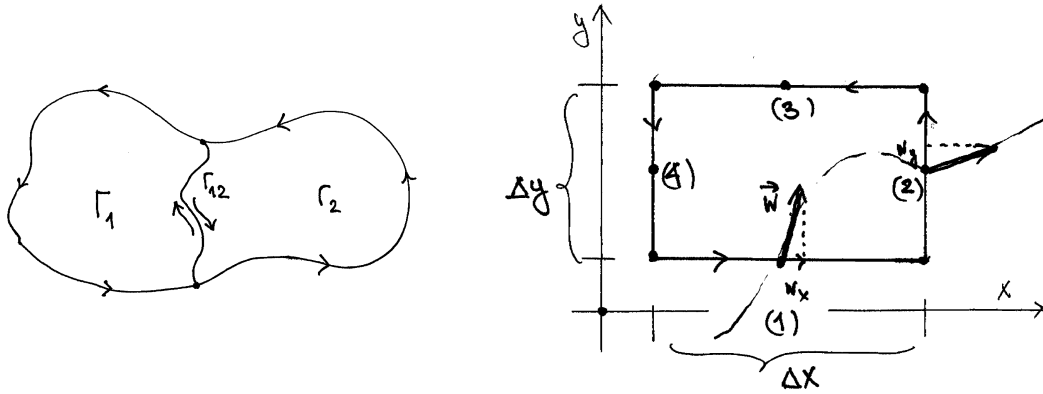


Abbildung 3:

1.3.3 Der Satz von Stokes

Sei Γ ein geschlossener Weg und \mathbf{w} ein Vektorfeld. Dann ist die Zirkulation des Feldes definiert als ein Wegintegral entlang Γ ,

$$\oint_{\Gamma} ds w_t = \oint_{\Gamma} ds \cdot \mathbf{w},$$

w_t ist die Komponente des Feldes, die tangential zu Γ liegt. Ähnlich zu Theorem 4 gilt:

Theorem 6 Die Gesamtzirkulation entlang des geschlossenen Weges Γ , der aus kleineren ebenfalls geschlossenen Wegen $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots$ zusammengesetzt werden kann, ist gleich der Summe der Zirkulationen entlang der einzelnen Γ_i .

In Abbildung 3 ist eine Zerlegung eines geschlossenen Weges in zwei Beiträge gezeigt. Somit ist die Zirkulation Γ gleich der Summe der Zirkulationen entlang von sehr kleinen (näherungsweise) rechteckförmigen Wegen.

Zirkulation entlang eines Rechtecks mit den Seitenlängen Δx und Δy , s. Abbildung 3:

$$\oint_{\Gamma} ds \cdot \mathbf{w} = w_x(1)\Delta x + w_y(2)\Delta y - w_x(3)\Delta x - w_y(4)\Delta y, \quad (19)$$

da jedoch

$$w_x(3) = w_x(1) + \frac{\partial w_x}{\partial y} \Delta y, \quad w_y(4) = w_y(2) - \frac{\partial w_y}{\partial x} \Delta x,$$

folgt für die Zirkulation (19)

$$\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = (\nabla \times \mathbf{w})_z \Delta a,$$

was die z -Komponente der Rotation multipliziert mit der infinitesimalen Fläche Δa ist. Da die z -Richtung die Normale zum Rechteck ist, können wir das gleich auf den Stokesschen Integralsatz erweitern:

Theorem 7 Wenn Γ ein beliebiger geschlossener Weg ist, der eine Fläche S einschließt, dann ist die Zirkulation eines Vektorfeldes \mathbf{w} entlang Γ gleich dem Flächenintegral der normalen Feldkomponente der Rotation $(\nabla \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}$ über S

$$\oint_{\Gamma} ds \cdot \mathbf{w} = \int_S da (\nabla \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \quad (20)$$

2 Elektro- und Magnetostatik

2.1 Fundamentale Gleichungen der Elektrostatik

2.1.1 Coulombsches Gesetz

(Coulomb/Cavendish) die Kraft zwischen zwei (punktförmigen) elektrischen Ladungen:

- $\sim q_1 q_2$ inklusive Vorzeichen
- $\sim 1/\text{Abstand}^2$
- wirkt entlang der Gerade zwischen den Ladungen

Für mehrere Ladungen gilt das Superpositionsprinzip: Kräfte werden vektoriell addiert.

$$\mathbf{F} = \text{const } q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (21)$$

Wir setzen $\text{const} = 1/4\pi\epsilon_0$ (In Gaußschen Einheiten $\text{const} = 1$, benutzen wir später!). Wir interessieren uns für die Eigenschaften des Ladungssystems, die unabhängig von der Probeladung q_2 sind. Dazu führt man den Feldstärkevektor

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \quad (22)$$

ein. Für mehrere Ladungen folgt mit dem Superpositionsprinzip

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (23)$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}) = \text{Ladung}/\text{Volumen}$ verallgemeinert sich das zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (24)$$

Kann man (23) auch als Ladungsdichte hinschreiben? Man führe die δ -Funktion ein,

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (25)$$

so dass aus (24) mit (25) folgt (23).

2.1.2 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Im Grunde löst das Integral (24) alle Probleme der Elektrostatik. Allerdings hat man manchmal mit Randwertproblemen zu tun – geerdete Oberflächen etc. Dann braucht man eine Differentialgleichung für Felder. Wie gelangt man zu einer derartigen Differentialgleichung?

Man lege eine geschlossene Fläche um eine punktförmige Ladung herum. Feldfluss durch die infinitesimale Fläche mit Normale \mathbf{n} ist

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\cos\theta}{r^2} da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega,$$

wobei $d\Omega = \cos\theta da/r^2$ der Raumwinkel ist. Integration über die ganze geschlossene Fläche führt auf

$$\int_S da \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = q/\epsilon_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j q_j = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \rho(\mathbf{r}), \quad (26)$$

wobei V das von S eingeschlossene Volumen ist. Rekapitulieren wir die Voraussetzungen, die zu diesem Ergebnis führten:

- $1/r^2$ -Abhängigkeit
- \mathbf{F} ist eine zentrale Kraft
- Es gilt das Superpositionsprinzip

Dies alles trifft auch auf die Gravitationskraft zu \Rightarrow (26) gilt auch für die Gravitation wenn die Ladungsdichte ρ durch die Massendichte ersetzt wird.

Beispiel: Homogen geladene Kugel: Radius R , Ladungsdichte $\rho = \rho_0$ für $r < R$, $\rho = 0$ für $r > R$. Wegen der Symmetrie ist \mathbf{E} parallel zu der Normalen gerichtet und ihr Betrag ist auf einer sphärischen Fläche mit Radius r überall gleich, aus (26) folgt

$$\int_S da \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} \begin{cases} r^3 & \text{für } r < R \\ R^3 & \text{für } R < r \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{3} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left[r \Theta(R-r) + \frac{R^3}{r^2} \Theta(r-R) \right].$$

Man kann (26) auch in eine Differentialform umschreiben. Man benutze (15):

$$\int_S da \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \int_V dV \operatorname{div} \mathbf{E} \Rightarrow \int_V dV (\operatorname{div} \mathbf{E} - \rho/\epsilon_0) = 0.$$

Da das Volumen beliebig gewählt wurde, muss

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (27)$$

gelten. Dies ist eine skalare Gleichung (erste Maxwell-Gleichung der Elektrostatik), \mathbf{E} hat aber 3 Komponenten, was ist die andere Gleichung?

In den Übungen wurde gezeigt

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (28)$$

Einsetzen in (24):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla \Phi(\mathbf{r}), \quad (29)$$

wobei Φ das elektrostatische (skalare) Potential bezeichnet,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (30)$$

Aus dem Theorem 1 folgt nun, dass (zweite Maxwell-Gleichung der Elektrostatik)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (31)$$

Die Integralform der zweiten Gleichung folgt aus Theorem 7,

$$\oint_{\Gamma} ds \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (32)$$

2.1.3 Poisson- und Laplace-Gleichungen

\mathbf{E} -Vektor, Φ -Skalar \Rightarrow es ist einfacher, eine einzige Gleichung für das Potential zu haben. Man nehme (27) und benutze (29),

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla \Phi = -\nabla^2 \Phi = \rho/\epsilon_0, \quad \Delta \Phi = -\rho/\epsilon_0. \quad (33)$$

Das ist die Poisson-Gleichung. Die Laplace-Gleichung bekommt man im ladungsfreien Raum

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (34)$$

Ist (33) kompatibel zu (30)? Das ist nur möglich wenn

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (35)$$

Überprüft werden kann das durch direktes Nachrechnen: Laplace von $1/|\mathbf{r}|$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}.$$

Daraus folgt, dass $\Delta 1/r = 0$ für endliche r . Für das Volumenintegral dagegen gilt

$$\int_V dV \Delta \frac{1}{r} = \int_V dV \operatorname{div} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) = \int_S da \mathbf{n} \cdot \nabla \frac{1}{r}.$$

Für S kann man eine Sphäre mit Radius R nehmen. Der Normalenvektor berechnet sich dann zu

$$\mathbf{n} = \frac{(x, y, z)^T}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(x, y, z)^T}{r} \Big|_{r=R} = \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (36)$$

$\nabla 1/r$ klar – siehe oben. Mit dem Ergebnis für $\nabla 1/r$ folgt schließlich

$$\nabla \frac{1}{r} \Big|_{r=R} = \frac{(-x, -y, -z)}{r^3} \Big|_{r=R} \Rightarrow \int_S da \mathbf{n} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \int_S da \frac{-R^2}{R^4} = -4\pi.$$

\Rightarrow die Normierung stimmt \Rightarrow (35) ist korrekt.

Bemerkung: (33) ist nicht immer besser als (27), da sie eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung ist im Gegensatz zu (27), welche eine Gleichung *erster* Ordnung ist, s. Übungen.

2.1.4 Elektrostatische potentielle Energie

Physikalische Bedeutung des Potentials: Die beim Transport einer Ladung q aufzubringende Arbeit ist ein Wegintegral:

$$A = - \int_{a,\Gamma}^b ds \cdot \mathbf{F} = -q \int_{a,\Gamma}^b ds \cdot \mathbf{E} = q \int_{a,\Gamma}^b ds \cdot \nabla \Phi = q\Phi(b) - q\Phi(a),$$

wenn man Theorem 3 heranzieht. $W = q\Phi(b)$ ist die Arbeit, die beim Einbringen der Ladung q aus dem Unendlichen (wo es kein Feld gibt) an den Ort b geleistet wird. Somit ist sie die potentielle Energie der Ladung. Betrachtet man das (Punkt)ladungssystem, durch

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (37)$$

so berechnet sich die Gesamtenergie des Systems durch

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{j,i=1, i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (38)$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung gilt

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int dV \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2} \int dV \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}),$$

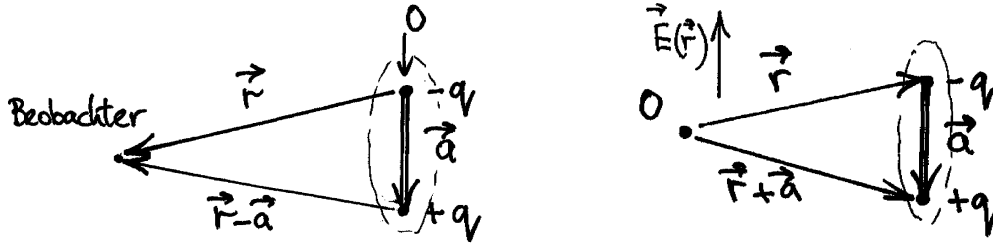


Abbildung 4:

wenn man Φ aus (30) benutzt. Die Energie ist im Feld gespeichert und nicht in der Dichte \Rightarrow man benutze die Poisson-Gleichung, um die Feldenergie alleine durch das Potential bzw. das elektrische Feld auszudrücken,

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int dV \Phi \nabla^2 \Phi = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV |\nabla \Phi|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV |\mathbf{E}|^2. \quad (39)$$

Die letzte Gleichheit folgt nach partieller Integration. Man kann auch eine Energiedichte einführen,

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2, \quad (40)$$

die eine positive Größe ist.

Das Potential eines Leiters ist überall konstant und der Zusammenhang zwischen den Potentialen und Ladungen ist einfach:

$$\Phi_i = \sum_{j=1, i \neq j}^N p_{ij} q_j.$$

p_{ij} sind Konstanten, die alleine aus der Systemgeometrie gegeben sind. Nach Ladungen aufgelöst:

$$q_i = \sum_{j=1, i \neq j}^N C_{ij} \Phi_j \quad (41)$$

C_{ij} sind Kapazitätskoeffizienten und C_{ii} die Kapazitäten. Damit folgt für die Gesamtenergie des Systems

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \Phi_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} \Phi_i \Phi_j. \quad (42)$$

2.2 Elementare elektrostatische Probleme

2.2.1 Dipol, Quadrupol etc.

Dipol: Zwei punktförmige Ladungen $\pm q$ im Abstand \mathbf{a} voneinander, s. Abbildung 4. Das Potential dazu ist

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q}{r} + \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \right).$$

Man benutze nun die Taylor-Entwicklung für kleinen Parameter a/r [dieser Bereich wird auch Fernzone im Gegensatz zum Bereich $r \approx a$ (Nahzone) genannt]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + a^2}} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-2\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^2} + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right) + \frac{3}{8} \left(-2\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^2} + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2 - a^2 r^2}{r^5} + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Dies kann auch als

$$= \frac{1}{r} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} + \dots = e^{\mathbf{a} \cdot \nabla} \frac{1}{r}$$

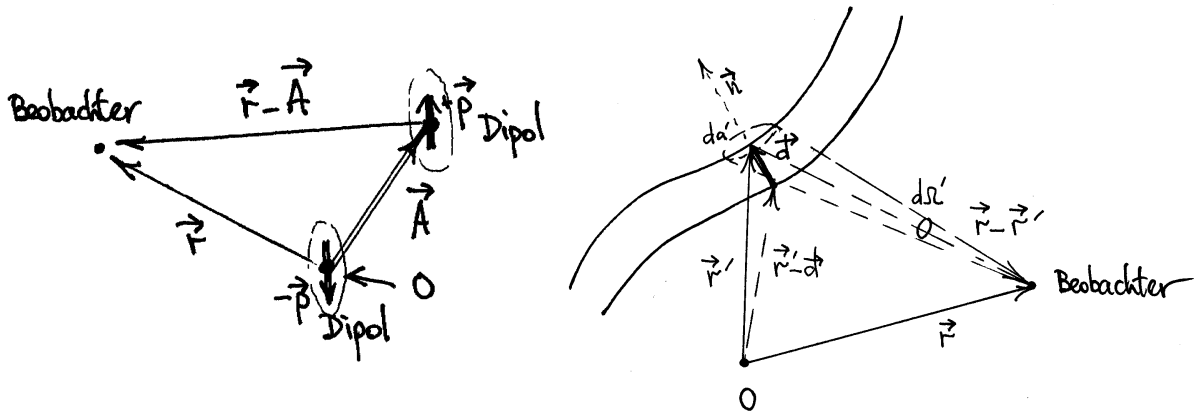


Abbildung 5:

geschrieben werden. Betrachtet man nur den führenden Term, so gilt

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3}, \quad (44)$$

wobei das Dipolmoment \mathbf{p} auf folgende Weise definiert ist:

$$\mathbf{p} = q \mathbf{a}. \quad (45)$$

Wann ist nun (44) exakt? Genau wenn $q \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ bei konstant gehaltenem p . Das ist genau der Parameter, der das System aus zwei Ladungen nach aussen „bemerkbar“ macht. Umgekehrt ist es genau der Parameter, der die Wechselwirkung mit der Umgebung beschreibt: Die Kraft, die auf ein Dipol in einem *externen* Feld wirkt, ist, s. Abbildung 4,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = -q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q[\mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \dots] = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \dots \quad (46)$$

Im homogenen Feld wirkt also keine Kraft, aber ein Drehmoment (s. Übungen).

Quadrupol: Zwei identische, antiparallel angeordnete Dipole im Abstand \mathbf{A} voneinander, s. Abbildung 5. Das Potential kann aus (44) abgelesen werden:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{A}|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} + \mathbf{A} \cdot \nabla \frac{1}{r} + \dots \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\mathbf{A} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right),$$

wobei man jetzt nach A/r entwickelt hat. Die letzte Klammer kann nach der Regel (9): $\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ mit der Ersetzung $\mathbf{b} \rightarrow \nabla$, $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{A}$ und $\mathbf{c} \rightarrow \nabla 1/r$ umgeformt werden:

$$\nabla \left(\mathbf{A} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \nabla \frac{1}{r}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{\mathbf{A}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5},$$

wobei man (28) benutzt hat. Für das Potential in der Fernzone gilt also:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - r^2(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p})]. \quad (47)$$

Gibt es eine Ladungsanordnung, für die es überall ein solches Feld gibt? Nur im Grenzfall $A \rightarrow 0$ und $p \rightarrow \infty$. Wenn dabei $(i, j = x, y, z)$

$$Q_{ij} = A_i p_j \quad (48)$$

endlich bleibt, nennt man es das Quadrupolmoment. Dann (in kartesischen Koordinaten) berechnet sich das Potential aus

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{i,j} Q_{ij} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \quad (49)$$

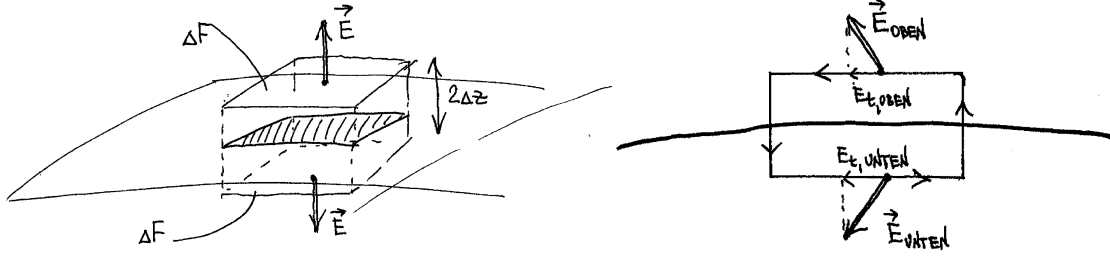


Abbildung 6:

Multipolentwicklung für kontinuierliche Ladungsverteilungen: Was ist (30) in der Fernzone?

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{R}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV \rho(\mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV \rho(\mathbf{r}) \left(\frac{1}{R} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})^2 - r^2 R^2}{R^5} + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} \int dV \rho(\mathbf{r}) + \frac{1}{R^3} \mathbf{R} \cdot \int dV \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) + \frac{1}{2R^5} \int dV \rho(\mathbf{r}) [3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^2 - R^2 r^2] + \dots \right] \\
 &\quad \int dV \rho(\mathbf{r}) [3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^2 - R^2 r^2] = \int dV \rho(\mathbf{r}) \left[\sum_{i,j} 3X_i x_i X_j x_j - r^2 \sum_{i,j} \delta_{ij} X_i X_j \right] \\
 &= \sum_{i,j} X_i X_j \int dV \rho(\mathbf{r}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) .
 \end{aligned}$$

Diese Entwicklung lässt sich wie folgt zusammenfassen:

$$\Phi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{p}}{R^3} + \frac{1}{2R^5} \sum_{i,j} Q_{ij} X_i X_j + \dots \right), \quad (50)$$

wobei wir folgende Definitionen einführen:

$$\begin{aligned}
 \text{Gesamtladung (Monopol)} \quad q &= \int dV \rho(\mathbf{r}) \\
 \text{Dipolmoment} \quad \mathbf{p} &= \int dV \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \\
 \text{Quadrupolmoment} \quad Q_{ij} &= \int dV \rho(\mathbf{r}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) . \quad (51)
 \end{aligned}$$

Plattenkondensator: Zunächst eine unendliche Fläche mit der Ladungsdichte $\sigma = \Delta Q / \Delta F$. Man lege ein *Gaußsches Kästchen* um ein Stück der Fläche mit der Höhe $2\Delta z$ und Grundfläche ΔF , s. Abbildung 6. Das Feld \mathbf{E} steht aus Symmetriegründen senkrecht zur Fläche. Mit (26) folgt:

$$2\Delta F E = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta F \sigma \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} . \quad (52)$$

Bemerkung: Diese Argumentation gilt nur, wenn neben der Flächenladung keine weiteren Quellen vorhanden sind. Für ein äußeres Feld gilt anstelle von (52) nur eine Bedingung an die Veränderung der normalen Komponente des Feldes:

$$E_{n,\text{oben}} - E_{n,\text{unten}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} . \quad (53)$$

Für die Tangentialkomponente führt man eine *Stokessche Fläche* „senkrecht“ zur Oberfläche, s. Abbildung 6, ein. Dann folgt mit (32)

$$\oint ds \cdot \mathbf{E} = 0 = -E_{t,\text{oben}} \Delta s + E_{t,\text{unten}} \Delta s \Rightarrow E_{t,\text{oben}} = E_{t,\text{unten}} , \quad (54)$$

die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist also stetig.

Für zwei identische Flächen im Abstand d voneinander mit entgegengesetzten Flächenladungsdichten $\pm\sigma$ gilt für das Feld und Potential:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad , \quad \Phi = \Phi_{\text{Platte 1}} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} z \quad ,$$

wobei $\Phi_{\text{Platte 2}} = \Phi_{\text{Platte 1}} - \sigma d/\epsilon_0$. Potentialdifferenz = angelegte Spannung U ist also (keine Randeffekte wenn $\sqrt{F} \gg d$ und Q gleichmäßig verteilt) durch

$$\Delta\Phi = U = \frac{Qd}{F\epsilon_0} \Rightarrow Q = CU \quad (55)$$

gegeben, wobei die Kapazität des Kondensators definiert ist als

$$C = \epsilon_0 \frac{F}{d} \quad (56)$$

Dipolschicht: (Abbildung 5) Man definiere zunächst mit $\mathbf{d} = d\mathbf{n}$ einen Normalenvektor der Normale zur Schichtfläche. Dann ist das Potential laut (30):

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_S da' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int_{S'} da' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \mathbf{d}(\mathbf{r}')|} \right] \quad .$$

Man entwickle wie vorher

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \mathbf{d}(\mathbf{r}')|} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{d}(\mathbf{r}') \cdot \nabla] \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \dots = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - d \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dots \quad .$$

Eingesetzt in die vorherige Gleichung,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S da' [\sigma(\mathbf{r}') d] \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dots \Big|_{d \rightarrow 0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int da' \mathbf{D}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad , \quad (57)$$

wobei die Dipolflächendichte definiert ist als

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}') = \lim_{d \rightarrow 0} [\sigma(\mathbf{r}') \mathbf{d}(\mathbf{r}')] \quad . \quad (58)$$

Vereinfachung: man schaue sich die Projektion einer infinitesimalen Fläche an, die senkrecht zur Beobachtungsrichtung ist:

$$da' \mathbf{n} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = da' \cos \theta = d\Omega' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \quad , \quad (59)$$

s. z. B. auch die Herleitung von (26). Dann findet man

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega' D(\mathbf{r}') \quad . \quad (60)$$

D ist nun eine skalare Dichte. Für konstantes D gilt trivialerweise

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} D \int d\Omega' \quad .$$

Und daher für eine halbumendliche Fläche ($\Omega = 2\pi$)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0} D$$

wobei die Potentialdifferenz zwischen beiden Flächen doppelt so groß ist, was kompatibel zu (55) ist.

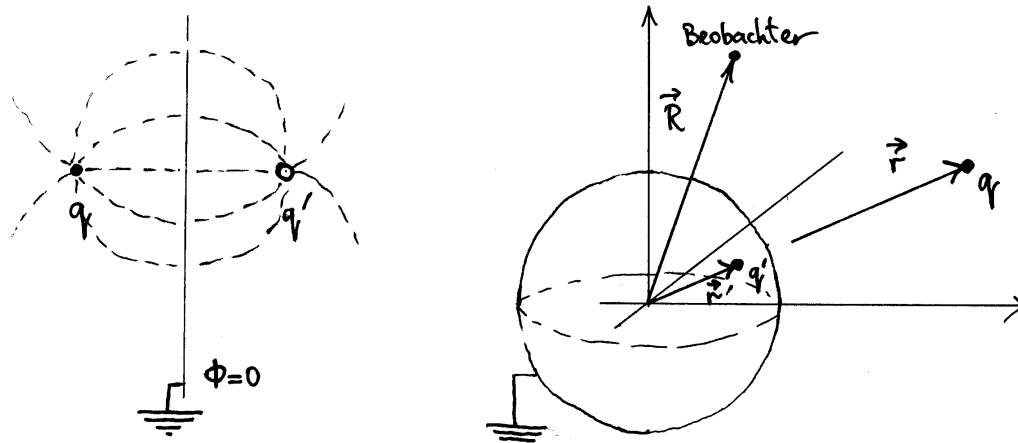


Abbildung 7:

2.3 Randwertprobleme der Elektrostatik

Randwertproblem = Poisson-Gleichung + Ladungsverteilung im Volumen V + Randbedingungen auf dem Rand S . Es gibt davon zwei verschiedene Arten:

- *Dirichlet-Randbedingung*: Φ auf S vorgegeben
- *Neumann-Randbedingung*: $\partial\Phi/\partial n = \nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ auf S vorgegeben

2.3.1 Methode der Bildladungen

Man versucht, die Randbedingungen zu erfüllen, indem man Hilfsladungen außerhalb des betrachteten Raumbereichs einführt. Für Punktladungssysteme in Anwesenheit von Leitern mit konstanten Potentialen ist das gewöhnlich gut möglich.

Beispiel 1: Unendliche geerdete Metallplatte und eine Punktladung. Die Hilfsladung ist das „Spiegelbild“ der Ladung in der Platte mit anderem Vorzeichen, s. Abbildung 7 links.

Beispiel 2: Eine Punktladung q und eine geerdete metallische Kugel mit Radius a . Beobachter bei \mathbf{R} und die Ladung bei \mathbf{r} . Bildladung q' bei \mathbf{r}' , s. Abbildung 7 rechts. Dann gilt

$$\Phi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} + \frac{q'}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} \right).$$

Seien $\mathbf{e}_{\mathbf{R}}$ und $\mathbf{e}_{\mathbf{r}}$ Einheitsvektoren in Richtungen des Beobachters und der Ladungen. Dann gilt auf der Kugel

$$\Phi(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{a|\mathbf{e}_{\mathbf{R}} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}(r/a)|} + \frac{q'}{r'|\mathbf{e}_{\mathbf{r}} - \mathbf{e}_{\mathbf{R}}(a/r')|} \right).$$

Hier sieht man nun, dass wenn $q'/r' = -q/a$ und $r/a = a/r'$, dann $\Phi(a) = 0$ für alle $\mathbf{e}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{R}}$ erfüllt. Damit folgt $q' = -aq/r$ und $r' = a^2/r$ ← genau der Abstand, den das konventionelle „Spiegelbild“ der Ladung haben würde, wenn die Kugel ein Spiegel wäre.

2.3.2 Trennung der Variablen

Beispiel 1: Man betrachte ein ladungsfreies 2D Problem mit den Randbedingungen:

1. $\Phi = 0$ für $x = 0, x = a$
2. $\Phi = 0$ für $y \rightarrow \infty$
3. $\Phi(x, y = 0) = \Phi_0$,

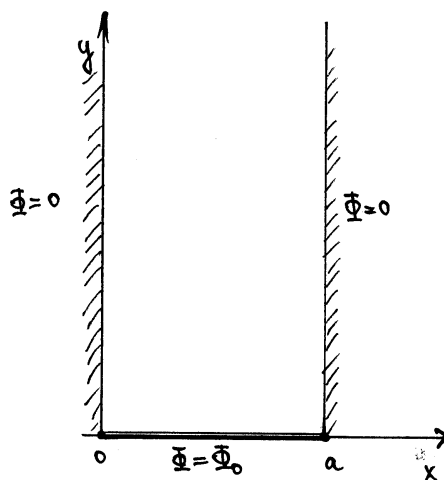


Abbildung 8:

s. Abbildung 8. Gesucht wird $\Phi(x, y)$ im halboneudlichen Streifen $0 < x < a$ und $0 < y < \infty$. Laplace-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Lässt sich diese partielle Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduzieren? Man versuche einen Separationsansatz:

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (61)$$

Einsetzen in die Laplace-Gleichung liefert

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\alpha^2 \ \& \ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = \alpha^2. \quad (62)$$

Die *Trennung der Variablen* ist also damit vollzogen. Die Lösungen der Gleichungen (62) sind:

$$X(x) = c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x), \quad Y(y) = C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y}, \quad (63)$$

wobei die Konstanten aus den Randbedingungen zu finden sind. Sei α reell, dann folgt aus der 2. Randbedingung $C_2 = 0$. Die 1. Randbedingung erfordert $c_2 = 0$ und außerdem

$$\alpha a = n\pi \Rightarrow \alpha_n = \pi n/a. \quad (64)$$

Insgesamt gilt also für die Lösung

$$\Phi(x, y) = c_1 e^{-\pi n y/a} \sin(\pi n x/a).$$

Die 3. Randbedingung ist jedoch immer noch nicht erfüllt! Es ist allerdings erlaubt, Φ als eine Summe mit verschiedenen n auszudrücken,

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \sum_n c_n e^{-\pi n y/a} \sin(\pi n x/a) \\ \Rightarrow \Phi(x, 0) &= \sum_n c_n \sin(\pi n x/a). \end{aligned} \quad (65)$$

Hier erkennt man eine Fourier-Entwicklung. Die Inverse dazu ist

$$c_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx \Phi(x, 0) \sin(\pi n x/a) = \begin{cases} \frac{4\Phi_0}{\pi n} & \text{ungerade } n \\ 0 & \text{gerade } n \end{cases}$$

Das muss jetzt zurück in die (65) – Problem gelöst! Die Aufsummation der entstandenen Reihe ist jedoch exakt möglich,

$$\Phi(x, y) = \frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{\text{ungerade } n} \frac{1}{n} e^{-\pi y n/a} \sin(\pi x n/a) = \frac{4\Phi_0}{\pi} \operatorname{Im} \sum \frac{e^{\pi(-y+ix)n/a}}{n} = \frac{4\Phi_0}{\pi} \operatorname{Im} \sum \frac{\zeta^n}{n}$$

$$\zeta = e^{\pi(-y+ix)/a}, \quad \sum \frac{\zeta^n}{n} = \int d\zeta \sum \zeta^{n-1} = \int d\zeta \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta^2)^k = \int d\zeta \frac{1}{1-\zeta^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right),$$

wobei wir die Formel für die Summe für die geometrische Reihe benutzt haben. Der Imaginärteil ist nun leicht auszurechnen,

$$\operatorname{Im} \ln \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right) = \operatorname{Im} \ln \frac{1-|\zeta|^2 + 2i\operatorname{Im}\zeta}{|1-\zeta|^2} = \arctan \frac{2\operatorname{Im}\zeta}{1-|\zeta|^2}.$$

Das volle Ergebnis ist also

$$\Phi(x, y) = \frac{2\Phi_0}{\pi} \arctan \left[\frac{\sin(\pi x/a)}{\sinh(\pi y/a)} \right].$$

Trennung der Variablen, Theorie: Eine Aufgabe vom Typ (62)

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dX}{dx} \right] = -\lambda w(x) X(x) \quad (66)$$

mit den Randbedingungen

$$A_1 X(a) + B_1 \frac{dX(a)}{dx} = 0, \quad A_2 X(b) + B_2 \frac{dX(b)}{dx} = 0 \quad (67)$$

nennt sich Sturm-Liouville-Problem (1837-1841). Für reelle A_i und B_i existiert eine wachsende Folge der *Eigenwerte* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$. Zu jedem Eigenwert existiert eine *Eigenfunktion* ϕ_n . Diese Funktionen bilden auf $[a, b]$ ein vollständiges orthogonales Funktionensystem mit Gewicht $w(x)$. Die Orthogonalität ist definiert durch

$$\int_a^b dx w(x) \phi_n(x) \phi_m(x) = 0 \quad \text{für } m \neq n. \quad (68)$$

Orthonormiert ist dieses, wenn die rechte Seite δ_{nm} ist. Allgemein kann eine beliebige Funktion $f(x)$ nach dem System von ϕ_n entwickelt werden,

$$f(x) = \sum_n C_n \phi_n(x), \quad C_n = \int_a^b dx f(x) \phi_n(x) w(x). \quad (69)$$

Beispiele: Polynome und trigonometrische Reihen

- Trigonometrische Funktionen $1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \dots, [a, b] = [-\pi, \pi], w(x) = 1$
- Legendre-Polynome $P_n(x), [a, b] = [-1, 1], w(x) = 1$ (Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, s. später)
- Laguerre-Polynome $L_n(x), [a, b] = [0, \infty), w(x) = e^{-x}$ (Wasserstoffatom in der QM)
- Hermite-Polynome $H_n(x), [a, b] = (-\infty, \infty), w(x) = e^{-x^2}$ (Harmonischer Oscillator in der QM)
- Ebene Wellen auf $[a, b] = (-\infty, \infty)$ mit $w(x) = 1$ – Eigenfunktionen des Laplace-Operators ∇^2 (EM-Wellen, s. später)

$$u(k, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad \text{weil} \quad \nabla^2 u(k, x) = -k^2 u(k, x).$$

Es ist nicht schwierig, das von $[a, b]$ auf R^3 zu erweitern:

$$u(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \nabla^2 u(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = -k^2 u(\mathbf{k}, \mathbf{x}). \quad (70)$$

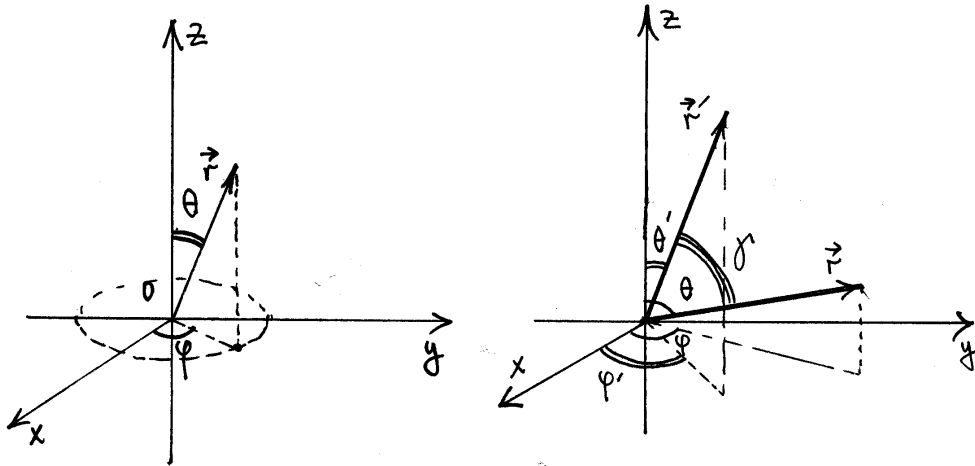


Abbildung 9:

- Weitere wichtige Systeme: Bessel-Funktionen (elektrostatische Probleme in 2D), hypergeometrische Polynome, Chebyshev-Polynome etc.

Beispiel 2: Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (s. auch Abbildung 9 links):

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (71)$$

Man suche $\Phi = \Phi(r, \theta, \varphi)$:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right] = 0 \quad (72)$$

in Form eines Produkts:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi). \quad (73)$$

Zurück in die Gleichung eingesetzt ergibt

$$PQ \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{UP}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

Man teile nun durch UPQ und multipliziere mit $r^2 \sin^2 \theta$:

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

φ -abhängig ist nur der letzte Teil, deswegen kann eine *Trennung der Variablen* durchgeführt werden:

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2 \quad \text{mit der Lösung} \quad Q = e^{\pm im\varphi}. \quad (74)$$

$-m^2$ zurück in die vorletzte Gleichung einsetzen, die man dann durch $\sin^2 \theta$ teilt,

$$\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (75)$$

r -abhängig ist nur der allererste Term, deswegen ist es eine Konstante:

$$\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} = l(l+1). \quad (76)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$U(r) = cr^{l+1} + \frac{C}{r^l}. \quad (77)$$

(76) kann man in die Gleichung (75) einbauen. Damit bekommt man

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0. \quad (78)$$

Man nehme nun eine Variablensubstitution vor:

$$x = \cos \theta \Rightarrow dx = -\sin \theta d\theta \Rightarrow d\theta = -dx / \sin \theta,$$

wobei $x \in [-1, 1]$ (-1 -Südpol, 1 -Nordpol). Diese Substitution führt auf die folgende Gleichung :

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] = \left(\frac{m^2}{1-x^2} - l(l+1) \right) P. \quad (79)$$

Man betrachte zunächst **Probleme mit azimutaler Symmetrie**, d. h. solche, die φ -unabhängige Lösungen haben $\Rightarrow m = 0$:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] = -l(l+1)P. \quad (80)$$

Dies ist ein Sturm-Liouville-Problem von der Form (66). Das passende Eigensystem für die Entwicklung einer Lösung sind die *Legendre-Polynome* P_l mit der kompakten Darstellung (Rodrigues-Formel):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l, \quad (81)$$

mit der traditionellen Normierung $P_l(1) = 1$. Die ersten Polynome lauten:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = (3x^2 - 1)/2, \quad P_3(x) = (5x^3 - 3x)/8 \dots \quad (82)$$

Sie entstehen auch durch die *Orthogonalisierung* des monomialen Systems $1, x, x^2, x^3, x^4 \dots$. Die Orthogonalitätsbedingung ist:

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (83)$$

mit deren Hilfe man ein *orthonormiertes* System aufbauen kann.

Man betrachte nun folgendes ladungsfreie Problem: Eine Kugel mit Radius a , deren Oberflächenpotential durch $V(\theta)$ gegeben ist. Dann erhalten wir mit Hilfe von (77) die Entwicklung

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(c_l r^l + \frac{C_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (84)$$

Da das Potential im Kugelzentrum regulär sein soll, müssen die $C_l = 0$ sein. Der Rest findet sich aus der Inversion von

$$V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l a^l P_l(\cos \theta),$$

die wie folgt aussieht:

$$c_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^\pi d\theta \sin \theta V(\theta) P_l(\cos \theta).$$

Damit ist das Problem gelöst.

Einsetzen in (43): man schreibe $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = ar \cos \theta$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + a^2}} = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} \cos \theta + \frac{a^2}{r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (85)$$

Dies definiert die *erzeugende Funktion* der Legendre-Polynome:

$$P_l(x) = \frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\eta^l} \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\eta + \eta^2}} \Big|_{\eta \rightarrow 0}. \quad (86)$$

Probleme ohne azimutale Symmetrie $m \neq 0$. Dann bekommt man für P eine *zugeordnete Legendre-Gleichung* (79). Die Lösungen sind *zugeordnete Legendre-Polynome* (Kugelfunktionen), für $m > 0$:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad (87)$$

wobei für $m < 0$ gilt

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l - m)!}{(l + m)!} P_l^m(x).$$

Die Lösungen der Gleichung (79) mit den geforderten Eigenschaften auf $[-1, 1]$ existieren im Allgemeinen nur für $l = 0, 1, 2, \dots$ und für ganze m zwischen $-l$ und l . Allgemein $P_l^m(\pm 1) = 0$. Die Orthogonalitätsrelation hat eine andere Gestalt:

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \delta_{ll'}. \quad (88)$$

Gleichzeitige Orthogonalisierung im φ -Raum erhält man durch Multiplikation mit den Funktionen (74) \Rightarrow *Kugelflächenfunktionen*:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l + 1}{4\pi} \frac{(l - m)!}{(l + m)!}}, \quad (89)$$

mit der Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \quad (90)$$

Die Kugelflächenfunktionen für $l = 0, 1$ schreiben sich explizit als:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}, \quad Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} \dots \quad (91)$$

Mit Hilfe dieser Funktionen sind wir jetzt in der Lage, eine Verallgemeinerung der Lösung (84) auf φ -abhängige Probleme durchzuführen:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(c_{lm} r^l + C_{lm} r^{-(l+1)} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (92)$$

Im Allgemeinen gilt für hinreichend „gute“ Funktionen $f(r, \theta, \varphi)$ der Entwicklungssatz:

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \text{mit} \quad R_{lm}(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta f(r, \theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi). \quad (93)$$

Eine sehr nützliche Eigenschaft der Kugelflächenfunktionen ist das

Theorem 8 Man betrachte zwei Punkte auf der Einheitskugel mit den Koordinaten \mathbf{r} : θ, φ und \mathbf{r}' : θ', φ' , s. Abbildung 9 rechts. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren sei γ [so dass $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$], dann gilt das **Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen**:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi'). \quad (94)$$

Schauen wir uns nun die Multipolentwicklung (50) an und benutzen die Entwicklung (85) und das Additionstheorem (94):

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV \rho(\mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV \rho(\mathbf{r}) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{(r')^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta', \varphi')}{(r')^{l+1}} \left(\int dV \rho(\mathbf{r}) r^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta', \varphi')}{(r')^{l+1}} q_{lm}, \end{aligned} \quad (95)$$

wobei die neuen Konstanten nichts anderes sind als die Komponenten der Multipolmomente aus (51) in Kugelkoordinaten oder *sphärische Multipolmomente* und sind definiert durch

$$q_{lm} = \int dV \rho(\mathbf{r}) r^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi). \quad (96)$$

Der Zusammenhang mit den „konventionellen“ Momenten (51) kann sehr einfach mit Hilfe von expliziten Ausdrücke für die Kugelflächenfunktionen (91) gefunden werden [man greife auf (71) zurück],

$$\begin{aligned} q_{00} &= \int dV \rho(\mathbf{r}) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{q}{\sqrt{4\pi}}, \\ q_{10} &= \int dV \rho(\mathbf{r}) \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int dV z \rho(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z, \\ q_{11} &= - \int dV \rho(\mathbf{r}) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} r \sin \theta (\cos \varphi - i \sin \varphi) = - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int dV \rho(\mathbf{r}) (x - iy) \\ &= - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y), \dots \end{aligned} \quad (97)$$

Die neuen q_{lm} Komponenten sind „präziser“: Während in kartesischen Koordinaten das Quadrupolmoment eine 3x3 Matrix ist und im Allgemeinen 9 Einträge besitzt, sind es in Kugelkoordinaten nur $2l+1 = 4+1 = 5$ Komponenten. Natürlich ist Q_{ij} eine symmetrische Matrix mit 6 unabhängigen Einträgen und der Spur=0 – hat also auch nur 5 unabhängige Komponenten.

2.3.3 Methode der Greenschen Funktion

Bis jetzt haben wir mit der Laplace-Gleichung mit Randbedingungen zu tun gehabt. Wie behandelt man eine Poisson-Gleichung mit Randbedingungen? Hier ist die Methode der Greenschen Funktion sehr nützlich. Zunächst kehren wir zum Gaußschen Satz (15) zurück und wenden ihn auf $\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$ an. Mit Hilfe von

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi, \quad \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

bekommen wir durch einfaches Einsetzen in (15) die 1. Greensche Identität

$$\int_V dV (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) = \int_S da \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (98)$$

Anwendung: Eindeutigkeit der Lösung eines elektrostatischen Problems. Man nehme an, die Poisson-Gleichung mit den Dirichlet/Neumann-Randbedingungen besitze zwei verschiedene

Lösungen: $\Phi_{1,2}$. Dann gilt für $U = \Phi_2 - \Phi_1$ die Laplace-Gleichung $\nabla^2 U = 0$ mit den Randbedingungen : $U = 0$ und $\partial U/\partial n = 0$ auf S . Man setze nun in (98) $\phi = \psi = U$, dann gilt

$$\int_V dV (U \nabla^2 U + \nabla U \cdot \nabla U) = \int_S da U \frac{\partial U}{\partial n}. \quad (99)$$

Die rechte Seite verschwindet jetzt für *beide* RB-Arten und wir sind konfrontiert mit

$$\int_V dV (\nabla U)^2 = 0 \Rightarrow \nabla U = 0,$$

mit der Lösung $U = 0$ für die D-Randbedingung und $U = \text{const}$ für die N-Randbedingung . D. h. für die Eindeutigkeit der Lösung reicht nur *eine* der Randbedingungen . Durch Angabe sowohl von Φ als auch von $\partial\Phi/\partial n$ auf einer geschlossenen Fläche ist das Problem *überbestimmt!* Gemischte Randbedingungen , d. h. wenn auf einem Teil von S das Potential und auf einem anderen die Ableitung entlang der Normalen oder eine lineare Kombination nach dem Muster (67) sind jedoch erlaubt.

Man gehe zurück zu (98) und erzeuge eine zweite Gleichung indem man ϕ und ψ vertauscht und subtrahiere diese aus der ersten, dann bekommt man *die 2. Greensche Identität*

$$\int_V dV (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \int_S da \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right), \quad (100)$$

auch bekannt als *der Greensche Satz*.

Anwendung: Integralgleichung für das E-Potential. Man wähle nun $\psi = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ und $\phi = \Phi(\mathbf{r}')$, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_V dV' \left(\Phi(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}') \right) &= \int_V dV' \left(-4\pi \Phi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \int_S da' \left[\Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] \end{aligned} \quad (101)$$

wobei wir die Eigenschaft (35) sowie die Poisson-Gleichung (33) benutzt haben. Liegt nun \mathbf{r} innerhalb von V , so bekommen wir die mit der Poisson-Gleichung verwandte Integralgleichung

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_S da' \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right]. \quad (102)$$

In der oberen Herleitung haben wir die Eigenschaft (35) benutzt. Ihre Verallgemeinerung lautet

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (103)$$

und definiert die *Greensche Funktion*. Sie kann auf folgende Weise gewählt werden:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (104)$$

wobei F innerhalb von V der Laplace-Gleichung genügt,

$$\nabla'^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (105)$$

Dadurch ist sie nicht eindeutig definiert – diese Freiheit können wir benutzen, um (102) zu lösen. Man gehe zurück zu (100) und setze $\phi = \Phi$, $\psi = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, dann bekommen wir analog zu (102) mit der gleichen Rechnung wie in (101) :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \int_S da' \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right]. \quad (106)$$

Man nutze nun die Freiheit (104) für die verschiedenen Randbedingungen :

- **Dirichlet-RB** $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ für \mathbf{r}' auf S , dann ist die Lösung

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_S da' \left[\Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right]. \quad (107)$$

- **Neumann-RB** Die Forderung $\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ auf S ist nicht möglich, denn nach Integration von (103) über V und der Benutzung des Gaußschen Satzes folgt

$$\begin{aligned} \int_S da' \frac{\partial}{\partial n'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \int_S da' [\nabla G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \mathbf{n} \\ &= \int_V dV \operatorname{div} [\nabla G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = -4\pi \int_V dV \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi. \end{aligned}$$

Stattdessen fordere man, dass für alle \mathbf{r}' auf S

$$\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{4\pi}{S} \quad (108)$$

gilt. Dann ist der letzte Term von (106) gleich dem Mittelwert des Potentials auf S ,

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S da' \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{S} \int_S da' \Phi(\mathbf{r}') = \langle \Phi \rangle_S.$$

Die entsprechende Lösung des elektrostatischen Problems ist dann

$$\Phi(\mathbf{r}) = \langle \Phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \int_S da' \left[G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right]. \quad (109)$$

Allgemeine Bemerkungen:

- $G_{D,N}$ hängen nicht von der exakten Form der RBs ab, sondern nur von der Form von S
- F ist eine Lösung der Laplace-Gleichung im ladungsfreien V , die durch eine externe Ladungsverteilung ρ' ausserhalb von V induziert wird. ρ' ist so gewählt, dass mit einer (Einheits)Punktladung bei \mathbf{r}' die Randbedingungen Null sind.

Beispiel: Feld einer Kugel mit vorgegebenem Potential $V(a, \theta, \varphi)$ für $r > a$. Ausgangspunkt ist die Formel (107). Man finde zuerst eine passende Greensfunktion. Zurück zum Beispiel 2 aus Abschnitt 2.3.1, s. Abbildung 7. Die Bildladung ist mit ρ' zu identifizieren, denn sie macht das Potential auf der Kugel = 0. Die Lösung war

$$\Phi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_0|} + \frac{q_B}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_B|} \right)$$

mit $q_B = -aq_0/r_0$ und $r_B = a^2/r_0$. Man setze nun $q_0 = 4\pi\epsilon_0$ (Einheitsladung) und benenne die Variablen um: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}'$, dann bekommen wir die Greensche Funktion

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a}{r' \left| \mathbf{r} - \frac{a^2}{r'^2} \mathbf{r}' \right|}, \quad (110)$$

die automatisch die Dirichlet-RB $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ für $r' = a$ erfüllt. Jetzt sind wir in der Geometrie von Abbildung 9 rechts. Kugelkoordinaten schreibt sich (110)

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2 r'^2/a^2 + a^2 - 2rr' \cos \gamma)^{1/2}}. \quad (111)$$

In der Formel (107) brauchen wir die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial n'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\partial}{\partial r'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{r' \rightarrow a} = -\frac{r^2 - a^2}{a(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}}, \quad (112)$$

das negative Vorzeichen deshalb, weil das uns interessierende V außerhalb der Kugel liegt. Damit ist die Normale in Richtung des Koordinatenursprungs gerichtet. Die Lösung des Problems ist also:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Phi(a, \theta', \varphi') \frac{r^2 - a^2}{a(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}}. \quad (113)$$

2.4 Elektrostatik in dichten Medien

Bisher hatten wir es mit Feldern im Vakuum zu tun, in dem es keine charakteristische Längenskala gab. In dichten Medien gibt es eine solche Größe – die typischen Abmessungen der Moleküle a_0 . Da Moleküle meistens polarisierbar sind, gibt es einen Grund zur Annahme, dass die mikroskopischen Felder \mathbf{e} , die auf der Skala $\approx a_0$ gemessen werden, und die makroskopischen \mathbf{E} (gemessen auf den Skalen $\gg a_0$) unterschiedlich sind. Im Allgemeinen ist \mathbf{E} durch Mittelung über makroskopisch große Bereiche des Mediums $\Delta V \gg a_0^3$ zu berechnen,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{e} \rangle(\mathbf{r}) = \int_{\Delta V} dV' \mathbf{e}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (114)$$

Die zweite Maxwell-Gleichung der Elektrostatik bleibt nach der Mittelung unverändert, da sie keine Ladungsdichten enthält,

$$\nabla \times \mathbf{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (115)$$

Die zweite Gleichung ist unterschiedlich für *Leiter*, in denen es freie ungebundene Ladungsträger gibt, und *Dielektrika*, wo es keinen elektrischen Strom geben kann.

2.4.1 Leiter

In Leitern ist überall $\mathbf{E} = 0$, sonst gäbe es Ströme und Energiedissipation \Rightarrow alle freie Ladungen befinden sich auf den Oberflächen. Man erinnere sich, dass aus (115) folgt, dass an den Oberflächen die Tangentialkomponente von \mathbf{E} stetig ist, s. (54). Da das Feld im Leiter verschwindet, gilt

$$E_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = \text{const} \quad (116)$$

überall auf der Leiteroberfläche. Mittelung der anderen Maxwell-Gleichung liefert

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}. \quad (117)$$

Aus (53) folgt für die normale Komponente

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \sigma = \epsilon_0 E_n = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad (118)$$

wobei σ die (gemittelte) Flächenladungsdichte ist.

2.4.2 Dielektrika

In den Dielektrika dürfen keine Ströme fließen. Das elektrische Feld setzt sich zusammen aus einem Beitrag der freien (von außen eingebrachten) Ladungen mit der Dichte $\rho_f(\mathbf{r})$ und dem Feld polarisierter Moleküle. Dieses wird durch Multipolmomente charakterisiert. Da wir makroskopische Felder (auf den Skalen $\gg a_0$) ausrechnen möchten, müssen wir nur das Dipolmoment mitnehmen (wir setzen voraus, dass die Moleküle ladungsneutral sind). Das Feld am Ort \mathbf{r} , welches durch den Inhalt eines kleinen Volumens mit dem Zentrum am \mathbf{r}' induziert wird, ist gegeben durch

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\rho_f(\mathbf{r}') \Delta V}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Delta V \right), \quad (119)$$

wobei $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ das *gemittelte* [nach der Vorschrift (114)] Dipolmoment pro Volumeneinheit des Dielektrikums ist. Im zweiten Term haben wir von der Formel (44) Gebrauch gemacht. Summiert man nun über das gesamte Medium, so bekommt man im Grenzfall $\Delta V \rightarrow dV$ ein Integral

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \left(\frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\rho_f(\mathbf{r}') - \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')], \end{aligned} \quad (120)$$

wobei man die letzte Zeile nach partieller Integration erhält. Dies ist nun nichts anderes als das Potential der Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}).$$

Definiert man die *dielektrische Verschiebung*

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (121)$$

so bekommen wir die Verallgemeinerung von (27):

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{D} = \rho_f. \quad (122)$$

Um elektrostatische Probleme lösen zu können, braucht man auch eine Relation zwischen \mathbf{P} und \mathbf{E} oder \mathbf{D} und \mathbf{E} . Wenn die Moleküle unabhängig voneinander sind (oder nur schwach wechselwirkend) und das Feld \mathbf{E} viel schwächer ist als das Feld innerhalb der Moleküle, dann ist es zu erwarten, dass

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (123)$$

mit der *elektrischen Suszeptibilität* χ_e als Proportionalitätskonstante¹. In starken Feldern ist eine nichtlineare Polarisierbarkeit möglich, wenn

$$P_i = \sum_{ij} \gamma_{ij} E_j + \sum_{ijk} \Gamma_{ijk} E_j E_k + \dots \quad (124)$$

(123) ist demnach die Situation wenn der *Polarisationstensor* γ_{ij} nur diagonale Einträge besitzt, die alle gleich χ_e sind – dies ist der Fall eines *isotropen* Dielektrikums. Andere γ_{ij} beschreiben *anisotrope* Dielektrika. Der Zusammenhang

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (125)$$

mit der (relativen) *Dielektrizitätskonstante* $\epsilon = (1 + \chi_e)$ vervollständigt das Gleichungssystem der Elektrostatik in Dielektrika.

Elektrostatische potentielle Energie W im Dielektrikum kann man auf die gleiche Weise herleiten wie im Abschnitt 2.1.4 beschrieben. W ist die Energie, die man aufwenden muss, um infinitesimale Ladungen $\delta\rho$ aus dem Unendlichen zu einer makroskopischen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ zusammensetzen,

$$\delta W = \int dV \delta\rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}). \quad (126)$$

Im Gegensatz zur Elektrostatik im Vakuum muss man in Anwesenheit des Dielektrikums dieses noch polarisieren \Rightarrow man muss mehr Energie aufwenden \Rightarrow im Dielektrikum wird mehr Energie gespeichert. Man benutze nun (122) : $\delta\rho = \text{div}(\delta\mathbf{D})$ und führe eine partielle Integration durch:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int dV \text{div}(\delta\mathbf{D}) \Phi(\mathbf{r}) = \int dV [\nabla \cdot (\delta\mathbf{D})] \Phi(\mathbf{r}) \\ &= - \int dV (\delta\mathbf{D}) \cdot [\nabla\Phi(\mathbf{r})] = \int dV (\delta\mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (127)$$

Für *lineare isotrope* Medien, für die (125) gilt, bekommen wir

$$(\delta\mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon (\delta\mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \delta E^2 = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}).$$

Deswegen liefert eine Aufintegration von einem kleinen $\mathbf{D} = 0$ bis zur Endkonfiguration \mathbf{D} eine Verallgemeinerung von (39):

$$W = \frac{1}{2} \int dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad (128)$$

¹Allgemein existieren Materialien mit endlicher Polarisierung in Abwesenheit jeglicher äußerer Felder. Wir werden solche Medien jedoch nicht betrachten.

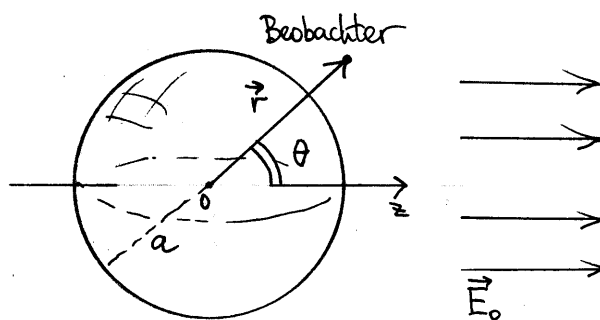


Abbildung 10:

mit einer modifizierten Energiedichte

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (129)$$

Die Randbedingungen an den Oberflächen ändern sich ebenfalls nur geringfügig:

- (115) gilt nach wie vor \Rightarrow die Tangentialkomponente E_t von \mathbf{E} ist stetig. Andere Schreibweise:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0. \quad (130)$$

- (122) ersetzt (27) \Rightarrow die Grenzbedingung gilt mit der Ersetzung $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{D}$, aus (53) folgt (Achtung: kein ϵ_0 auf der rechten Seite!)

$$D_{n,\text{oben}} - D_{n,\text{unten}} = \sigma \quad \text{oder} \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma. \quad (131)$$

Beispiel: eine homogene dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld, s. Abbildung 10. Man finde das Potential. Die Dielektrizitätskonstante des Kugelmateriale sei ϵ und die Stärke des äußeren Feldes E_0 . Keine freien Ladungen – man löse die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten. Passende Methode: Trennung der Variablen + Randbedingungen an der Kugeloberfläche. Azimutale Symmetrie! \Rightarrow man benutze den Ansatz (84):

$$\Phi_i = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad \text{im Inneren der Kugel}, \quad (132)$$

$$\Phi_a = \sum_{l=0}^{\infty} \left(c_l r^l + \frac{C_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad \text{im Außenraum}. \quad (133)$$

Aus der Randbedingung im Unendlichen folgt

$$E(r \rightarrow \infty) = -\frac{\partial \Phi_a}{\partial z} \Big|_{r \rightarrow \infty} = E_0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_a(r \rightarrow \infty) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta.$$

Andererseits folgt aus (133)

$$\Phi_a = c_0 + C_0/r + (c_1 r + C_1/r^2) \cos \theta + (c_2 r^2 + C_2/r^3) \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

$\Rightarrow c_1 = -E_0$ und alle anderen $c_l = 0$. E_t muss ausserhalb und innerhalb der Kugel gleich sein. Die Normale zur Kugeloberfläche in Kugelkoordinaten: $(1, 0, 0) \Rightarrow E_t$ sind E_θ und E_φ . $E_\varphi = 0$ wegen der Symmetrie.

(130) und (131) führen nun auf die Grenzbedingungen in Kugelkoordinaten:

$$-\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \Big|_{r=a}, \quad -\epsilon \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \Phi_a}{\partial r} \Big|_{r=a}. \quad (134)$$

Dadurch dass die Ableitungen der Legendre-Polynome orthogonal sind², folgt aus der ersten Bedingung:

$$C_0 = 0, \quad A_1 = c_1 + \frac{C_1}{a^3} = -E_0 + \frac{C_1}{a^3} \quad \text{und} \quad A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad \text{für } l \neq 1. \quad (135)$$

Aus der 2. Randbedingung folgen

$$\epsilon A_1 = c_1 - \frac{2C_1}{a^3} \quad \text{und} \quad \epsilon l A_l = -(l+1) \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad \text{für } l \neq 1. \quad (136)$$

Die Gleichungen für $l \neq 1$ können nur erfüllt werden falls $C_l = A_l = 0$ sind. Für die verbleibenden Koeffizienten folgt also

$$A_1 = -\frac{3}{\epsilon+2} E_0, \quad C_1 = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} a^3 E_0. \quad (137)$$

Dies führt auf folgendes Ergebnis für die Potentiale:

$$\Phi_i = -E_0 r \cos \theta \frac{3}{\epsilon+2} = -E_0 z \frac{3}{\epsilon+2}, \quad \Phi_a = -E_0 r \cos \theta + E_0 \cos \theta \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \frac{a^3}{r^2}. \quad (138)$$

Das Feld innerhalb der Kugel ist homogen, konstant und entlang der z -Achse gerichtet mit der Stärke

$$\mathbf{E} = E_z = \frac{3}{\epsilon+2} E_0 < E_0 \quad \text{für } \epsilon > 1. \quad (139)$$

Außerhalb der Kugel ist der E_0 -Beitrag ergänzt durch

$$\Delta \Phi = \text{const} \frac{a^3 \cos \theta}{r^2} = \text{const} \frac{a^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (140)$$

was das Potential eines entlang der positiven z -Achse orientierten Dipols [s. auch (44)] mit dem Dipolmoment

$$\mathbf{p} = p_z = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} E_0 a^3 \quad (141)$$

ist. Die Polarisation der Kugel ist homogen und überall konstant [man benutze dazu (139) und (125)]:

$$\mathbf{P} = (\epsilon-1) \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon-1) \frac{3}{\epsilon+2} \epsilon_0 E_0. \quad (142)$$

Das Dipolmoment ist dann das Volumenintegral darüber

$$\mathbf{p} = (\epsilon-1) \frac{3}{\epsilon+2} \epsilon_0 E_0 \frac{4\pi}{3} a^3. \quad (143)$$

Wie erwartet stimmt dieses Ergebnis mit (141) überein.

²Sie entsprechen den zugeordneten Polynomen mit $m = 1$, welche zu verschiedenen l und l' orthogonal sind, s. (88).

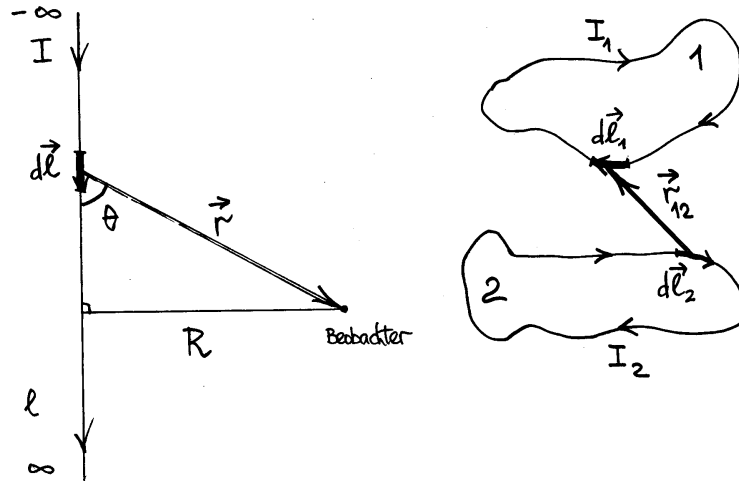


Abbildung 11:

2.5 Magnetostatik

2.5.1 Das Biot-Savartsche Gesetz

Der experimentelle Nachweis für die Stärke des magnetischen Feldes B ist das mechanische Drehmoment \mathbf{N} , das auf ein Magnet mit dem magnetischen Moment \mathbf{m} wirkt

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (144)$$

wobei \mathbf{B} Vektor der magnetischen Induktion genannt wird. Es stellt sich heraus, dass \mathbf{B} durch elektrische Ströme induziert werden kann. Biot und Savart haben diesen Zusammenhang quantifiziert. Ein infinitesimales orientiertes Stück eines elektrischen Leiters $d\mathbf{l}$, welches den Strom I trägt, erzeugt am Punkt \mathbf{r} ein Magnetfeld der Stärke

$$d\mathbf{B} = k I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (145)$$

mit $k = \mu_0/4\pi$. Wenn man nur eine einzelne Ladung q betrachtet, die sich mit Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, dann gilt

$$I d\mathbf{l} = \frac{dQ}{dt} d\mathbf{l} = \frac{dQ}{dt} \mathbf{v} dt = q \mathbf{v}.$$

Mit Hilfe von (22) folgt

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \Rightarrow \mathbf{B} = 4\pi\epsilon_0 k \mathbf{v} \times \mathbf{E} = \mu_0\epsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (146)$$

Für einen unendlich langen geraden Draht, in dem der Strom I fließt, kann das Magnetfeld wie folgt ausgerechnet werden [s. Abbildung 11 links],

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= kI \oint \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow B = kI \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl r \sin\theta}{r^3} \\ &= kI \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{R}{(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{kI}{R} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{2kI}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \end{aligned} \quad (147)$$

wobei das letzte auftauchende Integral nur einer dimensionslosen Zahl entspricht³, denn die neue Variable ist $x = l/R$. Dies ist das Biot-Savart-Gesetz. Die 3. experimentell gewonnene Erkenntnis

³Man substituiere $x = \operatorname{sh}y$. Da $\operatorname{ch}^2y - \operatorname{sh}^2y = 1$ vereinfacht sich das Integral zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\operatorname{ch}^2y} = \operatorname{th}y \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2.$$

ist die Existenz einer Kraft, die im endlichen Magnetfeld auf einen Stromträger wirkt. Für ein infinitesimales Stück $d\mathbf{l}$ ist sie gegeben durch:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (148)$$

In den Experimenten von Ampère wurde die Kraft untersucht, die auf eine Stromschleife 1 im Magnetfeld einer anderen Stromschleife 2 wirkt, s. Abbildung 11 rechts. Mit Hilfe von (145) und (148) folgt dann für die volle Kraft:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}. \quad (149)$$

Man benutze hier Formel (9):

$$d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{12}) = d\mathbf{l}_2 (d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_{12}) - \mathbf{r}_{12} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)$$

Ausserdem gilt aufgrund von Theorem 3:

$$\frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} = -d\mathbf{l}_1 \cdot \nabla \frac{1}{r_{12}} \Rightarrow \oint_1 \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} = - \oint_1 d\mathbf{l}_1 \cdot \nabla \frac{1}{r_{12}} = 0$$

Damit vereinfacht sich die Formel (149) zum *Ampèreschen Gesetz*:

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}. \quad (150)$$

Auf zwei parallel im Abstand R zueinander angeordnete Drähte, die Ströme $I_{1,2}$ tragen, wirkt pro Längeneinheit eine Kraft

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R}. \quad (151)$$

Diese Kraft ist anziehend/abstoßend wenn die Ströme in gleiche/entgegengesetzte Richtungen fließen.

Verallgemeinerung auf „nichtdünne“ Ströme mit Stromdichten $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. Der Strom durch eine infinitesimale Fläche da mit der Normalen \mathbf{n} ist gleich $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$. Damit ist der Gesamtstrom aus einem Volumen V mit Oberfläche S ist gleich der zeitlichen Änderung der Gesamtladung Q innerhalb von V :

$$I = \int_S da \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V dV \rho(\mathbf{r}). \quad (152)$$

Andererseits gilt für die linke Seite nach dem Gausschen Theorem (15)

$$\int_S da \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \int_V dV \operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (153)$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt die *Kontinuitätsgleichung* für den Ladungstransport [s. auch (16)],

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (154)$$

die die Ladungserhaltung ausdrückt.

Die Gesamtkraft, die auf das Volumen V wirkt, bestimmt man durch Aufintegrieren von (148), s. Abbildung 12 a). Dabei ist $I d\mathbf{l} = \mathbf{J} da dl$ und $da dl = dV$. Deswegen folgt

$$\mathbf{F} = \int_V dV \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (155)$$

Das Drehmoment ist ein Vektorprodukt von \mathbf{r} und der Kraft, deswegen erhalten wir eine modifizierte Formel (144):

$$\mathbf{N} = \int_V dV \mathbf{r} \times [\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]. \quad (156)$$

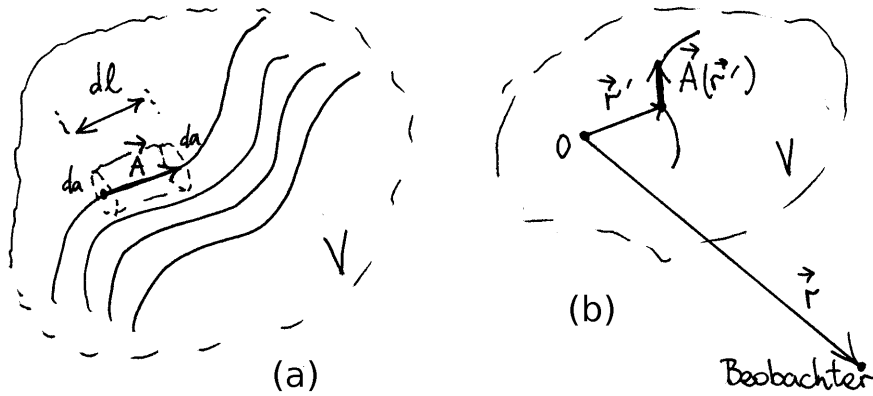


Abbildung 12:

2.5.2 Differentialgleichungen der Magnetostatik. Vektorpotential.

Die Formel (145) kann in der Sprache der Stromdichten wie oben umgeschrieben werden:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (157)$$

Dies ist dem Coulomb-Gesetz in der Form (24) sehr ähnlich und ist genauso unpraktisch. Deswegen versuchen wir wie im Abschnitt 2.1.2 die äquivalenten Differentialgleichungen herzuleiten. Wir formen zunächst die obere Formel mit Hilfe der Eigenschaft (28) um⁴:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (158)$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass der Gradient auf die ungestrichelten Koordinaten wirkt. Das Magnetfeld ist demnach die Rotation eines anderen Vektorfeldes \Rightarrow laut Theorem 2 haben wir dann die erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (159)$$

Die Integralform dieser Gleichung erhält man indem man sie über das ganze Volumen V integriert und den Gausschen Satz anwendet:

$$\int_V dV \text{div } \mathbf{B} = \int_S da \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (160)$$

d. h. der Gesamtfluss der magnetischen Induktion aus einer geschlossenen Fläche ist Null. Dies drückt die Quellenfreiheit des Magnetfeldes aus und ist das Analogon zur Gleichung (31) der Elektrostatik.

⁴Hier benutzen wir die Identität

$$\nabla \times (\psi \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \times \nabla \psi + (\psi \nabla) \times \mathbf{a}.$$

Sie kann durch explizites Nachrechnen bewiesen werden. In Komponenten ausgeschrieben gilt

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{a}\psi) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x\psi & a_y\psi & a_z\psi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_z\partial_y\psi + \psi\partial_y a_z - \psi\partial_z a_y - a_y\partial_z\psi \\ a_x\partial_z\psi + \psi\partial_z a_x - \psi\partial_x a_z - a_z\partial_x\psi \\ \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi(\partial_y a_z - \partial_z a_y) + a_z\partial_y\psi - a_y\partial_z\psi \\ \psi(\partial_z a_x - \partial_x a_z) + \psi\partial_z a_x - a_z\partial_x\psi \\ \dots \end{pmatrix} = \psi \text{rota} - \mathbf{a} \times \nabla \psi. \end{aligned}$$

Für die Herleitung von (158) setzen wir $\psi = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ und $\mathbf{a} = \mathbf{J}$. Da die Stromdichte nicht von \mathbf{r} abhängt verschwindet der erste Term.

Nun berechnen wir die Rotation von \mathbf{B} mit Hilfe von (158),

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.\end{aligned}\quad (161)$$

Hier haben wir von der Formel

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (162)$$

die aus (9) folgt, Gebrauch gemacht. Jetzt benutzen wir die Eigenschaft (35) und dass

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (163)$$

gilt. Dann modifiziert sich (161) zu

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (164)$$

Nach einer partiellen Integration im ersten Term folgt

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int dV' \frac{\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (165)$$

Im stationären Fall ist $\partial\rho/\partial t = 0$ und deswegen laut Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, deswegen bekommt man

$$\nabla \times \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (166)$$

Dies ist die zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik und entspricht der Gleichung (27) der Elektrostatik. Diese Gleichung kann man auch in Integralform hinschreiben. Man multipliziere beide Seiten mit dem Normalenvektor \mathbf{n} und integriere über die Fläche S , s. Abbildung 13 (b):

$$\int_S da (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} = \mu_0 \int_S da \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}. \quad (167)$$

Mit Hilfe des Satzes von Stokes (20) kann man die rechte Seite auf folgende Weise umformen

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \int_S da \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}, \quad (168)$$

wobei Γ den (geschlossenen) Rand der Fläche S bezeichnet. Außerdem ist das Integral auf der rechten Seite gleich dem Gesamtstrom I durch die Fläche S ,

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 I. \quad (169)$$

Stromfreier Raum. Hier sind die Maxwell-Gleichungen gegeben durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Genauso wie in der Elektrostatik folgt aus der ersten Gleichung, dass das Magnetfeld Gradient eines *magnetischen Potentials* Φ_M ist

$$\mathbf{B} = -\nabla \Phi_M \Rightarrow \nabla^2 \Phi_M = 0, \quad (170)$$

d. h. man ist wie in der Elektrostatik mit einer Laplace-Gleichung konfrontiert. Deswegen können wir alle bisher entwickelten Methoden anwenden. Aber Vorsicht: **andere Randbedingungen!** Sie werden später behandelt.

Das Vektorpotential. Aus (159) folgt mit Hilfe des Theorems 2, dass ein Vektorfeld \mathbf{A} existiert, so dass

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (171)$$

Dies haben wir bereits in der Gleichung (158) gesehen. Das *Vektorpotential* \mathbf{A} kann deswegen direkt angegeben werden als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla\psi(\mathbf{r}), \quad (172)$$

wobei $\psi(\mathbf{r})$ eine frei wählbare Funktion ist. Das ist möglich, weil $\nabla\psi$ laut Vorschrift (171) das Magnetfeld nicht beeinflussen kann, da die Identität $\text{rot } \nabla\psi = 0$, s. Abschnitt 1.2.2 gilt. Die Transformation

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi \quad (173)$$

nennt sich *Eichtransformation*⁵. Das Vektorpotential ist durch (171) nicht eindeutig definiert, da man im Allgemeinen zur eindeutigen Festlegung eines Vektorfeldes sowohl rot als auch div anzugeben braucht. Deswegen ist $\text{div } \mathbf{A}$ frei wählbar und wird durch *Eichung* festgelegt. Sehr nützlich ist die *Coulomb-Eichung*:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (174)$$

Setzen wir nun (171) in die Gleichung (166) ein, dann erhalten wir mit Hilfe von (162) und der Coulomb-Eichung

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \nabla(\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (175)$$

Diese Gleichung ist der Poisson-Gleichung der Elektrostatik (33) sehr ähnlich. Die Lösung wird demnach auch der aus (30) analog sein. In der Tat folgt aufgrund der Eigenschaft (35), dass (172) mit $\psi = \text{const}$ die gesuchte Lösung ist.⁶

2.5.3 Lokalisierte Stromverteilung. Magnetisches Moment.

Wir analysieren eine Fragestellung, die analog der aus dem Abschnitt 2.2.1 ist [s. die Entwicklung (50)]: Man hat eine lokalisierte Stromverteilung im V , s. Abbildung 12 b), was ist das Vektorpotential weit weg von V ? Es gilt die Entwicklung

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots$$

Deswegen kann das Vektorpotential geschrieben werden als

$$A_{i=x,y,z}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \int dV' J_{i=x,y,z}(\mathbf{r}') + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int dV' \mathbf{r}' J_{i=x,y,z}(\mathbf{r}') + \dots \right]. \quad (177)$$

Für eine weitere Vereinfachung ist folgende Formel sehr nützlich:

$$\int dV' (f \mathbf{J} \cdot \nabla' g + g \mathbf{J} \cdot \nabla' f) = 0, \quad (178)$$

⁵Eine ähnliche Situation haben wir bereits beim Diskutieren des elektrostatischen Potentials gehabt. Es ist nämlich bis auf eine Konstante definiert.

⁶Warum ist $\psi = \text{const}$? Man rechne div von (172) unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung aus:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla^2 \psi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla^2 \psi \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla^2 \psi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla^2 \psi = \nabla^2 \psi. \end{aligned} \quad (176)$$

Man beachte auch die partielle Integration im vorletzten Schritt. Also gilt der Coulomb-Eichung $\nabla^2 \psi = 0$. Da es aber keine Quellen gibt, ist die Lösung dieser Gleichung eine Konstante.

wobei f, g beliebige (stetig differenzierbare) skalare Felder bezeichnen. Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes:

$$\int_V dV' \operatorname{div}(f g \mathbf{J}) = \int_S da' g f \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (179)$$

da die Stromdichte im Unendlichen verschwindet. Andererseits gilt

$$\operatorname{div}(f g \mathbf{J}) = (g f) \operatorname{div} \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \nabla'(f g) = \mathbf{J} \cdot \nabla'(f g) = f (\mathbf{J} \cdot \nabla' g) + g (\mathbf{J} \cdot \nabla' f), \quad (180)$$

wobei wir wieder ausgenutzt haben, dass für statische Probleme $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ ist. Aus der letzten Identität folgt (178). Nun setzen wir $f = 1$ und $g = x', y', z'$, dann folgt aus (178), dass

$$\int dV' J_{i=x,y,z} = 0. \quad (181)$$

Aus diesem Grund verschwindet der erste Term in (177). Nun wählen wir $f = x'_i$ und $g = x'_j$ ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$), dann erhält man

$$\int dV' (x'_i J_j + x'_j J_i) = 0. \quad (182)$$

Hieraus folgt für den zweiten Term in (177):

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \int dV' \mathbf{r}' J_i &= \sum_j x_j \int dV' x'_j J_i \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j x_j \int dV' (x'_i J_j - x'_j J_i) = -\frac{1}{2} \left[\mathbf{r} \times \int dV' (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \right]_i, \end{aligned} \quad (183)$$

wobei die letzte Identität durch explizites Nachrechnen leicht zu verifizieren ist⁷. Man definiere nun die Dichte des magnetischen Moments

$$\vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r})], \quad (185)$$

dann ist das magnetische Moment der Stromverteilung gegeben durch

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int dV' [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')]. \quad (186)$$

Damit ergibt sich für den 2. Term in der Gleichung (177)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (187)$$

⁷Man schaut sich den Term $\sum_j x_j (x'_i J_j - x'_j J_i)$ genauer an. Für $i = x$ haben wir

$$x(x' J_{x'} - x' J_{x'}) + y(x' J_{y'} - y' J_{x'}) + z(x' J_{z'} - z' J_{x'}),$$

wobei der erste Term natürlich verschwindet. Weiterhin gilt für $i = y$

$$x(y' J_{x'} - x' J_{y'}) + y(y' J_{y'} - y' J_{y'}) + z(y' J_{z'} - z' J_{y'}).$$

Hier wiederum verschwindet der zweite Term. Analog kann man den Term für $i = z$ aufstellen. Sie können als eine Determinante dargestellt werden:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ (y' J_{z'} - z' J_{y'}) & (z' J_{x'} - x' J_{z'}) & (x' J_{y'} - y' J_{x'}) \end{vmatrix}. \quad (184)$$

In der letzten Zeile erkennt man die Komponenten des Vektorprodukts $\mathbf{r}' \times \mathbf{J}$. Daraus folgt in der Tat die letzte Identität in (183). Alternativ können wir die letzte Zeile von (183) (ohne Integrationen) auf folgende Weise darstellen

$$[\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}) - \mathbf{J}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')]_i = [\mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{J})]_i.$$

Mit Hilfe von (9) ist leicht zu sehen, dass es tatsächlich eine Identität ist.

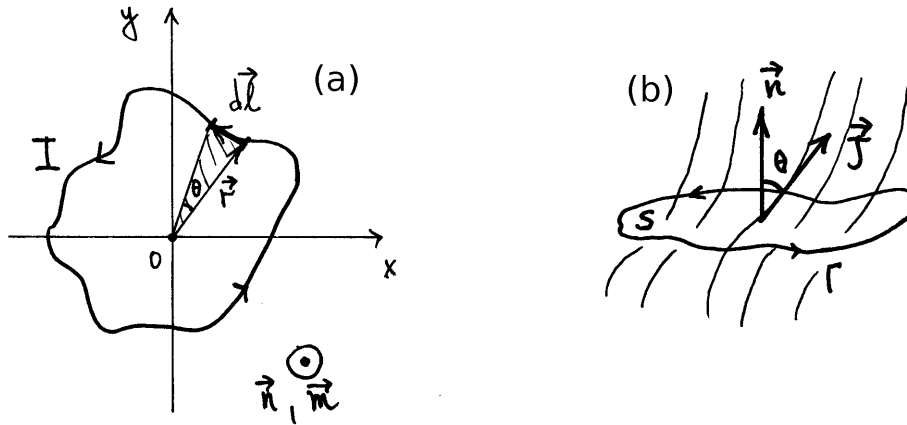


Abbildung 13:

Um nun das Magnetfeld mit Hilfe der Vorschrift (171) ausrechnen zu können, brauchen wir zwei Identitäten⁸:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}), \quad (188)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}\psi) = \psi \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla \psi. \quad (189)$$

Dann gilt für das Magnetfeld

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\mathbf{m} \times \mathbf{r} \frac{1}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \operatorname{rot}(\mathbf{m} \times \mathbf{r}) - (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \times \nabla \frac{1}{r^3} \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} [(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{r} + \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{m})] - (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \times \nabla \frac{1}{r^3} \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} [-(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{r} + \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{r})] + (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \times \frac{3\mathbf{r}}{r^5} \right\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{2\mathbf{m}}{r^3} - \frac{3}{r^5} \mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m} r^2}{r^5}. \end{aligned} \quad (190)$$

Dieses Ergebnis ähnelt sich sehr dem elektrischen Feld eines Dipols, wenn wir es mit Hilfe des zweiten Terms aus (50) ausrechnen würden. Genauso wie in der Elektrostatik wird das Magnetfeld weit weg von der Stromverteilung durch diesen Term dominiert.

Man betrachte nun eine beliebige flache Schleife, die den Strom I trägt. Dann berechnet sich das magnetische Moment auf folgende Weise

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int dV' \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l} = I S \mathbf{n}, \quad (191)$$

wobei S der Flächeninhalt der Schleife ist und \mathbf{n} den Normalenvektor zur Fläche S bezeichnet. Hier haben wir ausgenutzt, dass $|\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}|/2$ die Fläche eines infinitesimalen Dreiecks ist, s. Abbildung 13 (a).

Beispiel: N Punktladungen q_i bewegen sich mit Geschwindigkeiten \mathbf{v}_i . Dann gilt für die Stromdichte

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i). \quad (192)$$

⁸Die erste Identität wurde in der Lösung der Aufgabe P1 v) in den Präsenzübungen hergeleitet. Für die zweite Identität s. Fußnote bei der Herleitung von (158).

Eingesetzt in (191) liefert sie

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \mathbf{l}_i, \quad (193)$$

wobei \mathbf{l}_i der Bahndrehimpuls der i -ten Punktladung ist. Sind alle Punktladungen gleich, so bekommt man eine einfache Relation

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m} \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i, \quad (194)$$

zwischen dem magnetischen Moment und dem Bahndrehimpuls \mathbf{L} . Die Proportionalitätskonstante $q/(2m)$ ist das *gyromagnetische Verhältnis*. Es gilt auch für den Bahndrehimpuls der Elektronen in Atomen, jedoch nicht für den Spin. Da gilt $\mathbf{m} = (e/m)\mathbf{S}$ wegen der relativistischen Quanteneffekte.

Nun möchten wir die Kraft ausrechnen, die auf eine (kleine) Stromschleife, die sich bei $\mathbf{r} = 0$ befindet, in einem schwach inhomogenen Magnetfeld wirkt. Dann kann das Feld entwickelt werden

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla' \mathbf{B}(\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}'=0} + \dots \quad (195)$$

Aufgrund von (155) erhält man

$$\mathbf{F} = \int dV \{ \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(0) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times [(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}(0)] + \dots \}. \quad (196)$$

Wegen der Eigenschaft (181) verschwindet der erste Term \Rightarrow in einem homogenen Magnetfeld verschwindet die Kraft, die auf eine lokalisierte Stromverteilung wirkt. Der zweite Term ohne Integration kann auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times [(\mathbf{r} \cdot \nabla') \mathbf{B}(\mathbf{r}')] &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ J_x & J_y & J_z \\ (\mathbf{r} \cdot \nabla') B_x & (\mathbf{r} \cdot \nabla') B_y & (\mathbf{r} \cdot \nabla') B_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x [J_y (\mathbf{r} \cdot \nabla') B_z - J_z (\mathbf{r} \cdot \nabla') B_y] + \mathbf{e}_y [J_z (\mathbf{r} \cdot \nabla') B_x - J_x (\mathbf{r} \cdot \nabla') B_z] + \dots \end{aligned} \quad (197)$$

Der generische Term dieser Entwicklung ist gegeben durch $J_i(\mathbf{r} \cdot \nabla') B_j$. Mit Hilfe der Relation (183) und der Substitution $\nabla' B_j \rightarrow \mathbf{r}$, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ erhalten wir

$$J_i(\mathbf{r} \cdot \nabla') B_j = -\frac{1}{2} [(\nabla' B_j) \times (\mathbf{r} \times \mathbf{J})]_i = -[(\nabla' B_j) \times \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r})]_i = [\vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}) \times \nabla']_i B_j. \quad (198)$$

Dieses Ergebnis setzen wir in (197) und (196) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_V dV \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times [(\mathbf{r} \cdot \nabla') \mathbf{B}(\mathbf{r}')] \Big|_{\mathbf{r}'=0} = \int_V dV [\vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}) \times \nabla'] \times \mathbf{B}(0) \\ &= (\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B}(0) = -\mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{m}) = \nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{m}). \end{aligned} \quad (199)$$

Hier haben wir die Maxwell-Gleichung (159) benutzt. Im Allgemeinen ist die Kraft gleich dem negativen Gradient der potentiellen Energie Π , deswegen gilt

$$\mathbf{F} = -\nabla \Pi = -\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{m}). \quad (200)$$

Der magnetische Dipol wird also versuchen, sich parallel zum Magnetfeld einzustellen um seine Energie zu minimieren.

Das mechanische Drehmoment berechnet sich mit Hilfe der Relation (156). Dabei trägt bereits der erste Term aus der Entwicklung (195) bei,

$$\mathbf{N} = \int dV \mathbf{r} \times [\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(0)] = \int dV \{ \mathbf{J}(\mathbf{r})[\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(0)] - \mathbf{B}(0)[\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})] \}. \quad (201)$$

Nun benutzen wir die Identität (178) für $f = g = r$,

$$2 \int dV r (\mathbf{J} \cdot \nabla r) = 2 \int dV r \left(\mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 2 \int dV (\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}) = 0.$$

Deswegen verschwindet der letzte Term in (201). Mit Hilfe der Identität (183), in der wir \mathbf{r} durch \mathbf{B} und \mathbf{r}' durch \mathbf{r} ersetzen, erhalten wir

$$\mathbf{N} = -\frac{1}{2} \mathbf{B}(0) \times \int dV [\mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r})] = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(0). \quad (202)$$

Hier erkennt man die Formel (144) wieder.

2.5.4 Magnetostatik in dichten Medien. Grenzbedingungen.

Genauso wie bei der Behandlung der Elektrostatik in dichten Medien unterscheidet man auch in der Magnetostatik zwischen den mikro- und makroskopischen Feldern. Der Grund dafür sind die mikroskopischen Ströme und die dadurch induzierte mikroskopische magnetische Momente von Molekülen, die nach einer geeigneten Mittelungsprozedur zu makroskopischen Feldern führen, die sich von solchen im Vakuum unterscheiden. Die Mittelung der mikroskopischen Felder $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ erfolgt nach der Vorschrift (114) und führt auf das makroskopische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Ähnlich wie in (115) enthält (159) keine rechte Seite, weswegen die Mittelung auf folgende Gleichung führt,

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (203)$$

Damit bleibt das Konzept des Vektorpotentials $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ unverändert. Die Gleichung (166) ist komplizierter zu behandeln, denn sie enthält Ströme. Man nehme an das Medium habe eine mittlere Magnetisierungsdichte $\vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r})$. Dann ist das Vektorpotential $\Delta \mathbf{A}$, das am Ort \mathbf{r} durch ein makroskopisch großes Volumen ΔV mit Zentrum in \mathbf{r}' induziert wird, gegeben durch [vgl. mit (119)],

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}') \Delta V}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Delta V \right]. \quad (204)$$

Die Stromdichte \mathbf{J}_f beschreibt hier die makroskopischen (freien) Ströme. Nach dem Übergang zur Integration über das ganze Volumen erhält man

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \left[\frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right]. \quad (205)$$

Der Magnetisierungsanteil lässt sich auf folgende Weise umformen [man benutze die Relation (189)]:

$$\begin{aligned} \int dV' \frac{\vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= \int dV' \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \int dV' \left[\frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \operatorname{rot}' \left(\frac{\vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] \\ &= \int dV' \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int_S da' \frac{\mathbf{n}' \times \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int dV' \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (206)$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass das Oberflächenintegral verschwindet (die Magnetisierung ist null außerhalb von V)⁹. Damit ist das Vektorpotential gegeben durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}') + \nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (207)$$

⁹Außerdem haben wir hier von einer Folgerung aus dem Gaussschen Satz (15) Gebrauch gemacht, die lautet

$$\int_V dV \operatorname{rot} \mathbf{a} = \int_S da \mathbf{n} \times \mathbf{a}.$$

Diese Behauptung kann man für einzelne Komponenten beweisen, wenn man berücksichtigt dass z. B.

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b} = (0, a_z, -a_y)^T \quad \text{gilt.}$$

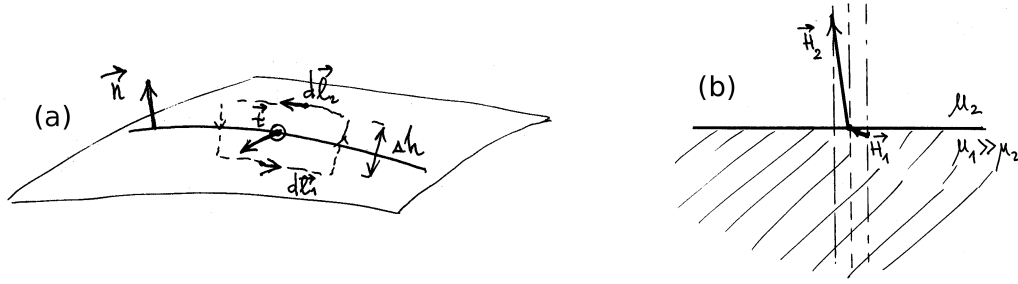


Abbildung 14:

Die endliche Magnetisierung entsteht durch „gebundene“ Ströme, die gleich der Rotation der Magnetisierung sind. Mit dieser Erkenntnis modifiziert sich die Gleichung (166) zu

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_f + \nabla \times \vec{\mathcal{M}}) . \quad (208)$$

Eine weitere Vereinfachung ist durch die Einführung des *magnetischen Feldes* \mathbf{H} erreicht,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \vec{\mathcal{M}} \Rightarrow \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_f . \quad (209)$$

Die Integralform dieser Gleichung (*das Ampèresche Durchflutungsgesetz*) kann ebenfalls aus (168) abgelesen werden:

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{H} = \int_S da \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{n} , \quad (210)$$

Ähnlich wie bereits bei der Herleitung von (123) argumentiert, ist zu erwarten, dass es Substanzen gibt, in denen die Magnetisierung proportional zum Magnetfeld ist,

$$\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu \mathbf{H} , \quad (211)$$

wobei χ_m die *magnetische Suszeptibilität* und μ die *relative Permeabilität* bezeichnet. Verschiedene Möglichkeiten:

- Diamagnetismus $\chi_m < 0$. Das Magnetfeld ist schwächer als im Vakuum. Substanzen ohne permanente magnetische Dipole .
- Paramagnetismus $\chi_m > 0$. Das Magnetfeld stärker als im Vakuum. Permanente magnetische Dipole existieren.

Ausnahmen zur Regel (211) zeichnen sich durch komplizierte Abhängigkeiten $\chi_m = \chi_m(T, H)$ aus. Typische Beispiele sind Ferromagnete, in denen $\vec{\mathcal{M}}$ als Funktion des Feldes eine Hysterese aufweist.

Grenzbedingungen: Die Gleichung $\text{div} \mathbf{B} = 0$ ist bei fehlender Oberflächenladung formal identisch zu (122). Deswegen können wir sofort folgern, dass die Normalkomponente von \mathbf{B} immer stetig bleibt:

$$B_{n1} = B_{n2} \Rightarrow \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} . \quad (212)$$

Um die Bedingung für die Tangentialkomponente herzuleiten, legen wir an die Oberfläche eine Stokessche Fläche, s. Abbildung 14 a). Dann erhalten wir

$$d\mathbf{l}_2 = -d\mathbf{l}_1 = \Delta l (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) , \quad (213)$$

weswegen die linke Seite von (210) für kleine Δh gegeben ist durch

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = \Delta l (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) + O(\Delta h) . \quad (214)$$

Für die rechte Seite ergibt sich

$$\int_S da \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{t}) \Delta l \Delta h = (\mathbf{J}_F \cdot \mathbf{t}) \Delta l, \quad (215)$$

wobei \mathbf{J}_F die Flächenstromdichte (Strom pro Längeneinheit auf der Grenzfläche) bezeichnet. Also erhalten wir

$$(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = (\mathbf{J}_F \cdot \mathbf{t}). \quad (216)$$

In Abwesenheit von Oberflächenströmen vereinfacht sich die Grenzbedingung zur simplen Stetigkeitsforderung an die Tangentialkomponente von \mathbf{H} :

$$H_{t1} = H_{t2}. \quad (217)$$

An der Grenze zwischen einem (Ferro)magneten mit μ_1 und einem Medium mit $\mu_2 \ll \mu_1$ haben wir laut (212) $H_{n1} = (\mu_2/\mu_1)H_{n2} \ll H_{n2}$ bei gleichen Tangentialkomponenten. Dies bedeutet, dass das Feld außerhalb des Magneten (fast) senkrecht zur Oberfläche gerichtet ist, s. Abbildung 14 b). In der Elektrostatik ist das \mathbf{E} -Feld stets senkrecht zur Oberfläche von Leitern \Rightarrow es gibt eine formale Ähnlichkeit zwischen den Leitern und (Ferro)magneten.

2.5.5 Randwertprobleme der Magnetostatik

Wie in der Elektrostatik: Randwertproblem = Gleichungen (209) und (159) + Stromdichteverteilung in V + Randbedingungen. Wahlweise kann man in der Coulomb-Eichung die beiden Gleichungen durch die „Poisson-Gleichung“ (175) für das Vektorpotential ersetzen. Es gibt mehrere (mehr oder weniger) verschiedene Fragestellungen:

- $\mathbf{J} \neq 0$ und $\mu \neq 1$: Dann folgt aus (209) in der Coulomb-Eichung

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mu_0 \mathbf{J}. \quad (218)$$

Existieren in V Raumbereiche mit verschiedenen μ , muss man die Lösungen mit Hilfe von Grenzbedingungen (212) und (216) aneinander anpassen.

- $\mathbf{J} = 0$ mit Randbedingungen auf S : Hier kann ein skalares Potential

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_M \quad (219)$$

eingeführt werden. Dann folgt aus (159) dass

$$\operatorname{div}(\mu_0 \mu \nabla \Phi_M) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla^2 \Phi_M = 0, \quad (220)$$

falls μ ortsunabhängig ist. Diese Gleichung ist unter Berücksichtigung der Randbedingungen zu lösen.

- $\mathbf{J} = 0$ jedoch $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \neq 0$: Hier erhalten wir aus (159)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{div}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \operatorname{div}(-\nabla \phi_M + \mathbf{M}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \Phi_M = \operatorname{div} \mathbf{M}. \quad (221)$$

Diese Gleichung ist formal identisch zu (33) und ihre Lösung ist gegeben durch ein Integral der Form (30)

$$\Phi_M(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int dV \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (222)$$

Existieren Randbedingungen für endliche \mathbf{r} , so kann man die Lösung aus einer Integro-Differentialgleichung finden, die nach dem Schema hergeleitet werden kann, welches wir beim Aufstellen von (102) benutzt haben.

Beispiel: Magnetische Abschirmung: Man betrachte eine Kugelschale aus einem Material mit der Permeabilität μ mit Radien $R_1 > R_2$, die sich in einem homogenen äußeren Magnetfeld \mathbf{B}_0 befindet. Keine Ströme $\Rightarrow \mathbf{H} = -\nabla\Phi_M \Rightarrow$ man löse (220) mit Hilfe des Ansatzes aus (132),

$$\begin{aligned}\Phi_a &= -B_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad \text{für } r > R_1, \\ \Phi_M &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(b_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad \text{für } R_2 < r < R_1, \\ \Phi_i &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos \theta) \quad \text{für } r < R_2.\end{aligned}\tag{223}$$

Randbedingungen für die Tangentialkomponente von \mathbf{H} sind gegeben durch, s. (217)

$$\frac{\partial\Phi_a(R_1)}{\partial\theta} = \frac{\partial\Phi_M(R_1)}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\Phi_M(R_2)}{\partial\theta} = \frac{\partial\Phi_i(R_2)}{\partial\theta},\tag{224}$$

während die Randbedingungen für die Normalkomponenten lauten, s. (212)

$$\frac{\partial\Phi_a(R_1)}{\partial r} = \mu \frac{\partial\Phi_M(R_1)}{\partial r}, \quad \mu \frac{\partial\Phi_M(R_2)}{\partial r} = \frac{\partial\Phi_i(R_2)}{\partial r}.\tag{225}$$

Diese Gleichungen bestimmen die Koeffizienten in (223). Man stellt fest, dass alle Koeffizienten für $l \neq 1$ verschwinden. Für den Rest gilt

$$\begin{aligned}C_1 - R_1^3 b_1 - B_1 &= R_1^3 B_0, & R_2^3 b_1 + B_1 - R_2^3 a_1 &= 0, \\ 2C_1 + \mu R_1^3 b_1 - 2\mu B_1 &= -R_1^3 B_0, & \mu R_2^3 b_1 - 2\mu B_1 - R_2^3 a_1 &= 0.\end{aligned}\tag{226}$$

Da wir uns nur für das Feld außerhalb und innerhalb der Kugel interessieren, müssen wir nur nach a_1 und C_1 auflösen:

$$\begin{aligned}a_1 &= -B_0 \frac{9\mu}{(2\mu+1)(\mu+2) - 2(R_2/R_1)^3(\mu-1)^2}, \\ C_1 &= B_0(R_1^3 - R_2^3) \frac{(2\mu+1)(\mu-1)}{(2\mu+1)(\mu+2) - 2(R_2/R_1)^3(\mu-1)^2}.\end{aligned}\tag{227}$$

Damit ist das Feld im Inneren der Kugel

$$\Phi_i = a_1 r \cos \theta.\tag{228}$$

Es ist also entlang der z -Achse parallel zu \mathbf{B}_0 gerichtet und hat die Stärke $-a_1$. Für $\mu \gg 1$ erhält man

$$-a_1 \approx B_0 \frac{9}{2\mu[1 - (R_2/R_1)^2]^3} \sim 1/\mu,\tag{229}$$

was eine signifikante Abschwächung des Feldes im Inneren der Kugel bedeutet. Das Feld außerhalb der Kugelschale ist gegeben durch

$$\Phi_a = -B_0 r \cos \theta + \frac{C_1}{r^2} \cos \theta,\tag{230}$$

was einer dipolförmigen Korrektur entspricht, denn das Magnetfeld, welches durch den zweiten Term induziert wird, verhält sich wie $\sim 1/r^3$, s. (190).

3 Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik

3.1 Faradaysches Induktionsgesetz

Faradaysche Beobachtung: zeitliche Veränderung der magnetischen Felder erzeugt elektrische Ströme. Eine Quantifizierung ist am einfachsten für eine geschlossene Schleife Γ . Die Felder sind durch den Fluss F durch die von Γ umschlossene Fläche S mit der Normalen \mathbf{n} beschrieben (die Geometrie entspricht der Abbildung 13 b) bis auf die Ersetzung $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{B}$),

$$F = \int_S da \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}. \quad (231)$$

Die erzeugten Ströme quantifiziert man durch die elektromotorische Kraft \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}', \quad (232)$$

wobei \mathbf{E}' das elektrische Feld ist, welches im infinitesimalen Stück $d\mathbf{l}$ ezeugt wird. Das Faradaysche Gesetz kann dann in folgender Form ausgedrückt werden

$$\mathcal{E} = -k \frac{d}{dt} F \Rightarrow \oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}' = -k \frac{d}{dt} \int_S da \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \quad (233)$$

Das Vorzeichen ist im Einklang mit der *Lenzschen Regel*: Der induzierte Strom erzeugt ein Magnetfeld, das der Flussänderung entgegenwirkt. k ist zunächst eine Konstante, die man ermitteln muss. Man nehme nun an, F verändere sich durch die Bewegung der Schleife $\Rightarrow \mathbf{E}'$ und \mathbf{B} werden in verschiedenen Bezugssystemen gemessen. Wir versuchen nun zurück zum Laborbezugssystem zu gelangen. Es gilt

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Rightarrow \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}). \quad (234)$$

Bei dieser Herleitung haben wir die Identität (9) benutzt. Der letzte Term verschwindet aufgrund von (159). (234) setzen wir nun zurück in Relation (233) ein. Sie liefert dann

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot [\mathbf{E}' - k(\mathbf{v} \times \mathbf{B})] = -k \int_S da \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}. \quad (235)$$

Würde die Schleife ruhen, erhielten wir

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = -k \int_S da \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}. \quad (236)$$

Hier ist \mathbf{E} das elektrische Feld im Laborsystem. Aus der Galilei-Invarianz folgt, dass

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + k(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (237)$$

Man betrachte nun eine Punktladung q , die im Bezugssystem der Schleife ruht. Dann wirkt auf sie eine Kraft $q\mathbf{E}'$. Im Laborsystem dagegen wird sie auch als ein Strom mit Stromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ wahrgenommen. Laut (155) wirkt auf die Ladung zusätzlich zur elektrostatischen Kraft $q\mathbf{E}$ eine Kraft $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Daraus folgt, dass $k = 1$. Außerdem erhalten wir ein Transformationsgesetz für das elektrische Feld (237)¹⁰. Mit Hilfe des Stokesschen Satzes (20) können wir das Faradaysche Gesetz umformen,

$$\int_S da \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (238)$$

Da die Wahl der Fläche S beliebig ist, muss der Integrand ebenfalls verschwinden. Somit erhalten wir eine Verallgemeinerung der Gleichung (31):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (239)$$

¹⁰Dieses ist natürlich nur für Geschwindigkeiten gültig, die viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c sind. Die relativistische Verallgemeinerung wird später behandelt.

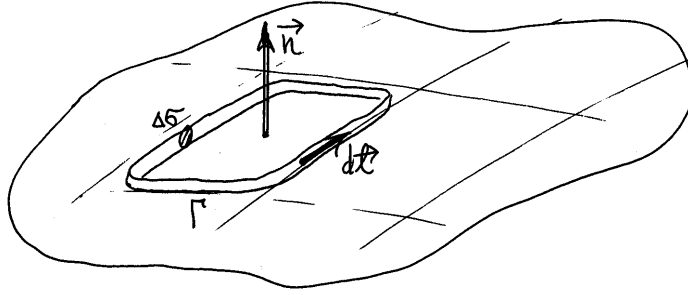


Abbildung 15:

3.2 Energie des magnetischen Feldes

Beim Einschalten des Magnetfeldes ändert sich der Fluss $F \Rightarrow$ die Ladungen in der Schleife werden beschleunigt. Die Veränderung der Energie einer Punktladung ist

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}' = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}',$$

\mathbf{j} ist die Stromdichte für eine Punktladung. Die Arbeit, die von der Feldquelle verrichtet wird, ist durch ein Integral über alle Ladungen in der Schleife gegeben. Die Bewegung dieser Ladungen wird durch \mathbf{J} beschrieben (es ist eine Summe über alle \mathbf{j}). Da $\mathbf{J} \parallel d\mathbf{l}$ erhalten wir für die Veränderung der Feldenergie¹¹ W :

$$\frac{dW}{dt} = -I \int_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}' = -I \mathcal{E} = I \frac{dF}{dt} \quad \text{oder} \quad \delta W = I \delta F. \quad (240)$$

Nun unterteilen wir eine makroskopische Stromverteilung \mathbf{J} in elementare röhrenförmige geschlossene Stromschleifen mit Querschnittsflächen $\Delta\sigma$, s. Abbildung 15. Die Arbeit gegen die elektromotorische Kraft kann durch die Änderung der die Schleife durchdringenden magnetischen Induktion $\delta\mathbf{B}$ ausgedrückt werden,

$$\Delta(\delta W) = J \Delta\sigma \int_S d\mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{B} = J \Delta\sigma \int_S d\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A}) = J \Delta\sigma \oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot (\delta\mathbf{A}). \quad (241)$$

Da $J \Delta\sigma d\mathbf{l} = \mathbf{J} dV$ ist, erhält man nach der Aufsummation über alle Schleifen

$$\delta W = \int dV \mathbf{J} \cdot (\delta\mathbf{A}) = \int dV \delta\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (242)$$

wobei man von der Relation (209) Gebrauch gemacht hat. Nun benutzen wir die Vektoridentität¹²

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) - \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}). \quad (243)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \delta W &= \int dV [\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A}) + \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \delta\mathbf{A})] = \int dV \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A}) + \int_S d\mathbf{a} \cdot (\mathbf{H} \times \delta\mathbf{A}) \\ &= \int dV \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A}) = \int dV \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B}. \end{aligned} \quad (244)$$

Hier haben wir benutzt, dass die Stromverteilung außerhalb von S verschwindet. Gilt der lineare Zusammenhang zwischen den \mathbf{H} und \mathbf{B} Feldern, so erhalten wir

$$\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B} = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2} \int dV \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}. \quad (245)$$

¹¹Das negative Vorzeichen begründet sich durch die Lenzsche Regel.

¹²Sie wurde in der Aufgabe P1 iv) des Präsenzübungsblatts hergeleitet.

Diese Gleichung ist das Analogon von (128) aus der Elektrostatik. (242) ist das Analogon zu (126) und führt auf

$$W = \frac{1}{2} \int dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}. \quad (246)$$

Beispiel: Induktivitätskoeffizienten. Man betrachte N Schleifen mit Strömen I_i . Was ist die Energie des Systems? Man benutze (246) und (172). Die Gesamtenergie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu_0}{8\pi} \int dV \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^N \int dV_i \sum_{j=1}^N \int dV'_j \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}'_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j|} \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^N I_i \int dV_i \sum_{j=1}^N I_j \int dV'_j \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j|}. \end{aligned} \quad (247)$$

Die Vektoren \mathbf{j}_i sind Einheitsvektoren in Tangentialrichtung zur jeweiligen Schleife. Sie sind nur geometriebedingt und hängen von den Strömen I_i nicht ab. Die letzte Formel läßt sich auch auf folgende Weise umformen,

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{i>j}^N M_{ij} I_i I_j. \quad (248)$$

Die auftretenden Koeffizienten sind die *Selbst-* und *Gegeninduktivitäten*,

$$L_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV_i \int dV'_i \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i|}, \quad M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV_i \int dV'_j \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j|}. \quad (249)$$

Sie sind den Kapazitätskoeffizienten sehr ähnlich, man vergleiche (248) mit (42). Diese kann man auch mit den Magnetfeldflüssen F_{ij} in Zusammenhang bringen, die in der i -ten Schleife durch den Strom in der j -ten Schleife induziert werden. Um es zu verdeutlichen, stellt man das Vektorpotential in (249) wieder her,

$$\mathbf{A}_{ij}(\mathbf{r}_i) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_j \int dV'_j \frac{\mathbf{j}_j(\mathbf{r}'_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j|}. \quad (250)$$

Damit gilt für die Gegeninduktivitäten

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{1}{I_j} \int dV_i \mathbf{j}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{I_j} \int d\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{I_j} \int_S da (\nabla \times \mathbf{A}_{ij}) \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{I_j} \int_S da \mathbf{B}_{ij} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{I_j} F_{ij}. \end{aligned} \quad (251)$$

F_{ij} ist der magnetische Fluss durch die i -te Schleife, der durch den Strom in der j -ten Schleife induziert wird. Die letzte Formel ist sehr nützlich bei praktischen Anwendungen.

3.3 Maxwellscher Verschiebungsstrom. Maxwellsche Gleichungen

Im letzten Abschnitt haben wir die Gleichung (31) korrigiert. Gibt es andere Veränderungen in den uns bereits bekannten Gleichungen? Man schaue sich die Gleichung (209) an und berechne

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0. \quad (252)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (154) folgt jedoch, dass

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

gilt. Die rechte Seite muss also nicht unbedingt verschwinden! Mit Hilfe von $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ stellt man fest, dass die Divergenz eines komplizierteren Objekts verschwindet:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

Diese Erkenntnis brachte Maxwell auf die Idee, die fehlerhafte Gleichung (209) zu korrigieren, indem man \mathbf{J} durch $\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ ersetzt. Dann gilt

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (253)$$

Der zusätzliche Term $\partial \mathbf{D} / \partial t$ wird *Verschiebungsstrom* genannt.

Das vollständige System der Maxwell-Gleichungen besteht also aus 4 Gleichungen:

- Coulombsches Gesetz

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (254)$$

- Faradaysches Gesetz

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (255)$$

- Ampèresches Durchflutungsgesetz

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (256)$$

- Quellenfreiheit des Magnetfeldes (es existieren keine magnetischen Monopole)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (257)$$

(255) und (257) werden homogene Maxwell-Gleichungen genannt, während (254) und (256) die inhomogenen Gleichungen sind. Ergänzt durch die Gleichung für die Lorenz-Kraft und das 2. Newtonsche Gesetz beschreibt dieses System das klassische Verhalten von geladenen wechselwirkenden Teilchen in elektromagnetischen Feldern. In dichten Medien mit Grenzflächen sollte man sie durch $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ und $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ sowie der entsprechenden Randbedingungen erweitern.

3.4 Elektromagnetische Potentiale

3.4.1 Vektor- und Skalarpotentiale

Das System (254-257) ist ein System aus 4 partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Kann man die Anzahl der Gleichungen reduzieren? Aufgrund der Gleichung (257) existiert ein Vektorpotential \mathbf{A} mit

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (258)$$

Aus (255) folgt, dass ein Feld Φ existiert, so dass

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \Phi \quad (259)$$

gilt. Das elektrische Feld berechnet sich demnach nach der Vorschrift

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (260)$$

(258) und (260) erfüllen also automatisch die homogenen Maxwell-Gleichungen. Für die inhomogenen erhalten wir [man benutze (254)]

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (261)$$

und mit Hilfe der Gleichung (256)

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \right) &= \mathbf{J}_f + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (262)$$

Hier haben wir benutzt, dass $1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0$. (261) und (262) sind nun nur zwei Gleichungen zweiter Ordnung. Allerdings sind sie immer noch gekoppelt (Φ und \mathbf{A} tauchen in beiden Gleichungen auf). Die Entkopplung geschieht auf folgende Weise. Das Vektorpotential (258) ist nur bis auf den Gradienten einer Funktion Λ eindeutig. Man mache die Ersetzung

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda. \quad (263)$$

Damit sich das elektrische Feld (260) nicht ändert, muss verlangt werden, dass das Potential sich transformiert wie

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (264)$$

Wir wählen nun Λ so, dass die Lorenzsche Forderung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (265)$$

gilt. Dann entkoppeln die Gleichungen (261) und (262). Als Ergebnis erhält man zwei inhomogene *Wellengleichungen*:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (266)$$

Dieses Gleichungssystem ist dem System der gewöhnlichen Maxwell-Gleichungen vollständig äquivalent.

3.4.2 Eichtransformationen. Eichinvarianz

Die Transformationen (263) und (264) nennt man *Eichtransformationen*. Die Invarianz der Felder bezüglich dieser Transformationen nennt sich *Eichinvarianz*. Es ist immer möglich, die Potentiale so zu wählen, dass diese der Lorenz-Bedingung (265) genügen. Nehmen wir an, wir haben die Potentiale so gewählt, dass sie (265) nicht erfüllen. Wir können dann eine Eichtransformation zu \mathbf{A}' und Φ' vornehmen, so dass die neuen Felder die Lorenz-Bedingung erfüllen, dann gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}. \quad (267)$$

Wenn jetzt die Funktion Λ so gewählt ist, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\nabla^2 \Lambda + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \quad (268)$$

gilt, dann werden die neuen Potentiale \mathbf{A}' und Φ' die Lorenz-Forderung sowie die Wellengleichungen erfüllen. Die Bedingung (265) legt die Potentiale noch nicht eindeutig fest. Man kann sich auf solche

beschränken, die ineinander durch die Eichtransformation mit den Funktionen Λ übergehen, die der Gleichung

$$-\nabla^2 \Lambda + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \quad (269)$$

genügen. Diese Wahl nennt man *Lorenz-Eichung*. Die Transformation mit Λ , welches (269) erfüllt, nennt man *eingeschränkte Eichtransformation*.

Eine alternative Eichung stellt die *Coulomb-* oder *transversale Eichung*, (auch *Strahlungseichung* genannt) dar. Hier fordert man die Quellenfreiheit des \mathbf{A} -Potentials,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (270)$$

In dieser Eichung reduziert sich die Gleichung (261) auf

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{mit der Lösung} \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Das skalare Potential ist also das instantane Coulomb-Potential zur Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ (daher der Name *Coulomb-Eichung*). Das Vektorpotential findet sich als Lösung von (262),

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (271)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist wirbelfrei. Wir zerlegen die Stromdichte in einen longitudinalen (wirbelfreien) Anteil \mathbf{J}_l und einen transversalen (quellenfreien oder solenoidalen) Anteil \mathbf{J}_t : $\mathbf{J} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_t$. Sie sind definiert durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{J}_l = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{J}_t = 0. \quad (272)$$

Aufgrund der Eigenschaft (35) können wir die Gesamtstromdichte umschreiben als

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \int dV' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (273)$$

Mit Hilfe der Identität (162) kann diese in zwei Terme aufgespalten werden,

$$= -\frac{1}{4\pi} \nabla \left(\nabla \cdot \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_t. \quad (274)$$

Die Zuordnung der Stromdichtenanteile im letzte Schritt ist einfach, denn der erste Term ist ein Gradient eines skalaren Feldes \Rightarrow er ist wirbelfrei während der zweite Term eine Rotation ist und deswegen quellenfrei. Den longitudinalen Anteil können wir auch auf folgende Form bringen:

$$\mathbf{J}_l = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int dV' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

wenn wir berücksichtigen, dass

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \int dV' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int dV' \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \int dV' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + (\text{Oberflächenintegral} = 0) \end{aligned}$$

gilt. Nun benutzen wir die Kontinuitätsgleichung (154) und die Lösung der Gleichung (254) (Coulomb-Gesetz):

$$\mathbf{J}_l = \frac{1}{4\pi} \nabla \int dV' \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t) / \partial t}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}_l. \quad (275)$$

Damit vereinfacht sich Gleichung (271) zu

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_t. \quad (276)$$

Diese Form rechtfertigt den Namen *transversale Eichung*. Diese Eichung ist besonders praktisch in der Quantenelektrodynamik. In Abwesenheit von Feldquellen (keine Ladungs- und Stromdichteverteilungen) vereinfachen sich die Gleichungen für Felder auf

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (277)$$

3.5 Energie- und Impulserhaltungssätze der Elektrodynamik

3.5.1 Theorem von Poynting

Man betrachte eine Elementarladung q , die sich in einem EM-Feld mit den Stärken \mathbf{E} und \mathbf{B} bewegt. Dann ist die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$, da die Lorentz-Kraft senkrecht zu \mathbf{v} gerichtet ist und keine Arbeit leistet. Für eine Stromdichteverteilung im Volumen V hat man dann

$$\frac{dW}{dt} = \int_V dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \int_V dV \left[\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right], \quad (278)$$

wobei wir das Ampèresche Durchflutungsgesetz (256) benutzt haben. Nun setzen wir die Identität¹³

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (279)$$

und das Faradaysche Induktionsgesetz (255) ein. Das Ergebnis ist

$$\frac{dW}{dt} = - \int_V dV \left[\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \quad (280)$$

Jetzt setzen wir voraus, dass

- unser Medium ist linear, d. h. es gilt $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$ sowie $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E}$
- die Gesamtenergiedichte des Systems (inklusive zeitabhängiger Felder) ist gegeben durch

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}). \quad (281)$$

Damit erhalten wir das Theorem von Poynting

$$\int_V dV \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right] = - \int_V dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (282)$$

wobei \mathbf{S} der Poyntingsche Vektor ist. Die durch Felder geleistete Arbeit $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ ist also gleich der Summe der zeitlichen Veränderung der Energie im infinitesimalen Volumen $\partial w / \partial t$ und des Energiestroms¹⁴ \mathbf{S} ins Volumen hinein. Man kann sich vorstellen, dass die durch äußere Felder verrichtete Arbeit für die Beschleunigung der Teilchen innerhalb des Volumens V aufgewendet wird. Damit ist das mechanische Energie. Dann gilt

$$\frac{dE_{\text{mech}}}{dt} = \int_V dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} (E_{\text{mech}} + E_{\text{Feld}}) = - \int_S da \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, \quad (283)$$

wobei die Feldenergie definiert ist wie

$$E_{\text{Feld}} = \int_V dV w = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2). \quad (284)$$

¹³Diese wurde im Präsenzübungsblatt hergeleitet.

¹⁴Dass \mathbf{S} tatsächlich ein Energiestrom ist, sieht man am besten wenn man den Divergenzterm mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral umformt.

3.5.2 Der Impulserhaltungssatz

Die Kraft, die auf ein Teilchen wirkt, ist

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (285)$$

Für eine makroskopische Stromdichteverteilung erhalten wir damit

$$\mathbf{F} = \int dV (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{P}_{\text{mech}}}{dt}. \quad (286)$$

Wir können nun die Ladungs- sowie Stromdichte mit Hilfe von (254) und (256) eliminieren,

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \left[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right]. \quad (287)$$

Nun benutzen wir

$$\mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

addieren $c^2 \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$ zu dem in eckigen Klammern stehenden Ausdruck und benutzen das Faradaysche Gesetz (255). Dann erhalten wir

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \left[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + c^2 \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

Diesen Ausdruck setzen wir nun in (286) ein:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_{\text{mech}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V dV \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) &= \\ &= \epsilon_0 \int_V dV \left[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + c^2 \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right]. \end{aligned} \quad (288)$$

Den 2. Term auf der linken Seite können wir nun als den Gesamtimpuls des EM-Feldes betrachten,

$$\mathbf{P}_{\text{Feld}} = \epsilon_0 \int_V dV (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c^2} \int_V dV (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (289)$$

Um die rechte Seite von (288) weiter umzuformen, schauen wir uns folgendes Objekt an:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_x &= E_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - E_y \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ + E_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} E_x^2 + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2). \end{aligned}$$

Für die Komponente $\alpha = x, y, z$ können wir also

$$[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_\alpha = \sum_{\beta=x,y,z} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \delta_{\alpha\beta} \right), \quad (290)$$

schreiben. Die rechte Seite von (288) können wir daher als eine Divergenz des *Maxwellschen Spannungstensors* $T_{\alpha\beta}$ umschreiben, der auf folgende Weise definiert ist:

$$T_{\alpha\beta} = \epsilon_0 \left[E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \delta_{\alpha\beta} \right]. \quad (291)$$

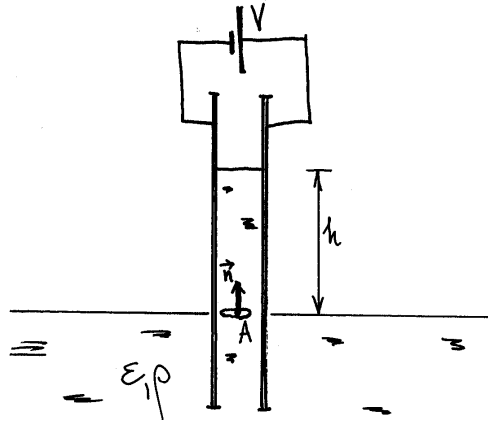


Abbildung 16:

Dann gilt

$$\left(\frac{d\mathbf{P}_{\text{mech}}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_{\text{Feld}}}{dt} \right)_{\alpha} = \sum_{\beta} \int_V dV \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} T_{\alpha\beta} = \int_S da \sum_{\beta} T_{\alpha\beta} n_{\beta}, \quad (292)$$

wobei wir im letzten Schritt den Satz von Gauß benutzt haben (n_{β} sind die Komponenten der Flächennormalen). Die rechte Seite ist nun nichts anderes als die Summe der Kräfte, die auf das System der Teilchen und Felder in V wirken. Präziser gesagt ist $da T_{\alpha\beta} n_{\beta}$ die α -Komponente der Kraft, die von außen auf eine infinitesimale Fläche mit der Normalen \mathbf{n} ausgeübt wird. (292) ist der Impulserhaltungssatz der Elektrodynamik.

Anmerkung: Die Definition des Maxwell-Tensors ist auch in linearen Medien gültig. Der einzige Unterschied ist, dass die elektrischen Terme einen Faktor ϵ erhalten während die magnetischen mit μ multipliziert werden müssen.

Beispiel: Kondensator mit flüssigem Dielektrikum (s. auch A5 auf dem Aufgabenblatt 5)
Wie hoch steigt die Flüssigkeit in einem Plattenkondensator mit dem Plattenabstand d und der angelegten Spannung V ? Man betrachte den Punkt A in der Flüssigkeit, s. Abbildung 16, mit der dazugehörigen infinitesimalen Fläche. Die Flächennormale ist parallel zu den Kondensatorplatten gerichtet. Die Kraft pro Flächeneinheit, also der Druck, die von außen auf diese Fläche wirken würde, wenn die Flüssigkeit noch nicht hineingezogen worden wäre, ist gegeben durch

$$T_{\alpha\beta} n_{\beta} = \epsilon_0 \epsilon \left(E_{\alpha} E_{\beta} - \frac{1}{2} E^2 \delta_{\alpha\beta} \right) n_{\beta} = \epsilon_0 \epsilon \left(\mathbf{E} E_n - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{n} \right)_{\alpha}.$$

Die Feldkomponente E_n normal zu den Plattenoberflächen verschwindet, deswegen folgt

$$p(\epsilon) = -\epsilon_0 \epsilon \frac{1}{2} E^2.$$

Auf der Seite oberhalb der Flüssigkeit haben wir entsprechend den Druck $-p(1)$. Die Druckdifferenz muss durch den hydrostatischen Druck ausgeglichen werden:

$$\epsilon_0(\epsilon - 1) \frac{1}{2} E^2 = h g \rho \Rightarrow h = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)(V/d)^2}{2g\rho},$$

wobei ρ die Flüssigkeitsdichte und g die Erdbeschleunigung bezeichnen.

4 Elektromagnetische Wellen

4.1 Ebene Wellen

4.1.1 Homogene Wellengleichung und ihre Lösungen

Betrachten wir nun die homogenen (ohne Ströme und Ladungen) Maxwell-Gleichungen im linearen Medium. Einmal nach der Zeit abgeleitet folgt aus (256)

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (293)$$

Die neue Konstante $u = c/n$ mit dem Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ ist nichts anderes als die Lichtgeschwindigkeit im gegebenen Medium. Nun berechnen wir die Rotation des Faradayschen Induktionsgesetzes,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (294)$$

Wir erhalten also die Gleichung

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (295)$$

die ähnlich zu (266) ist (bis auf die Ersetzung $u \rightarrow c$). Eine Gleichung für \mathbf{B} , die identisch zu (295) ist, läßt sich auf die gleiche Weise herleiten. Manchmal führt man den *d'Alembertschen Operator*

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{ein, dann gilt} \quad \square \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \square \mathbf{B} = 0. \quad (296)$$

Eine Lösung dieser (homogenen) Gleichung kann in folgender Form ausgedrückt werden,

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = f(\phi_-) + f(\phi_+) \quad (297)$$

wobei $\phi_{\pm} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t$ *Phasen* sind. Es ist leicht zu überprüfen, dass folgende Relationen gelten:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\phi_-) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_-} \frac{\partial \phi_-}{\partial t} \right) = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_-^2} \quad (298)$$

$$\nabla^2 f(\phi_-) = \nabla \cdot \nabla f(\phi_-) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_-} \nabla \phi_- \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_-} \mathbf{k} \right) = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_-^2}. \quad (299)$$

Eingesetzt in (295) liefert dieser Ansatz

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{u^2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_-^2} = 0. \quad (300)$$

Die Wellengleichung ist also für $\omega = uk$ gelöst. Wie genau sieht die Funktion f aus? Um diese Frage zu klären schauen wir uns ein 1D Problem an. Die Gleichung ähnelt sich dann sehr der aus dem Abschnitt 2.3.2:

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}. \quad (301)$$

Deswegen benutzen wir die Methode der Variablentrennung mit dem Ansatz $f(x, t) = X(x)T(t)$. Es folgen die Gleichungen

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\alpha^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{u^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\alpha^2. \quad (302)$$

Damit erhalten wir ein Problem vom Sturm-Liouville-Typ. Wir setzen voraus, dass die Lösungen des Problems überall in \mathbb{R} für alle Zeiten endlich bleiben \Rightarrow für $-\alpha^2 \geq 0$ existieren keine nichttrivialen Lösungen. Für die anderen α erhalten wir Lösungen wie in (63).

$$X_\alpha(x) = e^{i\alpha x} \quad (303)$$

sind Lösungen für alle α aus \mathbb{R} . Sie bilden ein Orthogonalsystem mit dem Skalarprodukt (κ ist ein infinitesimaler Konvergenzfaktor)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx X_\alpha^*(x) X_\beta(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix(\beta-\alpha)-\kappa|x|} = \int_{-\infty}^0 dx e^{ix(\beta-\alpha)+\kappa x} + \int_0^{\infty} dx e^{ix(\beta-\alpha)-\kappa x} \\ &= \frac{2\kappa}{\kappa^2 + (\beta-\alpha)^2} \Big|_{\kappa \rightarrow 0} = 2\pi \delta(\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (304)$$

Die richtige Normierung der δ -Funktion kann man feststellen, indem man das folgende Integral auswertet

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{2\kappa}{\kappa^2 + y^2} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d(y/\kappa) \frac{1}{1 + (y/\kappa)^2} = 2 \arctan(y/\kappa) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi.$$

Verallgemeinerung der Fourier-Entwicklung: Im Allgemeinen kann eine beliebige auf \mathbb{R} absolut integrierbare Funktion¹⁵ $g(x)$ nach $X_\alpha(x)$ entwickelt werden:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{i\alpha x} \tilde{g}(\alpha), \quad \text{mit} \quad \tilde{g}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\alpha y} g(y). \quad (305)$$

$\tilde{g}(\alpha)$ wird *Fourier-Transformierte* (FT) oder *Spektralfunktion* genannt. Die Wahl der Normierung des ersten Integrals auf 2π ist willkürlich. Üblich ist auch die Normierung beider Integrale auf $\sqrt{2\pi}$. Eigenschaften der Fourier-Transformierten (FT):

- Für gerade Funktionen $g(x) = g(-x)$ erhält man

$$\tilde{g}(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} dx \cos(\alpha x) g(x). \quad (306)$$

\Rightarrow ist $g(x)$ reell, so ist auch die FT reell.

- Für ungerade Funktionen $g(x) = -g(-x)$ gilt

$$\tilde{g}(\alpha) = -2i \int_0^{\infty} dx \sin(\alpha x) g(x). \quad (307)$$

\Rightarrow ist $g(x)$ reell, so ist die FT imaginär.

- Ist $g(x)$ reell, so gilt

$$\tilde{g}^*(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\alpha x} g(x) = \tilde{g}(-\alpha). \quad (308)$$

- Es gilt das *Faltungstheorem*: Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \int dy g_1(x-y) g_2(y). \quad (309)$$

¹⁵Das sind Funktionen, für die das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |g(x)|$$

existiert.

Setzt man die Fourier-Darstellungen der $g_{1,2}$ -Funktionen ein so erhält man

$$\begin{aligned} g(x) &= \int dy \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{i\alpha(x-y)} \tilde{g}_1(\alpha) \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{i\beta y} \tilde{g}_2(\beta) \\ &= \int \int \frac{d\alpha d\beta}{(2\pi)^2} e^{i\alpha x} \tilde{g}_1(\alpha) \tilde{g}_2(\beta) \int dy e^{-i(\alpha-\beta)y} = \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{i\alpha x} \tilde{g}_1(\alpha) \tilde{g}_2(\alpha). \end{aligned} \quad (310)$$

Damit gilt für die Fourier-Komponenten von $g(x)$:

$$\tilde{g}(\alpha) = \tilde{g}_1(\alpha) \tilde{g}_2(\alpha) \quad (311)$$

- Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen: Z. B. erhält man in 3D

$$g(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\alpha}{(2\pi)^3} e^{i\alpha \cdot \mathbf{r}} \tilde{g}(\alpha), \quad \text{mit} \quad \tilde{g}(\alpha) = \int dV' e^{-i\alpha \cdot \mathbf{r}'} g(\mathbf{r}'). \quad (312)$$

Beispiel 1: Fourier-Transformierte einer „Fenster“-Funktion

$$g(x) = \Theta(x+a) \Theta(a-x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a < x < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (313)$$

$$\tilde{g}(\alpha) = \int_{-a}^a dx e^{-i\alpha x} = \frac{e^{-i\alpha a} - e^{i\alpha a}}{-i\alpha} = \frac{2 \sin(\alpha a)}{\alpha}. \quad (314)$$

Beispiel 2: Fourier-Transformierte von $g(x) = \cos(bx)$. Trigonometrische Funktionen sind nicht absolut integrabel. Um dieser Forderung zu genügen, führt man genauso wie bei der Rechnung (304) Konvergenzfaktoren ein, die anschließend Null gesetzt werden müssen. Damit erhält man:

$$\tilde{g}(\alpha) = \int dx e^{-i\alpha x} \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} = \pi[\delta(\alpha+b) + \delta(\alpha-b)]. \quad (315)$$

Beispiel 3: Fourier-Transformierte der Gauß-Verteilung

$$g(x) = C e^{-(x-x_0)^2/(2a)}. \quad (316)$$

Wie berechnet man die Normierung C ? Es gilt

$$I(a) = \int dx e^{-(x-x_0)^2/(2a)} = \int dx e^{-x^2/(2a)}.$$

Schauen wir uns das Quadrat dieses Integrals an:

$$\begin{aligned} [I(a)]^2 &= \int dx e^{-x^2/(2a)} \int dy e^{-y^2/(2a)} = \int \int dx dy e^{-(x^2+y^2)/(2a)} = \int_0^\infty dr 2\pi r e^{-r^2/(2a)} \\ &= 2\pi a \int_0^\infty d\left(\frac{r^2}{2a}\right) e^{-r^2/(2a)} = 2\pi a. \end{aligned} \quad (317)$$

Damit die Verteilung auf 1 normiert ist muss $C = 1/\sqrt{2\pi a}$ gelten. Für die FT erhalten wir (bis auf den Normierungsfaktor)

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\alpha) &= \int dx e^{-i\alpha x} e^{-(x-x_0)^2/(2a)} = e^{-i\alpha x_0} \int dx' e^{-i\alpha x'} e^{-(x')^2/(2a)} \\ &= e^{-i\alpha x_0 - a\alpha^2/2} \int dx' e^{-(x'+ia\alpha)^2/(2a)}, \end{aligned} \quad (318)$$

wobei wir im ersten Schritt eine Variablensubstitution $x' = x - x_0$ und im zweiten Schritt eine quadratische Ergänzung durchgeführt haben. Nun nehmen wir eine weitere Variablensubstitution $z = x' + ia\alpha$ vor. Die Integration über z erfolgt nun entlang einer Kontur C , die parallel zur reellen

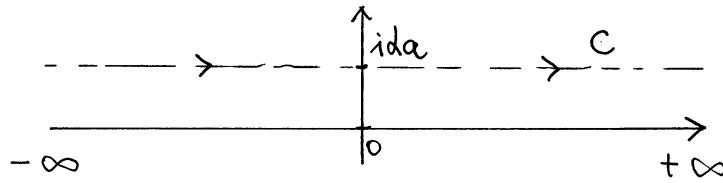


Abbildung 17:

Achse verläuft, s. Abbildung 17. Später werden wir zeigen können, dass beide Integrale identisch sind,

$$\int_C dz e^{-z^2/(2a)} = I(a). \quad (319)$$

Damit ergibt sich für die FT der Gauß-Verteilung

$$\tilde{g}(\alpha) = \sqrt{2\pi a} e^{-i\alpha x_0 - a\alpha^2/2}, \quad (320)$$

also ebenfalls eine Gauß-Verteilung! Die Breite des „Originals“ ist $w = a$ während die Breite der FT $w' = 1/a$ ist. Es gilt also für die Gauß-Verteilung:

$$w w' = 1. \quad (321)$$

Achtung: Es ist eine Konvention, die Fourier-Transformation in der Zeit-Domäne mit umgekehrten Vorzeichen der Exponenten zu definieren [vgl. mit (305),

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{g}(\omega), \quad \text{mit} \quad \tilde{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} g(t). \quad (322)$$

Nun gehen wir zurück zur Lösung der Wellengleichung. Die Zeitentwicklung läßt sich nun auf die gleiche Weise ermitteln. Für die Eigenfunktionen erhalten wir also

$$f(x, t) = C e^{i(\alpha x \pm \alpha t)} = C e^{i(kx \pm \omega t)}, \quad (323)$$

wobei C eine noch unbekannte Konstante bezeichnet. Eine Verallgemeinerung auf den 3D Raum ist evident und führt auf

$$f(\phi_{\pm}) = c e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}. \quad (324)$$

Eine beliebige Lösung der Wellengleichung kann nach diesen *Basisfunktionen* entwickelt werden! In diesen Lösungen liegen die Punkte gleicher Phase (= *Wellenfront*) in einer Ebene mit der Normalen in Richtung \mathbf{k} , weswegen sie auch *ebene Wellen* genannt werden. \mathbf{k} bezeichnet den *Wellenvektor*. Die *Wellenlänge* λ ist der Abstand zwischen zwei Maxima der Welle, τ ist die Periode,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (325)$$

Aus $\omega = k u$ folgt dann, dass $u = \lambda \nu$ gilt, wobei $\nu = 1/\tau$ die *Frequenz* der Welle bezeichnet.

Schauen wir uns nun die Lösung der Gleichungen für \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder an. Seien \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 die Anfangsbedingungen (das ist nichts anderes als eine Zusammensetzung der Konstanten C aus Vektoren), dann gilt

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)}. \quad (326)$$

Diese Gleichungen beschreiben eine *monochromatische* (ω bzw. k konstant und festgelegt) ebene Welle. Wendet man nun das Faradaysche Induktionsgesetz (255) auf das Ergebnis für \mathbf{E} an so erhält man mit Hilfe der Formel aus Abschnitt 2.5.2 [rot ($\psi \mathbf{a}$) = ...]

$$i(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = i\omega' \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)}. \quad (327)$$

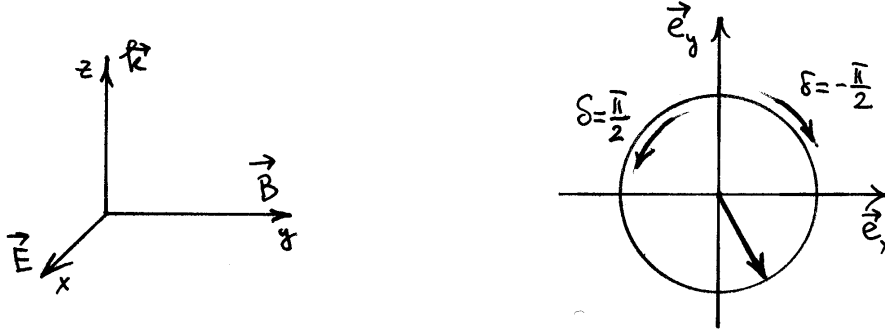


Abbildung 18:

Aus dieser Identität folgen unmittelbar die Relationen

$$\omega = \omega', \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}', \quad \text{und} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0. \quad (328)$$

Aus den Gleichungen $\text{div } \mathbf{E} = 0$ und $\text{div } \mathbf{B} = 0$ folgen

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0. \quad (329)$$

Aus dem Ampèreschen Durchflutungsgesetz (256) folgt auf die gleiche Weise die Relation

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{\omega}{u^2} \mathbf{E}_0. \quad (330)$$

Aus den Gleichungen (328-330) folgt nun, dass die Vektoren \mathbf{E} , \mathbf{B} , und \mathbf{k} ein orthogonales Rechtssystem bilden \Rightarrow ebene Wellen sind *transversal*, s. Abbildung 18 links. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung kann in folgender Form ausgedrückt werden (die z -Achse ist nun entlang der Ausbreitungsrichtung gerichtet)

$$\mathbf{E} = (E_{0x} \mathbf{e}_x + E_{0y} \mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{u} (-E_{0y} \mathbf{e}_x + E_{0x} \mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (331)$$

4.1.2 Polarisation ebener Wellen

Die Koeffizienten E_{0x} und E_{0y} sind komplexe Größen:

$$E_{0x} = |E_{0x}| e^{i\varphi} \quad \text{und} \quad E_{0y} = |E_{0y}| e^{i(\varphi + \delta)}. \quad (332)$$

Für die Komponenten des physikalischen \mathbf{E} -Feldes $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$ erhalten wir dann (sie sind natürlich rein reell)

$$E_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad \text{und} \quad E_y = |E_{0y}| \cos(kz - \omega t + \varphi + \delta). \quad (333)$$

Je nach relativer Phase δ lassen sich mehrere Fälle unterscheiden:

- $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$, dann gilt

$$\mathbf{E} = (|E_{0x}| \mathbf{e}_x \pm |E_{0y}| \mathbf{e}_y) \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad \text{mit} \quad E = \sqrt{|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2}. \quad (334)$$

Die Orientierung von \mathbf{E} ist also fest und sowohl zeit- als auch ortsunabhängig. Diese Richtung ist die *Polarisationsrichtung* und die Welle ist linear polarisiert. Jeder einzelne Summand in (331) kann man als eine linear polarisierte Welle auffassen \Rightarrow jede Welle ist eine lineare Superposition von zwei linear polarisierten.

- $\delta = \pm\pi/2$, $|E_{0x}| = |E_{0y}|$ dann gilt

$$\mathbf{E} = E [\cos(kz - \omega t + \varphi) \mathbf{e}_x \mp \sin(kz - \omega t + \varphi) \mathbf{e}_y]. \quad (335)$$

In dieser Situation handelt es sich um eine *zirkular* polarisierte Welle. Für $\delta = \pi/2$ ist sie links-zirkular und für $\delta = -\pi/2$ rechts-zirkular polarisiert, s. Abbildung 18 rechts.

- $\delta = \pm\pi/2$, $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$ dann gilt

$$\mathbf{E} = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t + \varphi) \mathbf{e}_x \mp |E_{0y}| \sin(kz - \omega t + \varphi) \mathbf{e}_y. \quad (336)$$

Für die x - und y -Komponenten des elektrischen Feldes gilt die Gleichung

$$\left(\frac{E_x}{|E_{0x}|}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|}\right)^2 = 1. \quad (337)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen $|E_{0x}|$ und $|E_{0y}|$, die *entlang der x - bzw. y -Achse orientiert* sind. Diese Welle nennt man *elliptisch-polarisiert*.

- δ beliebig und $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$. Auch hier hat man mit einer elliptisch polarisierten Welle zu tun. Allerdings sind ihre Halbachsen nicht mehr entlang der x - und y -Achsen gerichtet.

4.1.3 Wellenpakete

Man kann nicht davon ausgehen, dass die Anfangsbedingungen oder die Quellen in der inhomogenen Wellengleichung zu einer monochromatischen ebenen Welle führen oder ganz allgemein zu einer Lösung von der Gestalt (297). Stattdessen hat man meistens mit einer Superposition der Lösungen mit verschiedenen Frequenzen/Wellenvektoren zu tun. Sind die Amplituden von verschiedenen monochromatischen Komponenten durch die Spektralfunktion (Gewichtsfunktion) $b(k)$ gegeben, so läßt sich die allgemeine Lösung der Wellengleichung als *Wellenpaket* ausdrücken:

$$F_{\pm}(x, t) = \int dk b(k) e^{i(kx \pm \omega t)}. \quad (338)$$

Üblicherweise ist $b(k)$ eine Funktion mit

- einem stark ausgeprägten Maximum bei k_0 ,
- stark abfallend mit zunehmenden Abstand $|k - k_0| > \Delta k$, wobei Δk die Breite des Peaks bezeichnet.

In den meisten Medien ist die relative Dielektrizitätskonstante $\epsilon = \epsilon(\omega)$ frequenzabhängig (dispersive Medien), so dass die Ausbreitungsgeschwindigkeiten verschiedener monochromatischer Komponenten in (338) unterschiedlich sind. Wenn $\epsilon(\omega)$ in der Nähe von $\omega(k_0)$ nur schwach frequenzabhängig ist, dann gilt die Entwicklung:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k \rightarrow k_0} + \dots \quad (339)$$

Man definiert die *Gruppengeschwindigkeit* als

$$v_g = \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k \rightarrow k_0}. \quad (340)$$

Man setze nun die Entwicklung (339) in (338) ein,

$$\begin{aligned} F_{\pm}(x, t) &\approx \int dk b(k) e^{i[k_0 x \pm \omega(k_0) t]} e^{i[(k - k_0)x \pm (k - k_0)v_g t]} \\ &= e^{i[k_0 x \pm \omega(k_0) t]} \int dq b(k_0 + q) e^{iq(x \pm v_g t)} = e^{i[k_0 x \pm \omega(k_0) t]} \mathcal{F}(x \pm v_g t). \end{aligned} \quad (341)$$

Dies ist eine ebene Welle mit k_0 und $\omega_0 = \omega(k_0)$, *moduliert* mit \mathcal{F} . Diese Einhüllende bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit v_g . v_g ist die Geschwindigkeit, mit der Energie und Information transportiert werden können. Es gilt strikt $v_g \leq c$. Dies trifft auf die Phasengeschwindigkeit u nicht mehr zu.

Beispiel: Gaußsches Wellenpaket. Die Spektralfunktion ist gegeben durch

$$b(k) = \frac{1}{\Delta k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k - k_0)^2}{2(\Delta k)^2}}.$$

Wir benutzen eine normierte Verteilung, damit die Dimensionen stimmen. Die Einhüllende ist gegeben durch [wir greifen auf (316) und (320) zurück]

$$\mathcal{F}(x \pm v_g t) = \frac{1}{\Delta k \sqrt{2\pi}} \int dq e^{-\frac{q^2}{2(\Delta k)^2}} e^{iq(x \pm v_g t)} = e^{-(\Delta k)^2 (x \pm v_g t)^2 / 2}.$$

Die Relation (321) zwischen den Breiten der Spektralfunktion und des Wellenpakets gilt immer noch.

4.2 Kugelwellen

Wie wir im Abschnitt 2.3.2 gelernt haben, ist es manchmal notwendig, in Kugelkoordinaten zu arbeiten. Schreiben wir die Gleichung (296) in Kugelkoordinaten um,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi) - \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{l}}^2 \Psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{l}}^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (342)$$

wobei $\hat{\mathbf{l}}^2$ einen Operator des Drehimpulsquadrats¹⁶ bezeichnet, s. auch (72). Eine wesentliche Vereinfachung stellt ein sphärisch-symmetrischer Fall dar. In dieser Situation besitzt Ψ keine Winkelabhängigkeiten. Dann erhalten wir

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r\Psi(r, t)] - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi(r, t)}{\partial t^2} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r\Psi(r, t)] - \frac{1}{ru^2} \frac{\partial^2 [r\Psi(r, t)]}{\partial t^2}. \quad (343)$$

Bei endlichem $r \neq 0$ ergibt sich für $\psi = r\Psi$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, t) - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi(r, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (344)$$

Dies ist (bis auf die Einschränkung $0 < r < \infty$) nichts anderes als die 1D Wellengleichung (301). Die allgemeine Lösung hat also die Form [vgl. mit (324)]

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = C \frac{e^{i(kr \pm \omega t)}}{r}. \quad (345)$$

Die Konzepte des Wellenvektors, der Wellenlänge, der Frequenz, der Periode und der Phasengeschwindigkeit bleiben unverändert. Die wichtigsten Unterschiede zu ebenen Wellen sind:

- Die Gleichung für die Wellenfront ($t = t_0 = \text{const}$) lautet $kr = \text{const}$ und beschreibt eine Kugel \Rightarrow Kugelwellen.
- Das Maximum der Welle mit der Phase $kr - \omega t$ bewegt sich nach außen für wachsende $t \Rightarrow$ man hat mit einer *auslaufenden* Welle zu tun. Die Welle mit $kr + \omega t$ ist eine *einlaufende* Welle.
- Die Amplitude einer Kugelwelle fällt mit wachsendem r proportional zu $1/r$ ab.

4.3 Greensfunktion der Wellengleichung I

Wir kehren nun zur inhomogenen Gleichung (266) zurück. Sei $f(\mathbf{r}, t)$ der zeitabhängige Quellenterm auf der rechten Seite. Wir sind interessiert an der Lösung der Gleichung

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{r}, t). \quad (346)$$

Um diese zu lösen nehmen wir zunächst eine Fourier-Transformation bezüglich der Zeitvariable vor,

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \Psi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad f(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} f(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (347)$$

¹⁶Dieser wird in Details im Quantenmechanikkurs behandelt, s. z. B. L.D.Landau und E.M.Lifshitz, Band III, §26.

Eingesetzt in (346) liefert dieser Ansatz die *inhomogene Helmholtzsche Wellengleichung*:

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi f(\mathbf{r}, \omega), \quad (348)$$

wobei¹⁷ $k = \omega/u$. Diese Gleichung ist der Poisson-Gleichung (33) der Elektrostatik sehr ähnlich und läßt sich am bequemsten mit Hilfe der Greensfunktion (GF) lösen. Diese ist definiert als die Lösung der Gleichung

$$(\nabla^2 + k^2) G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (349)$$

Dann ist eine partikuläre Lösung durch

$$\Psi(\mathbf{r}, \omega) = \int dV' G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}', \omega) \quad (350)$$

gegeben. Aufgrund der Translationsinvarianz des „leeren“ Raums ist zu erwarten, dass die GF lediglich von $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ abhängt. Benutzt man nun den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten aus Abschnitt 4.2, so geht die Gleichung in die folgende über:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R G_k) + k^2 G_k = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \quad (351)$$

Für $R > 0$ haben wir es mit der Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators zu tun, deren Lösung gegeben ist durch

$$R G_k(R) = A e^{ikR} + B e^{-ikR}. \quad (352)$$

Im Grenzfall $R \rightarrow 0$ bei endlich bleibenden k erhalten wir eine Poisson-Gleichung. Deswegen erhalten wir in diesem Fall

$$\lim_{kR \rightarrow 0} G_k(R) = 1/R. \quad (353)$$

Mit diesen Erkenntnissen lautet die allgemeine Lösung

$$G_k(R) = A G_k^{(+)}(R) + B G_k^{(-)}(R) \quad \text{mit} \quad G_k^{(\pm)}(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R}. \quad (354)$$

Um (353) zu erfüllen, muss $A + B = 1$ gefordert werden. Nun fassen wir (347) und (350) zur Lösung der Wellengleichung zusammen,

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \Psi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int dV' G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}', \omega) e^{-i\omega t} \\ &= \int \int dV' dt' \left[\frac{d\omega}{2\pi} G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-i\omega(t-t')} \right] f(\mathbf{r}', t') = \int \int dV' dt' G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t'). \end{aligned} \quad (355)$$

Die neue Größe in dieser Gleichung ist die zeitabhängige Greensfunktion

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = G^{(\pm)}(R, \tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{-i\omega\tau} = \frac{1}{R} \delta(\tau \mp R/u), \quad (356)$$

wobei $\tau = t - t'$. Nach Wiederherstellung der Koordinaten- und Zeitabhängigkeiten erhalten wir

$$G^{(\pm)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{\delta(t - t' \mp |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/u)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (357)$$

Benutzt man beim Aufstellen der Lösung nach Vorschrift (355) die Funktion $G^{(+)}$, so erkennt man, dass dabei alle Ereignisse bei den Zeiten $t' = t - R/u$ beitragen. Diese liegen in der „Vergangenheit“,

¹⁷Eine Beschränkung auf die lineare Dispersion ist nicht notwendig. Eine beliebige Abhängigkeit $k(\omega)$ kann auf die gleiche Weise behandelt werden.

deswegen spricht man in diesem Fall von einer *retardierten* Greensfunktion. Analog hierzu nennt man $G^{(-)}$ *avancierte* Greensfunktion.

Die Relation (355) gibt nur die partikuläre Lösung der Gleichung an. Um eine allgemeine Lösung zu erhalten, muss man noch eine Lösung der homogenen Gleichung hinzuaddieren. Eine solche Lösung ergibt sich meistens aus der Betrachtung der Rand- bzw. Anfangsbedingungen. Üblicherweise hat man mit räumlich und zeitlich lokalisierten Quelltermen zu tun. Man unterscheidet dann zwischen zwei wichtigsten Situationen:

- Zur Zeit $t \rightarrow -\infty$ existiere eine Welle Ψ_{in} , die der homogenen Gleichung genügt. Dann gilt

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) + \int \int dV' dt' G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t'). \quad (358)$$

Die retardierte Natur der Greensfunktion gewährleistet, dass die Anfangsbedingung erfüllt ist.

- Zur Zeit $t \rightarrow \infty$ existiere eine Welle Ψ_{out} , die der homogenen Gleichung genügt. Dann gilt

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_{\text{out}}(\mathbf{r}, t) + \int \int dV' dt' G^{(-)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t'). \quad (359)$$

$G^{(-)}$ avanciert \Rightarrow nach dem Ausschalten der Quelle werden keine Signale mehr beobachtet.

Die häufigste Situation ist (358) bei $\Psi_{\text{in}} = 0$, dann ist die Lösung gegeben durch

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int dV' \frac{[f(\mathbf{r}', t')]_{\text{ret}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (360)$$

wobei *ret* bedeutet, dass der Integrand zur retardierten Zeit $t' = t - R/u$ auszuwerten ist.

4.4 Strahlung einer lokalisierten oszillierenden Quelle

4.4.1 Allgemeine Betrachtungen

Wir schauen uns nun die Lösungen der inhomogenen Wellengleichung an. Die Zeitabhängigkeit der Quellenterme sei oszillatorisch mit Frequenz ω :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (361)$$

Laut (360) ist die Lösung der Wellengleichung gegeben durch (wir beschränken uns zunächst auf Wellen im Vakuum, $u = c$)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \int dt' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c - t) = \\ &= e^{-i\omega t} \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = e^{-i\omega t} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (362)$$

[Dies ist eine Verallgemeinerung von Relation (172) auf zeitabhängige Felder.] Die Zeitabhängigkeit ist also trivial und entspricht der des Quellenterms. Außerdem ist sie sowohl mit der des elektrischen als auch des magnetischen Feldes identisch. Die Felder bestimmen sich aus

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}, \quad (363)$$

und aus

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{E} = i \frac{Z_0}{k} \nabla \times \mathbf{H}, \quad (364)$$

wobei $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ der *Wellenwiderstand des Vakuums* ist.

Die zwei in dem Problem auftauchenden Längenskalen sind: (i) die Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/\omega$, und (ii) die räumliche Ausdehnung der Quelle d . Sie bestimmen drei Bereiche, in denen die Lösung (362) unterschiedliche physikalische Eigenschaften aufweist. Diese Bereiche sind:

- $d \ll r \ll \lambda$ – die Nahzone,
- $d \ll r \sim \lambda$ – die Zwischenzone,
- $d \ll \lambda \ll r$ – die Fern- oder Wellenzone.

In der Nahzone gilt $kr = 2\pi r/\lambda \ll 1$, deswegen ist der Exponent in (362) nahezu 1 \Rightarrow die Felder sind denen des statischen Falls bis auf den Oszillationsvorfaktor $\exp(-i\omega t)$ identisch. Sie sind *quasistationär*.

In der Fernzone $kr \gg 1$ gilt

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \approx r \sqrt{1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}} = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \quad (365)$$

wobei $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Damit erhalten wir

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}. \quad (366)$$

Dies ist nichts anderes als eine auslaufende Kugelwelle mit einem winkelabhängigen Faktor. Wenn auch die Abmessungen der Quelle $d \ll \lambda$ dann kann auch der Exponent entwickelt werden,

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^n. \quad (367)$$

Diese Entwicklung nach dem kleinen Parameter ($k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'$) ist sehr effizient, s. nachfolgende Abschnitte. In der Zwischenzone sind die Rechnungen sehr kompliziert. Es kommen Vektormultipolentwicklungen zum Einsatz.

Was passiert mit dem Skalarpotential $\Phi(\mathbf{r}, t)$? Analog zu (362) erhalten wir in der Näherung $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow r$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \int dt' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c - t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(t' = t - r/c)}{r}. \quad (368)$$

Da die Ladung in einer lokalisierten Quelle erhalten bleibt ist das Feld *statisch* und es gibt keinen *elektrischen Monopolanteil* in der Strahlung.

4.4.2 Felder und Strahlung eines elektrischen Dipols

Wir beschränken uns hier auf den ersten Term der Entwicklung (367):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}'). \quad (369)$$

Um das Integral auszuwerten, betrachten wir z. B. die x -Komponente von $\int dV' \mathbf{r}' [\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')]$ und führen eine partielle Integration durch:

$$\int dV' x' \left(\frac{\partial J_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial J_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial J_{z'}}{\partial z'} \right) = \int_S da x' \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} - \int dV' J_{x'}. \quad (370)$$

Da \mathbf{J} eine lokalisierte Verteilung ist, kann S so gewählt werden, dass das erste Integral Null wird. Also erhalten wir die wichtige Aussage¹⁸:

$$\int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}) = - \int dV' \mathbf{r}' [\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')] = -i\omega \int V' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}'), \quad (371)$$

¹⁸Sie ist nicht im Widerspruch zu (181), denn in der vorliegenden Situation haben wir eine explizite Zeitabhängigkeit der Ströme, so dass $\text{div } \mathbf{J} = 0$ nicht mehr gilt.

wobei die letzte Identität aus der Kontinuitätsgleichung (154) sowie aus der Zeitabhängigkeit (361) folgt ($i\omega\rho = \nabla \cdot \mathbf{J}$). Das Vektorpotential ist also gegeben durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (372)$$

wobei \mathbf{p} das Dipolmoment der Strom/Ladungsverteilung bezeichnet, s. (51). Das Magnetfeld findet man mittels (363):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = -i \frac{\omega}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r} \right) = i \frac{k c}{4\pi} \mathbf{p} \times \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \\ &= i \frac{k c}{4\pi} \mathbf{p} \times \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \left(\frac{ik e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) \right] = \frac{k^2 c}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right), \end{aligned} \quad (373)$$

wobei $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ bezeichnet (s. vorhergehenden Abschnitt). Bei der Herleitung benutzten wir die Formel für $\nabla \times (\mathbf{a}\psi)$ aus Abschnitt 2.5.2. Das Magnetfeld steht also senkrecht sowohl zum Radius-Vektor als auch zum Dipolmoment. Für das elektrische Feld erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{ik}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left[(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \left(\frac{e^{ikr}}{r^2} - \frac{e^{ikr}}{ikr^3} \right) \right] \\ &= \frac{ik}{4\pi\epsilon_0} \left[-(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \times \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r^2} - \frac{e^{ikr}}{ikr^3} \right) + \left(\frac{e^{ikr}}{r^2} - \frac{e^{ikr}}{ikr^3} \right) \nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \right]. \end{aligned} \quad (374)$$

Der letzte Term in den eckigen Klammern kann mit Hilfe der Relation

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{r} - \mathbf{p} (\nabla \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p} - 3\mathbf{p} = -2\mathbf{p},$$

vereinfacht werden. Weiterhin gilt

$$\nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r^2} - \frac{e^{ikr}}{ikr^3} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r} \left[\frac{3e^{ikr}}{r^3} \left(\frac{1}{ikr} - 1 \right) + \frac{ik e^{ikr}}{r^2} \right], \quad (375)$$

deswegen erhalten wir für den ersten Term in den eckigen Klammern von (374):

$$\begin{aligned} -(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \times \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r^2} - \frac{e^{ikr}}{ikr^3} \right) &= -(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \left[\frac{3e^{ikr}}{r^2} \left(\frac{1}{ikr} - 1 \right) + \frac{ik e^{ikr}}{r} \right] \\ &= -(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{ik e^{ikr}}{r} + [\mathbf{p} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})] \frac{3e^{ikr}}{r^2} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right). \end{aligned} \quad (376)$$

Fasst man nun alle Terme zusammen, so erhält man

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \frac{e^{ikr}}{r^3} (1 - ikr) \right]. \quad (377)$$

Im Gegensatz zum Magnetfeld hat das elektrische Feld Komponenten entlang von \mathbf{n} und senkrecht dazu. In den Spezialfällen vereinfachen sich die Felder wie folgt:

- Fernzone: $r \gg \lambda \Rightarrow kr \gg 1$. Hier gilt

$$\mathbf{H} = \frac{k^2 c}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \mathbf{E} = Z_0 \mathbf{H} \times \mathbf{n}. \quad (378)$$

Der Abfall $1/r$ ist das typische Verhalten für *Strahlungsfelder*.

- Nahzone: $kr \ll 1$. Hier ergibt sich

$$\mathbf{H} = \frac{i\omega}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{1}{r^2}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3}. \quad (379)$$

Das elektrische Feld ist bis auf den oszillierenden Vorfaktor gleich dem eines Dipols, s. das Feld des Potentials (44). Das Magnetfeld ist mit einem Faktor kr unterdrückt \Rightarrow die Felder in der Nahzone sind überwiegend elektrischer Natur. \mathbf{H} verschwindet im Limes $kr \rightarrow 0$, dann erstreckt sich die Nahzone bis $r \rightarrow \infty$.

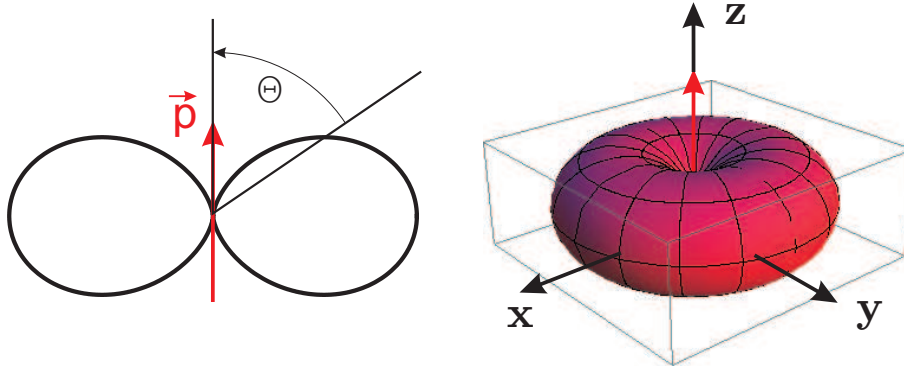


Abbildung 19:

Nun berechnen wir die abgestrahlte Leistung $P = -dE_{\text{el}}/dt = -\int dV \partial w/\partial t$, wobei E_{el} die Energie des Strahlungssystems ist und w die Energiedichte. Wir gehen zurück zum Theorem von Poynting (282). In unserer Situation folgt nun

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad \text{mit } \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \Rightarrow P = \int dV \operatorname{div} \mathbf{S} = \int_S da \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}. \quad (380)$$

Die Felder sind nun jedoch zeitabhängig und komplexwertig. Die (reellen) physikalischen Felder finden sich aus

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t}]. \quad (381)$$

\mathbf{S} muss reell sein, deswegen sollte man

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t}] \times [\mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i2\omega t}] \end{aligned} \quad (382)$$

benutzen. Wird über mehrere Schwingungsperioden gemittelt, so erhält man

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})]. \quad (383)$$

Damit ergibt sich für die abgestrahlte Leistung

$$P = \frac{1}{2} \int_S da \operatorname{Re} [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)]. \quad (384)$$

Aus der Definition des Raumwinkels ist uns bekannt, dass $da = r^2 d\Omega$ gilt. Damit ist die in das Raumwinkelement abgestrahlte Leistung gegeben durch

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{r^2}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)]. \quad (385)$$

In der Fernzone können wir die Ausdrücke (378) einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{r^2 Z_0}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{H}^*] \} = \frac{r^2 Z_0}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} H^2 - \mathbf{H}(\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{n})] \} \\ &= \frac{r^2 Z_0}{2} \operatorname{Re} (H^2 - |\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|^2) = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2} k^4 p^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (386)$$

weil das Spatprodukt $(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$ verschwindet und $|\mathbf{n} \times \mathbf{p}|^2 = p^2 \sin^2 \theta$ gilt. Dabei sind wir davon ausgegangen, dass \mathbf{p} parallel zur z -Achse ausgerichtet ist, s. Abbildung 19. Die totale abgestrahlte Leistung ist dann mit $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$

$$P = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2} k^4 p^2 \int d\Omega \sin^2 \theta = \frac{c^2 Z_0}{16\pi} k^4 p^2 \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \frac{c^2 Z_0}{12\pi} k^4 p^2 \sim k^4 p^2. \quad (387)$$

Sie ist also quadratisch im Dipolmoment p und quartisch (!) in der Frequenz/dem Wellenvektor k .

4.5 Greensfunktion der Wellengleichung II

Wir gehen nun zurück zu (346). Die Gleichung für die entsprechende Greensfunktion lautet

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (388)$$

Aufgrund der Identitäten

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') &= \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')]}, \\ G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')]} \end{aligned} \quad (389)$$

erhalten wir eine algebraische Gleichung für $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)$, die mit elementaren Mitteln gelöst werden kann,

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \omega^2/u^2}. \quad (390)$$

Laut der Umkehrungsvorschrift für die FT erhalten wir für die GF

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \int d^3k \int d\omega \frac{1}{4\pi^3} \frac{e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')]}{k^2 - \omega^2/u^2}. \quad (391)$$

Diese Integrale sind jedoch hochgradig singulär und erfordern eine *Regularisierung*. Im nachfolgenden Abschnitt werden wir die erforderlichen Techniken erlernen.

4.5.1 Elemente der Funktionentheorie. Residuensatz.

Eine Funktion $f(z)$ in der komplexen Ebene ($z = x + iy$) ist differenzierbar an der Stelle z_0 wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = f'(z_0) \quad (392)$$

existiert. Dabei kann $\Delta z \rightarrow 0$ eine Annäherung an Null aus beliebiger Richtung bedeuten, weswegen die Differenzierbarkeit auf der komplexen Ebene restriktiver ist als z. B. die auf der reellen Achse. Insbesondere folgen daraus die *Cauchy-Riemannsche Bedingungen* an die Real- und Imaginärteile der Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (393)$$

Diese folgen aus der elementaren Betrachtung der komplexen Ableitung:

$$f'(z) = \left. \frac{\Delta f}{\Delta z} \right|_{\Delta z \rightarrow 0} = \left. \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \right|_{\Delta z \rightarrow 0}$$

auf zwei verschiedenen Wegen: einmal parallel zur y -Achse und einmal parallel zur x -Achse (s. Abbildung 20):

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left. \frac{\Delta u}{\Delta x} \right|_{\Delta x \rightarrow 0} + i \left. \frac{\Delta v}{\Delta x} \right|_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ f'(z) &= \left. \frac{\Delta u}{i\Delta y} \right|_{\Delta y \rightarrow 0} + i \left. \frac{\Delta v}{i\Delta y} \right|_{\Delta y \rightarrow 0} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Die beiden Ergebnisse sind nur gleich, wenn die Bedingungen (20) gelten. Daran sieht man, dass

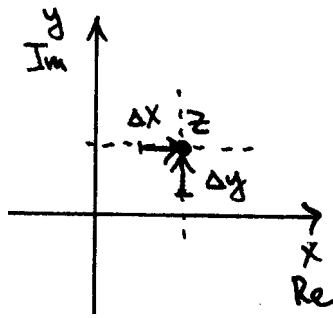


Abbildung 20:

die Differenzierbarkeit im Komplexen sehr viel stärker ist als die auf der reellen Achse. Denn aus (20) folgt, dass die Funktionen u und v die Laplace-Gleichung in 2D erfüllen: Leitet man die erste Bedingung nach x ab, die zweite nach y und addiert sie, so folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (394)$$

Viele Funktionen sind nur in bestimmten Gebieten auf der komplexen Ebene differenzierbar. Ein *Gebiet* G ist dabei eine offene Punktmenge, in der man je zwei Punkte durch einen ganz in diesem Gebiet gelegenen Streckenzug verbinden kann. Ein Gebiet heißt *einfach-zusammenhängend*, wenn jeder geschlossene Weg in G nur Punkte aus dem Inneren von G umschließt. Jede geschlossene Schleife lässt sich also auf einen Punkt zusammenziehen, ohne das Gebiet zu verlassen.

Eine Funktion ist *eindeutig* in einem Gebiet G , wenn man die Koordinate z alle möglichen Wege C in G durchlaufen lassen kann, und $f(z)$ nach Rückkehr zum Ausgangspunkt wieder denselben Wert annimmt.

(Anti-)Beispiel: Der Logarithmus ist eine mehrdeutige Funktion. Es gilt

$$f(z) = \ln z = \ln(|z| e^{i\phi}) = \ln|z| + i\phi. \quad (395)$$

Nach einem Durchlaufen des Einheitskreises $C : |z| = 1$ wird ϕ zu $\phi + 2\pi$, und $\ln z$ verändert sich. Die Quadratwurzel

$$f(z) = \sqrt{z} = |z|^{1/2} e^{i\phi/2}, \quad (396)$$

ist ebenfalls nicht eindeutig. Diese beiden Funktionen kann man jedoch eindeutig machen wenn man z. B. nur Werte $-\pi < \phi < \pi$ erlaubt. Dann ist das Gebiet G , in dem die Funktionen eindeutig sind, die ganze komplexe Ebene ohne die negative reelle Achse (also auf der komplexen Ebene mit einem *Schnitt*). Die Prozedur der Phasenfestlegung wird auch Identifizierung der regulären Zweige genannt. Der Logarithmus hat offensichtlich unendlich viele reguläre Zweige und die Quadratwurzel nur zwei davon.

Definition 2 Eine Funktion $f(z)$ heißt **analytisch** oder **regulär** in einem Gebiet G , wenn sie dort überall differenzierbar und eindeutig ist.

Eine wichtige Eigenschaft der analytischen Funktionen ist die Tatsache, dass sie in G , in dem sie analytisch sind, auch beliebig oft stetig differenzierbar sind.

Für Wegintegrale über analytische Funktionen gilt folgendes

Theorem 9 Sei G einfach-zusammenhängend und $f(z)$ analytisch. Sei weiterhin C ein Weg in G , dann hängt das Integral

$$\int_{z_0, C}^z dz f(z) \quad (397)$$

nur von den Endpunkten z_0 und z ab, nicht aber von C .

In der Tat erhalten wir nach Ausschreiben der Komponenten

$$\begin{aligned} \int_C dz f(z) &= \int_C (dx + idy)(u + iv) = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy) \\ &= \int_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{w}_1 + i \int_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{w}_2, \end{aligned} \quad (398)$$

wobei die neuen Vektorfelder durch

$$\mathbf{w}_1 = (u, -v)^T, \quad \mathbf{w}_2 = (v, u), \quad \text{und} \quad d\mathbf{l} = (dx, dy)^T, \quad (399)$$

definiert sind. Das Gesamtintegral ist wegunabhängig wenn diese Vektorfelder Gradienten eines Skalarfeldes sind. Dies wird am einfachsten überprüft durch die Berechnung der Rotation,

$$\nabla \times \mathbf{w}_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ u & -v \end{vmatrix} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{w}_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ v & u \end{vmatrix} = 0. \quad (400)$$

Beide Rotationen verschwinden aufgrund der Cauchy-Riemann-Bedingungen solange $f(z)$ analytisch ist \Rightarrow das Wegintegral ist wegunabhängig. Daraus folgt der fundamentale **Cauchysche Integralsatz**:

Theorem 10 Sei $f(z)$ eine auf einem einfach-zusammenhängenden Gebiet G analytische Funktion und C ein geschlossener Weg in G . Dann gilt

$$\oint_C dz f(z) = 0. \quad (401)$$

Beispiel: Man berechne das Integral

$$I = \oint_C \frac{dz}{z - z_0} \quad (402)$$

entlang eines beliebigen geschlossenen Weges C , der den Punkt z_0 umschließt. Aufgrund des Cauchyschen Satzes ist das Integral entlang C identisch zu dem entlang eines Einheitskreises $C_0 : z = z_0 + e^{i\phi}$ mit dem Ursprung in z_0 . Die Kontur darf man also deformieren. Damit ergibt sich

$$I = \oint_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{ie^{i\phi}}{e^{i\phi}} = i \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi i. \quad (403)$$

Eine **Anwendung** dieses Theorems hatten wir bereits im **Beispiel 3** von Abschnitt 4.1.1. Dort durfte man die Integrationswege verschieben weil es dazwischen keine Pole gab.

Die Erkenntnis (403) hilft uns ein weiteres Theorem zu formulieren:

Theorem 11 Cauchysche Integralformel: Sei C ein geschlossener Weg, der ganz in einem Gebiet G liegt, in dem die Funktion $f(z)$ analytisch ist. Dann gilt für jeden Punkt z_0 aus dem Innengebiet von C

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{z - z_0}. \quad (404)$$

Ferner gilt für die Ableitungen n -ter Ordnung

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}. \quad (405)$$

Die erste Aussage beweist man indem man eine analytische Funktion

$$F(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

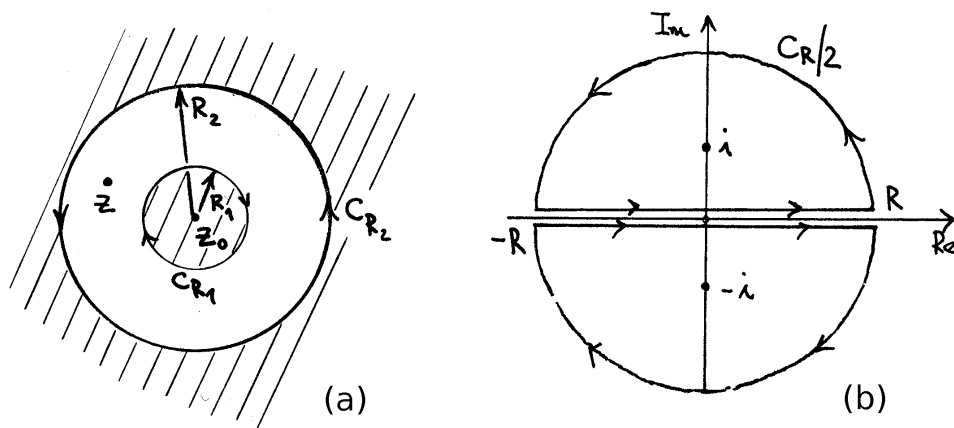


Abbildung 21:

definiert (weil $F(z_0) = f'(z_0)$ und wohldefiniert). Dann gilt

$$\oint dz F(z) = 0 = \oint dz \frac{f(z)}{z - z_0} - f(z_0) \oint \frac{dz}{z - z_0}.$$

Die Formel (405) hilft uns eine in G analytische Funktion in eine Taylor-Reihe um den Punkt z_0 zu entwickeln,

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m \quad \text{wobei} \quad a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}}. \quad (406)$$

Kann man noch entwickeln wenn die Funktion nicht überall analytisch ist? Es gibt drei verschiedene Arten von punktförmigen Nicht-Analytizitäten:

- **Pole:** Wenn $f(z_0)$ unbestimmt, jedoch $(z - z_0)^n f(z)$ analytisch an der Stelle z_0 . Das kleinste n ist die *Ordnung* des Pols. **Beispiel:** Die Funktion $f(z) = 1/(z^2 + z_0^2)$ hat zwei Pole erster Ordnung bei $z_{1,2} = \pm iz_0$.
- **Verzweigungspunkte:** Wenn sich die Funktion $f(z)$ nach einem Umlauf entlang eines geschlossenen Weges C um z_0 herum ändert, dann ist z_0 ein Verzweigungspunkt. **Beispiel:** $z_0 = 0$ ist der Verzweigungspunkt der Quadratwurzel, s. oben.
- **Wesentliche Singularitäten:** z_0 ist eine wesentliche Singularität wenn es weder ein Pol noch ein Verzweigungspunkt ist. **Beispiel:** $\exp(1/z)$ hat eine wesentliche Singularität bei $z = 0$.

Die Reihenentwicklungen existieren nur in Gebieten, in denen $f(z)$ analytisch ist. Die Singularitäten kann man ausschließen wenn *Ringgebiete* betrachtet werden, Abbildung 21 a). Für $R_1 < |z| < R_2$ ist $f(z)$ analytisch, deswegen können wir (404) benutzen wenn $C = C_{R_1} \cup C_{R_2}$ gilt. Dann erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} dz' \frac{f(z')}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} dz' \frac{f(z')}{z' - z}. \quad (407)$$

Im ersten Integral gilt $|z' - z_0| > |z - z_0|$, deswegen können wir auf folgende Weise entwickeln

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z' - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^{n+1}}. \quad (408)$$

Andererseits für $|z - z_0| > |z' - z_0|$, wenn also z' auf C_{R_1} liegt, können wir auf folgende Weise entwickeln:

$$\frac{1}{z' - z} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z' - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z' - z_0}{z - z_0} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (z' - z_0)^{n-1} (z - z_0)^{-n}. \quad (409)$$

Man definiere nun „negative“ Taylor-Koeffiziente

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} dz' \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{-n+1}}. \quad (410)$$

Damit gilt

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} dz' \frac{f(z')}{z' - z} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}. \quad (411)$$

Da $C_{1,2}$ beliebige Wege im Ringgebiet sind, kann man die Definition der Taylor-Koeffiziente (406) auch auf negative n erweitern. Dann erhält man die *Laurent-Entwicklung*:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (412)$$

Wenn die Funktion $f(z)$ in z_0 ein Pol m -ter Ordnung hat, dann sind alle a_n für $n < -m$ Null. Besonders wichtig ist der Koeffizient a_{-1} , auch *Residuum* der Funktion $f(z)$ an der Stelle z_0 genannt:

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}. \quad (413)$$

Warum ist er so wichtig? Aus der Definition von a_{-1} folgt, dass wenn C ein z_0 umschließender Weg ist, dann gilt der *Residuensatz*

Theorem 12

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz f(z), \quad (414)$$

siehe (410) für $n = -1$. Also lässt sich ein Wegintegral alleine durch die Entwicklung des Integranden berechnen! Liegen innerhalb von C mehrere Pole, so muss man natürlich über alle Residuen summieren. Eine sehr praktische Vorschrift zum Ausrechnen der Residuen für Pole m -ter Ordnung ist die folgende Formel

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1} [(z - z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}. \quad (415)$$

Mit Hilfe des Residuensatzes lassen sich viele bestimmte Integrale auf der reellen Achse sehr effizient berechnen.

Beispiel 1:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad \left(= \arctg x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi \right)$$

Dieses Integral lässt sich auch auf einem anderen Weg berechnen. Man betrachte $C = [-R, R] \cup C_{R/2}$, wobei $[-R, R]$ einen Abschnitt und $C_{R/2}$ einen Halbkreis in der oberen Halbebene bezeichnet, s. Abbildung 21 b). Dann gilt

$$\oint_C dz f(z) = \int_{-R}^R dz f(z) + \int_{C_{R/2}} dz f(z),$$

wenn $f(z) = 1/(1+z^2)$ eine *analytische Fortsetzung* des Integranden von I auf die komplexe Ebene ist. Für große R lässt sich das letztere Integral auf folgende Weise abschätzen,

$$\left| \int_{C_{R/2}} dz \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{(1/2) 2\pi R}{R^2 - 1} \Big|_{R \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (416)$$

Dies hat zur Folge, dass

$$\oint_{C_{R \rightarrow \infty}} dz f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z)$$

gilt, wobei die rechte Seite unserem Integral I gleich ist. Die linke Seite ist jedoch gleich der Summe der Residuen von $f(z)$ in der oberen Halbebene multipliziert mit dem Faktor $2\pi i$. Die Pole findet man aus der Darstellung

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right). \quad (417)$$

Hier erkennt man, dass die Funktion $f(z)$ zwei Pole $z_{1,2} = \pm i$ mit den Residuen $\pm 1/(2i)$ hat. Nur $z_1 = i$ liegt in der oberen Halbebene. Das entsprechende Residuum ist $1/(2i)$. Deswegen erhalten wir für das Integral $I = (2\pi i)(1/2i) = \pi$ wie erwartet¹⁹.

Beispiel 2: Fourier-Transformierte von $f(x)$ aus Beispiel 1,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{1+x^2}. \quad (418)$$

Hier existiert keine Stammfunktion! \Rightarrow Der Residuensatz ist die Methode der Wahl. Die Pole sind die gleichen wie im Beispiel 1, die Residuen sind $\pm \exp(\pm k)/2i$. Man muss jedoch diesmal beachten, dass die Abschätzung der Form (416) für $C_R/2$, welches in der oberen Halbebene verläuft, nur für $k < 0$ gilt. Denn andernfalls divergiert das Integral entlang von $C_R/2$. Für positive k muss die Kontur in der unteren Halbebene liegen. Für das Integral erhalten wir also

$$I = 2\pi i \begin{cases} \frac{1}{2i} e^k & \text{für } k < 0 \\ (-1) \left(-\frac{1}{2i}\right) e^{-k} & \text{für } k > 0 \end{cases} = \pi [\Theta(-k) e^k + \Theta(k) e^{-k}] = \pi e^{-|k|}, \quad (419)$$

wobei der Vorfaktor -1 in der unteren Zeile dadurch entsteht, dass die Kontur in der unteren Halbebene im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

4.5.2 Greensfunktion der Wellengleichung via Residuensatz

Nun kehren wir zu unserer ungelösten Frage zurück: Wie berechnet man die Integrale in (391)? Die Frequenzintegration ist gegeben durch

$$\int d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{k^2 - \omega^2/u^2}. \quad (420)$$

Dies ist die Lösung der Wellengleichung mit einer δ -förmigen Quelle, die nur zum Zeitpunkt t' eine Welle ausgestrahlt hat. Daher ist die Lösung für $t < t'$ identisch Null (Retardierungseffekte!) \Rightarrow sie enthält einen Faktor $\Theta(t-t')$. Aus Beispiel 2 wissen wir jedoch, dass man einen solchen Faktor enthält, wenn der Integrand analytisch in der oberen Halbebene ist und die Pole allesamt in der unteren Halbebene liegen. Also „schieben“ wir die Pole von der reellen Achse in die untere Halbebene mit Hilfe der Transformation $\omega \rightarrow \omega + i\epsilon$, wobei ϵ infinitesimal klein ist. Dann ergibt sich für das Integral (420)

$$= \Theta(t-t') \frac{i\pi}{k} \left[e^{-iku(t-t')} - e^{iku(t-t')} \right], \quad (421)$$

wobei wir bereits $\epsilon = 0$ gesetzt haben. Damit hat der Ausdruck für die Greensfunktion die folgende Form:

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = i\pi \Theta(t-t') \int \frac{d^3k}{4\pi^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{1}{k} \left[e^{-iku(t-t')} + e^{iku(t-t')} \right]. \quad (422)$$

Wir legen nun die z -Achse des Koordinatensystems entlang von \mathbf{k} . Dann gilt $\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = kR \cos \theta$ mit $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ und $d^3k = dk d\theta k^2 2\pi \sin \theta$. Nach Ausführung der Winkelintegration über θ erhalten wir

$$= \frac{\Theta(t-t')}{2\pi R} \int_0^\infty dk \left[e^{-iku(t-t')} - e^{iku(t-t')} \right] (e^{ikR} - e^{-ikR}).$$

¹⁹Natürlich könnte man die Kontur auch in der unteren Halbebene schließen. Das Vorzeichen des Residuums würde sich mit dem Vorzeichen aufheben, welches durch die Integration im Uhrzeigersinn entstehen würde.

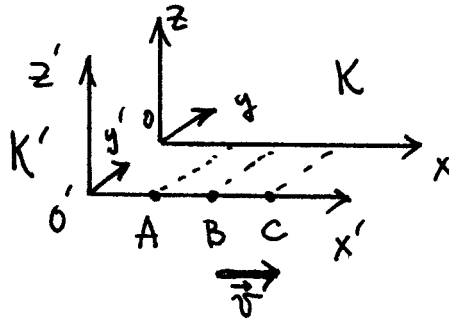


Abbildung 22:

Da der Integrand nun symmetrisch in k ist, ist das Integral gleich der Hälfte von einem Integral, dessen Integrationsgrenzen $-\infty$ und ∞ sind. Anschließende Integration über k führt aufgrund der Eigenschaft (304) zu δ -Funktionen:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Theta(t-t')}{R} [\delta(R-u(t-t')) + \delta(R+u(t-t'))] \\
 &= \Theta(t-t') \frac{\delta(R-u(t-t'))}{R} = G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')
 \end{aligned} \tag{423}$$

aus (357). Es sei noch anzumerken, dass die avancierte GF durch Verschiebung der Pole in die obere Halbebene berechnet werden kann.

5 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Von nun an benutzen wir die Gaußschen Einheiten.

5.1 Spezielle Relativitätstheorie

5.1.1 Einsteins Relativitätsprinzip

Zunächst führen wir die wichtigsten Begriffe ein und stellen die Postulate der speziellen Relativitätstheorie vor.

Ein Bezugssystem nennt sich *Inertialsystem*, wenn sich dort ein Objekt, auf welches keine Kräfte wirken, mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Postulat 1: Alle physikalischen Gesetze sind gleich in allen Inertialsystemen.

Postulat 2: Die Lichtgeschwindigkeit c (im Vakuum) ist in allen Inertialsystemen zu allen Zeiten gleich und unabhängig von der Bewegung der Quelle.

Diese beiden Postulate nennt man Einsteinsches Relativitätsprinzip.

Die wichtigste Folgerung ist die Tatsache, dass die Zeit im Gegensatz zum klassischen Bild, in dem sie absolut und in allen Inertialsystemen gleich ist, vom Bezugssystem abhängt. Dies sieht man am besten im folgenden Experiment. Man nehmen an, ein Bezugssystem K' bewege sich entlang der x' -Achse relativ zum Bezugssystem K , s. Abbildung 22. Seien A , B und C drei Punkte in K' , so dass $AB = BC$. Zum Zeitpunkt $t' = 0$ werden aus dem Punkt B zwei Lichtsignale in Richtungen von A und C abgeschickt. In K' kommen die Lichtsignale in A und C *gleichzeitig* an. Aus K gesehen bewegt sich A in Richtung des Signals wohingegen C sich von der Quelle entfernt. Da die Lichtgeschwindigkeit in diesem Bezugssystem ebenfalls c beträgt, kommt das Signal in A *früher* als in C an. Der Zeitverlauf ist also *unterschiedlich* in verschiedenen Bezugssystemen.

5.1.2 Abstand und Eigenzeit

Ein *Ereignis* wird durch den Ort $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ und durch den Zeitpunkt t charakterisiert. Seien \mathbf{r}_1 und t_1 Ort und Zeitpunkt des Aussendens eines (Licht)signals, welches zur Zeit t_2 am Ort \mathbf{r}_2

empfangen wird. Dann gilt

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = 0. \quad (424)$$

Das gleiche Experiment kann auch aus einem anderen Inertialsystem K' betrachtet werden. Aufgrund der Invarianz von c gilt

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1)^2 = 0. \quad (425)$$

Man definiere den *Abstand* zwischen zwei Ereignissen durch

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}. \quad (426)$$

Aus der Invarianz von c in verschiedenen Bezugssystemen folgt also, dass ein verschwindender Abstand zwischen zwei Ereignissen in einem Bezugssystem auch das Verschwinden des Abstands in allen anderen Inertialsystemen impliziert. Man betrachte nun infinitesimale Abstände

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2. \quad (427)$$

Offensichtlich gilt in verschiedenen Bezugssystemen $ds = 0 = ds'$. ds und ds' sind jedoch infinitesimale Größen der gleichen Ordnung $\Rightarrow ds^2 = a ds'^2$, wobei a eine skalare Konstante ist, die nur von der relativen Geschwindigkeit $v = |\mathbf{v}|$ der Bezugssysteme abhängen kann. Eine Abhängigkeit von \mathbf{r} ist wegen der Homogenität des Raumes nicht erlaubt. Eine Abhängigkeit von der Richtung \mathbf{v} würde der Isotropie des Raumes widersprechen. Hätte man nun drei Bezugssysteme K , K_1 und K_2 , so würden folgende Relationen gelten:

$$ds^2 = a(v_1) ds_1^2, \quad ds^2 = a(v_2) ds_2^2, \quad ds_1^2 = a(v_{12}) ds_2^2, \quad (428)$$

wobei $v_{1,2}$ die Geschwindigkeiten der Bezugssysteme $K_{1,2}$ relativ zu K sind und v_{12} die relative Geschwindigkeit von K_1 und K_2 . Aus diesen Relationen folgt

$$\frac{a(v_2)}{a(v_1)} = a(v_{12}). \quad (429)$$

v_{12} hängt jedoch nicht nur von $v_{1,2}$ sondern auch vom Winkel zwischen diesen beiden Vektoren ab. Dieser taucht in $a(v_{12})$ nicht auf \Rightarrow es gibt nur eine Möglichkeit für die Funktion $a(v) = 1$. Damit gilt $ds^2 = \text{const} \Rightarrow s = \text{const}$ in allen Bezugssystemen! Aus diesem Grund gibt s eine Möglichkeit, die Ereignisse zu klassifizieren. Solche mit $s^2 > 0$ nennt man *zeitartig*, solche mit $s^2 < 0$ *raumartig* und solche mit $s^2 = 0$ *lichtartig*. Realer Physik können nur zeitartige und lichtartige Ereignisse entsprechen. Sie liegen innerhalb bzw. auf dem sogenannten *Lichtkegel*, s. Abbildung 23.

Oben haben wir gesehen, dass die Zeit in verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich verläuft. Wie sieht der Zusammenhang mathematisch aus? Betrachten wir eine im Bezugssystem K' ruhende Uhr. Die relative Geschwindigkeit des Beobachtersystems K sei \mathbf{v} . In K legt die Uhr während der Zeit dt die Strecke $\sqrt{d\mathbf{r}^2}$ zurück. Die Zeit, die in K' während dessen vergeht ist dt' . Damit ist der Abstand gegeben durch

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2 dt'^2. \quad (430)$$

Da $d\mathbf{r}^2/dt^2 = v^2$ gilt erhalten wir sofort die *Zeitdilatation*:

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (431)$$

t' gemessen im sich bewegenden Bezugssystem nennt sich *Eigenzeit*.

5.1.3 Lorentz-Transformation

Wir wissen nun wie sich die Zeit beim Übergang von K' zu K und umgekehrt transformiert. Wie sieht es nun mit $\mathbf{r} = (x, y, z)$ aus? Wir wissen, dass der Abstand

$$s = \sqrt{c^2 t^2 - \mathbf{r}^2} \quad (432)$$

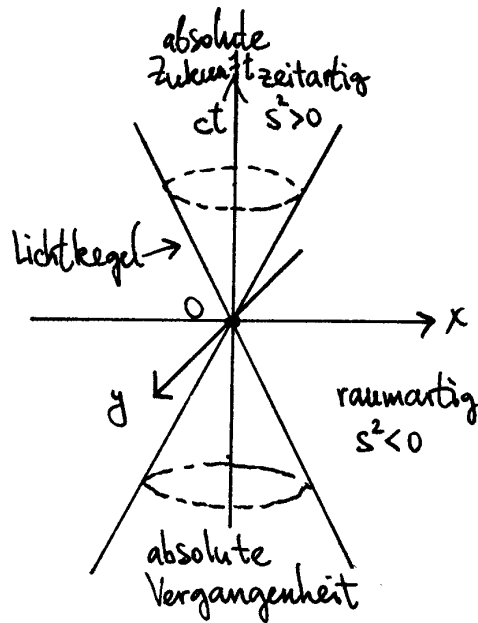


Abbildung 23:

bei diesen Transformationen erhalten bleiben muss. Dies ist nichts anderes als die Länge eines Vektors in einem 4-dimensionalen (4D) Raum. Diese bleibt erhalten bei trivialen Verschiebungen der Koordinatensysteme – sie sind für uns uninteressant. Die weniger trivialen Transformationen sind die Drehungen. Davon gibt es 6 verschiedene Arten: in den Flächen xy , zy , xz , tx , ty und tz . Die ersten drei sind einfache Drehungen im 3D-Unterraum. Die für uns besonders interessanten Transformationen sind die letzten drei. Betrachten wir die Drehung in der tx -Fläche. Dann muss $c^2t^2 - x^2$ erhalten bleiben und gleich $c^2t'^2 - x'^2$ sein. Durch explizites Nachrechnen stellt man fest, dass die folgende Transformation dies gewährleistet,

$$x = x' \operatorname{ch} \alpha + ct' \operatorname{sh} \alpha, \quad ct = x' \operatorname{sh} \alpha + ct' \operatorname{ch} \alpha, \quad (433)$$

wobei α den Transformationsparameter („Winkel“, auch *Rapidity* genannt) bezeichnet. Betrachten wir die Bewegung des Koordinatenursprungs O' in K , $x' = 0$. Dann gilt

$$x = ct' \operatorname{sh} \alpha, \quad ct = ct' \operatorname{ch} \alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{th} \alpha = v/c, \quad (434)$$

da x/t die Geschwindigkeit der relativen Bewegung der Koordinatensysteme K und K' ist. Daraus folgen

$$\operatorname{sh} \alpha = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \beta \gamma, \quad \operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma. \quad (435)$$

Diese Relation müssen nun in (433) eingesetzt werden und man erhält die *Lorentz-Transformation* oder *Lorentz-Boost*:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (436)$$

Beispiel: Man betrachte ein Lineal mit den Endpunkten bei $x_{1,2}$ im Bezugssystem K . Aus einem sich bewegenden System K' haben wir für $x'_{1,2}$ folgende Relationen

$$x_{1,2} = \frac{x'_{1,2} + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (437)$$

Damit sind die Längen $\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ des Lineals unterschiedlich:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (438)$$

Sei $L_0 = \Delta x$ die „Eigenlänge“ des Lineals, dann erscheint es in jedem sich bewegenden Bezugssystem kürzer,

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (439)$$

Das ist die *Lorentzkontraktion*.

5.1.4 Vierervektoren und Vierertensoren

Unser Ziel ist es, die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik in eine Form zu bringen, die unter Lorentz-Transformationen invariant bleibt. Wie wir gerade gesehen haben müssen wir das Konzept der absoluten Zeit aufgeben und die Zeit zu einer Koordinate im 4D Raum machen. Das Skalarprodukt hat für solche *Vierervektoren* (ct, \mathbf{r}) dann die Form (427). Es liegt nahe, dass, um zu einer relativistischen Formulierung der Elektrodynamik zu gelangen, man die Vierervektoren bzw. Vierertensoren konstruieren muss, die beim Übergang $c \rightarrow \infty$ die konventionellen Vektoren \mathbf{E} , \mathbf{B} etc. ergeben. Wir brauchen daher eine

Definition 3 Vier Größen A^0 , A^1 , A^2 und A^3 sind Komponenten eines Vierervektors A^i wenn sie sich unter der Lorentz-Transformation wie die Komponenten von (ct, \mathbf{r}) transformieren, nämlich wie

$$A^0 = \gamma(A'^0 + \beta A'^1), \quad A^1 = \gamma(A'^1 + \beta A'^0), \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3. \quad (440)$$

oder

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} = \Lambda A'^i. \quad (441)$$

Das Längenquadrat ist definiert durch

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Dies kann man kompakter darstellen wenn man zwischen den *kontravarianten* A^i und den *kovarianten* A_i Vierervektoren unterscheidet. Der Zusammenhang ist wie folgt,

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (442)$$

Dann gilt für das Quadrat der Länge

$$\sum_{i=0}^3 A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = A^i A_i, \quad (443)$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen die Einsteinsche Summenregel benutzt haben: es wird über alle doppelt vorhandene Indizes summiert. A^0 nennt man die Zeitkomponente und $A^{1,2,3}$ die Raumkomponenten des Vierervektors. Das Längenquadrat kann entweder positiv, negativ oder Null sein. Dann spricht man von zeitartigen, raumartigen und Null-Vierervektoren. Das einfachste Beispiel für ko- und kontravariante Vierervektoren ist $r^i = (ct, \mathbf{r})$ und $r_i = (ct, -\mathbf{r})$. Mit Hilfe der Vorschrift (443) kann man aus zwei Vierervektoren ein Skalar bilden,

$$A^i B_i = A^0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (444)$$

Definition 4 A^{ik} ist ein Vierertensor vom Rang 2 wenn seine 16 Komponenten sich wie Produkte zweier Vierervektoren transformieren. A^{ik} sind dann die kontravarianten, A_{ik} die kovarianten und A_i^k die gemischten Komponenten des Vierertensors A .

Wenn ein Tensor mindestens einen ko- und einen kontravarianten Index besitzt, lässt sich die Operation der *Tensorkontraktion/Tensorverjüngung* definieren:

$$T_{lm} = \sum_k T_{lkn}^k. \quad (445)$$

Sie ist nichts anderes als die Verallgemeinerung der Spurbildung einer Matrix.

Es gibt Vierertensoren, deren Komponenten in allen Koordinatensystemen gleich sind:

- Der *Einheitstensor* ist nichts anderes als Kroneker- δ in 4D: für alle Vierervektoren A^i gilt

$$\delta_i^k A^i = A^k. \quad (446)$$

Hier sieht man, wie ein Produkt von einem Vierertensor und einem Vierervektor funktioniert: ein Koindex „neutralisiert“ einen Kontraindex. Z. B. (441) wird geschrieben wie $A^i = \Lambda_j^i A'^j$.

- Anheben/Absenken der Indizes geschieht durch Multiplikation mit dem *metrischen Tensor*

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k. \quad (447)$$

seine Komponenten sind $g_{ik} = g^{ik} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Das Absenken/Anheben der 0-Komponente zieht keine Veränderung des Vorzeichens nach sich, das Absenken/Anheben im Raumindex 1, 2, 3 führt zu einem Vorfaktor -1 .

- Absolut antisymmetrischer Tensor vom Rang 4 ϵ^{iklm} (Levi-Civita-Symbol). Die Komponenten sind nicht Null nur wenn alle i, k, l, m unterschiedlich sind. $\epsilon^{0123} = +1$ und alle gerade Permutationen der Indizes 0123. Für alle ungeraden Permutationen (es gibt insgesamt $4! = 24$ davon) gilt $\epsilon^{1023} = -1$. Offensichtlich gilt $\epsilon_{0123} = -1$. Dieser Tensor bleibt invariant nicht nur unter Drehungen des Koordinatensystems sondern auch nach Spiegelungen der Koordinatenachsen (1 oder 3 davon) \Rightarrow es ist kein echter Tensor sondern ein *Pseudotensor*.

Dualität: Man betrachte einen antisymmetrischen Tensor $F_{\beta\gamma}$ in 3D (hier ist Kroneker- δ der metrische Tensor und deswegen gibt es keinen Grund, zwischen den ko- und kontravarianten Komponenten zu unterscheiden). Er hat nur drei unabhängige Komponenten:

$$F_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -a & -c \\ a & 0 & -b \\ c & b & 0 \end{pmatrix}. \quad (448)$$

Man kann leicht verifizieren, dass

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma} = (-b, c, -a)^T = f_\alpha$$

ein Vektor ist, wenn $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ein absolut antisymmetrischer Tensor von Rang 3 in 3D ist. Es ist ein Pseudotensor $\Rightarrow f_\alpha$ ist ein *Axialvektor* oder Pseudovektor (im Gegensatz zu den echten Vektoren oder *Polarvektoren*, dessen Koordinaten ihre Vorzeichen nach einer Koordinatenspiegelung verändern). Wenn wir also f_α kennen, dann kennen wir auch $F_{\beta\gamma}$ und umgekehrt. Diese Objekte sind *dual* zueinander.

Für einen antisymmetrischen Tensor A^{ik} kann man einen dualen Pseudotensor

$$A^{*ik} = \frac{1}{2} \epsilon^{iklm} A_{lm} \quad (449)$$

definieren. Auf ähnliche Weise ist $\epsilon^{iklm} A_m$ ein antisymmetrischer Pseudotensor vom Rang 3, der dual zum Vektor A^i ist. Ein Produkt $A^{ik} A_{ik}^*$ ist ein *Pseudoskalar*. Die Raumkomponenten von A^{ik} mit $i, k = 1, 2, 3$ bilden einen antisymmetrischen Tensor in 3D, also haben sie die Form (448). Die Komponenten A^{01}, A^{02}, A^{03} bilden einen echten Vektor (einen Polarvektor) in 3D. Aus diesem Grund können wir schreiben

$$A^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (450)$$

wobei \mathbf{p} und \mathbf{a} konventionelle 3D Vektoren sind. Abgekürzt $A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a})$ und $A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a})$.

5.1.5 Differential- und Integralrechnung in 4D

(Vierer)gradient eines Skalars ist ein Vierervektor

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \partial_i \phi = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi \right). \quad (451)$$

Man beachte dass es ein Kovektor ist, denn das Differential ist eine skalare Größe:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i.$$

Wichtig ist oftmals auch die Ableitung nach dem Abstand.

Beispiel: (Vierer)geschwindigkeit ist (ganz natürlich) definiert als die Ableitung von x^i nach dem Abstand s ,

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \quad (452)$$

In dem sich bewegenden Bezugssystem ist $dt' = ds/c$. Andererseits gilt für die Eigenzeit die Relation (431) $dt' = dt/\gamma$, deswegen erhalten wir $ds = cdt/\gamma$. Dies wiederum führt auf

$$u^i = (\gamma, \mathbf{v} \gamma/c). \quad (453)$$

Die Komponenten der Vierergeschwindigkeit sind also nicht unabhängig, für sie gilt $u^i u_i = 1$. u^i ist also ein Tangentialvektor zur Weltlinie des Teilchens.

Divergenz eines Vektorfeldes A^i funktioniert auf die gleiche Weise wie in 3D:

$$\text{div} A = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}. \quad (454)$$

Ein Analogon des Laplace-Operators ergibt sich auch aus der Betrachtung der Divergenz eines Gradienten. Dabei muss beachtet werden, dass man in einer Ableitung die kovarianten Komponenten und in der anderen die kontravarianten Komponenten nimmt²⁰:

$$\partial^i \partial_i \phi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = -\square \phi. \quad (455)$$

der Laplace-Operator in 4D ist also der d'Alembertsche Operator²¹.

Es gibt 4 verschiedene Integralarten:

- Wegintegral hat dx^i als Längenelement. Sonst funktioniert alles wie gewohnt.
- Flächenintegral über eine 2D Fläche. Infinitesimales Element im 3D Fall sind die Projektionen eines Parallelograms mit den Seiten $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{x}'$ auf die (Koordinaten)flächen $x_\alpha x_\beta$: $df_{\alpha\beta} = dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha$. Es ist ein antisymmetrischer Tensor vom Rang 2 \Rightarrow man benutzt den dualen Vektor $df_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} df_{\alpha\beta}$. Er ist nichts anderes als der Vektor der Normalen zur Fläche mit der Länge, die dem Flächeninhalt des Elements $df_{\alpha\beta}$ proportional ist. In 4D existiert ein solcher Vektor offensichtlich nicht. Stattdessen kann man ein duales Element $df^{*ik} = \epsilon^{iklm} df_{lm}$ definieren. Das ist ein Flächenelement welches „orthogonal“ zu df^{ik} : alle Abschnitte, die in ihm liegen sind orthogonal zu Abschnitten, die f^{*ik} angehören. Das wir durch $df^{*ik} df_{ik} = 0$ ausgedrückt.
- Integral über eine (3D) Hyperfläche. In 3D ist das Volumenelement als das Volumen eines Parallelepipeds definiert, welches durch drei Vektoren aufgespannt wird. Dies ist eine Determinante dritter Ordnung. Ähnlich gilt in 4D für das infinitesimale Volumen, welches durch dx^i, dx'^i, dx''^i aufgespannt wird:

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix}. \quad (456)$$

²⁰Oder anders ausgedrückt: es ist eine Tensorkontraktion einer gemischten 2. Ableitung.

²¹Das negative Vorzeichen in dieser Gleichung entsteht aufgrund unser Notation (296).

Dies ist ein (antisymmetrischer) Tensor vom Rang 3, welcher natürlich einen dualen Vierervektor besitzt:

$$dS^i = -\frac{1}{6}e^{iklm} dS_{klm}, \quad dS_{klm} = \epsilon_{nkml} dS^n. \quad (457)$$

Dabei gilt $dS^0 = dS^{123}$, $dS^1 = dS^{023}$, etc. Geometrisch ist dS^i ein Normalenvektor zur Hyperfläche, über die integriert wird. Seine Länge ist proportional zur Grundfläche des Flächenelements. Z. B. ist $dS^0 = dxdydz = dV$ eine Projektion auf die Hyperfläche $x^0 = \text{const}$

- Das Volumenintegral in 4D ist am einfachsten. Für das (skalare) infinitesimale Volumen gilt $d\Omega = cdt dV$.

Integraltheoreme Wie in 3D existieren auch in 4D einige Integraltheoreme.

- Ein Integral über eine geschlossene Hyperfläche kann in ein Integral über das eingeschlossene Volumen umgeformt werden – das ist der 4D Gaußsche Integralsatz :

$$\oint dS_i A^i = \int_{\Omega} d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i} A^i. \quad (458)$$

Die notwendige Transformation ist

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (459)$$

Der Differentialoperator auf der rechten Seite ist nichts anderes als die 4D Divergenz.

- Ein Integral über eine 2D Fläche kann in ein Integral über die von ihr „umrandeten“ 3D Hyperfläche mit Hilfe der Transformation

$$df_{ik}^* \rightarrow dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (460)$$

umgewandelt werden. Dies ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Stokes. Ein Beispiel dafür ist

$$\frac{1}{2} \oint df_{ik}^* A^{ik} = \frac{1}{2} \int \left(dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} \right) = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}, \quad (461)$$

wenn A^{ik} ein antisymmetrischer Tensor ist.

- Eine andere Anwendung des Satzes von Stokes ist die Umwandlung des Integrals entlang einer geschlossenen 1D Kurve in ein Integral über die von ihr eingeschlossene Fläche. Es geschieht mit Hilfe des Operators

$$dx^i \rightarrow df^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (462)$$

Ein Beispiel:

$$\oint dx^i A_i = \int df^{ki} \frac{\partial A}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \int df^{ki} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right). \quad (463)$$

5.2 Relativistische Mechanik

5.2.1 Prinzip der kleinsten Wirkung

Für alle mechanischen Systeme existiert eine Größe S , genannt *Wirkung*, die für eine tatsächliche Bahn oder Evolution des Systems den kleinsten Wert annimmt \Rightarrow ihre Variation δS verschwindet $\delta S = 0$. Dies ist die Kernaussage des Prinzips der kleinsten Wirkung (auch Hamiltonsches Prinzip genannt).

S darf nicht vom Bezugssystem abhängen und muss skalar sein. Die einzige Größe die für ein freies Teilchen in Frage kommt ist demnach

$$S = -\alpha \int_a^b ds, \quad (464)$$

wobei a, b die Anfangs/Endpunkte der Bewegung sind und α eine Konstante ist. Außerdem ist $\alpha > 0$ weil $\int ds$ maximal für geradlinige Bewegung ist und für „krumme“ Bahnen beliebig klein gemacht werden kann. Wir wissen, dass $ds = c dt'$ gilt. Das Differential der Eigenzeit dt' lässt sich durch das Differential der Zeit in dem sich ruhenden Bezugssystem mit Hilfe von (431) umrechnen. Also erhalten wir

$$S = -\alpha c \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{1 - (v/c)^2} = \int_{t_a}^{t_b} dt L, \quad (465)$$

wobei L die aus der klassischen Mechanik bekannte *Lagrange-Funktion* ist. Sie ist durch

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (466)$$

definiert. In der klassischen Mechanik galt wiederum $L = mv^2/2$. Dies muss im Grenzfall $c \rightarrow \infty$ wiedergegeben werden. Man entwickle also

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - (v/c)^2} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c} \left(\rightarrow \frac{mv^2}{2} \right).$$

Konstante Terme beeinflussen die Wirkung nicht. Deswegen erhalten wir folgende Relationen:

$$\alpha = mc, \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (467)$$

5.2.2 Energie und Impuls

In 3D haben wir für den kanonischen Impuls folgende Definition

$$\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{v}. \quad (468)$$

Aus (467) erhalten wir dann

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (469)$$

Die *Energie* \mathcal{E} definiert sich wie

$$\mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (470)$$

Die Energie eines ruhenden Teilchens ist also nicht Null und gegeben durch

$$\mathcal{E} = mc^2. \quad (471)$$

Im nichtrelativistischen Fall erhalten wir dann

$$\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \quad (472)$$

Eine Relation zwischen der Energie und dem Impuls kann durch die Berechnung der Quadrate von (469) und (470) ausgerechnet werden:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + (mc)^2. \quad (473)$$

Die Energie als Funktion des Impulses = Hamilton-Funktion:

$$\mathcal{H} = c \sqrt{p^2 + (mc)^2}. \quad (474)$$

Nun leiten wir entsprechende Relationen in 4D her. Laut dem Prinzip der kleinsten Wirkung gilt für die Variation der Wirkung

$$\delta S = -mc \delta \int_a^b ds = 0. \quad (475)$$

Nun benutzen wir dass für das Differential des Abstands $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$ gilt. Damit ist die Variation gegeben durch

$$\delta ds = \frac{1}{2} \frac{(\delta dx_i) dx^i + dx_i \delta dx^i}{\sqrt{dx_i dx^i}} = \frac{dx_i \delta dx^i}{ds}. \quad (476)$$

Für die Variation gilt demnach

$$\delta S = -mc \int_a^b d(\delta x^i) u_i = -m c u_i \delta x^i \Big|_a^b + mc \int_a^b ds \frac{du_i}{ds} \delta x^i, \quad (477)$$

wobei im letzten Schritt eine partielle Integration durchgeführt wurde. Für eine echte Teilchenbahn sind die Anfangs/Endpunkte fest vorgegeben, so dass $(\delta x^i)_a = (\delta x^i)_b = 0$. Das Integral auf der rechten Seite ist also Null. Das gilt jedoch nur wenn

$$du_i/ds = 0 \quad (478)$$

gilt. Die (Vierer)geschwindigkeit eines freien Teilchens bleibt also konstant. Die Variation der Wirkung als Funktion der Koordinaten wird erhalten, wenn man echte Bahnen nimmt, für die (478) gelten und für die der Endpunkt variabel ist (bei festem Anfangspunkt). Dann gilt

$$\delta S = -m c u_i \delta x^i. \quad (479)$$

Den (Vierer)vektor

$$p_i = -\partial S / \partial x^i = -m c u_i \quad (480)$$

nennt man (*Vierer*)*impuls*. Seine Komponenten sind [man greife auf (453), (469) und (470) zurück] durch

$$p_i = (m c \gamma, -m \mathbf{v} \gamma) = (\mathcal{E}/c, -\mathbf{p}) \quad (481)$$

gegeben. Also sind konventionelle Energie und Impuls ein Vierervektor und werden bei Lorentz-Transformationen gemischt. Weiterhin folgt aus $u^i u_i = 1$ die Relation $p^i p_i = (m c)^2$. Auf eine ähnliche Weise kann auch die Kraft definiert werden:

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = m c \frac{du^i}{dx}. \quad (482)$$

5.3 Elementarteilchen in elektromagnetischen Feldern

5.3.1 Viererpotential des elektromagnetischen Feldes

Befindet sich ein Elementarteilchen²² in einem Feld, so muss die Wirkung (465) durch die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Feld erweitert werden. Die Amplitude dieser Wechselwirkung soll proportional der Ladung e des Elementarteilchens sein. Das Feld wird durch ein Vektorfeld A_i beschrieben. Eine Möglichkeit eine skalare Größe zu definieren ist ein Wegintegral der Form $\oint dx^i A_i$. Dann haben wir

$$S = \int_a^b \left(-m c ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right). \quad (483)$$

²²Wir definieren ein Elementarteilchen als ein punktförmiges Objekt, dessen mechanischer Zustand vollständig durch die Angabe seiner Koordinaten und Geschwindigkeiten beschrieben werden kann.

Das Potential kann in seinen skalaren Anteil ϕ und seinen Vektoranteil \mathbf{A} zerlegt werden: $A^i = (\phi, \mathbf{A})$, dann gilt

$$S = \int_a^b \left(-mc ds + \frac{e}{c} \mathbf{A} d\mathbf{r} - e\phi dt \right) = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(-mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right), \quad (484)$$

wobei wir benutzt haben, dass $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ gilt. Die Lagrange-Funktion ist also gegeben durch

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi. \quad (485)$$

Aus (468) folgt nun

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}\gamma + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (486)$$

Die Hamilton-Funktion modifiziert sich nun zu

$$\mathcal{H} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = mc^2 \gamma + e\phi. \quad (487)$$

Die Hamilton-Funktion muss jedoch von \mathbf{P} abhängen und nicht von \mathbf{v} . Man sieht schnell, dass die Relation zwischen $\mathcal{H} - e\phi$ und $\mathbf{P} - (e/c)\mathbf{A}$ die gleiche ist wie zwischen \mathcal{H} und \mathbf{p} ohne das Feld A^i . Es gilt also

$$\left(\frac{\mathcal{H} - e\phi}{c} \right)^2 = (mc)^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2, \quad (488)$$

was unmittelbar zu

$$\mathcal{H} = \sqrt{(mc^2)^2 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\phi \quad (489)$$

führt.

5.3.2 Bewegungsgleichungen

Wir nehmen an, ein Elementarteilchen bewege sich in einem vorgegebenen Feld. Dann sind die Bewegungsgleichungen durch die Lagrange-Gleichungen gegeben:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}. \quad (490)$$

L ist gegeben durch (534). Wir wissen bereits, dass $\partial L / \partial \mathbf{v} = \mathbf{P}$ gilt. Weiterhin gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \nabla L = \frac{e}{c} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e \nabla \phi. \quad (491)$$

Unter der Voraussetzung dass \mathbf{v} unabhängig von \mathbf{r} ist, gilt $\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$. Deswegen erhalten wir

$$\nabla L = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e \nabla \phi. \quad (492)$$

Wir wissen außerdem, dass $\partial L / \partial \mathbf{v} = \mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}$ gilt, deswegen erhält man für die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}] = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e \nabla \phi. \quad (493)$$

Die vollständige Ableitung von \mathbf{A} nach der Zeit setzt sich aus der partiellen Ableitung nach der Zeit, was die Veränderung des Feldes an einem fixierten Ort ist, und aus der Veränderung des Feldes durch die Teilchenbewegung zusammen [s. auch (234)]:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}. \quad (494)$$

Damit geht (493) über in

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \nabla \phi + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (495)$$

Hier erkennen wir das uns bereits bekannte elektrische und magnetische Feld [man vergleiche mit den „alten“ Definitionen (258) und (260)²³],

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (496)$$

Damit erhalten wir die kanonischen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (497)$$

Nun schauen wir uns noch die zeitliche Veränderung der (kinetischen) Energie an. Es gilt

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \quad (498)$$

wobei wir im letzten Schritt die Relation (497) benutzt haben.

Physikalisch sind nur die Felder, die in den Bewegungsgleichungen auftauchen. Das Potentialfeld A_i ist natürlich nach wie vor bis auf einen Vierergradient einer Funktion f definiert:

$$A'_k = A_k - \frac{\partial f}{\partial x^k}. \quad (499)$$

Die beiden Potentiale A'_k und A_k entsprechen den gleichen magnetischen und elektrischen Feldern. Es sind also verschiedene Eichungen möglich. In der Wirkung (483) entsteht durch die Funktion f ein vollständiges Differential

$$\frac{e}{c} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = d \left(\frac{e}{c} f \right), \quad (500)$$

welches für die Variation der Wirkung völlig irrelevant ist.

5.3.3 Der elektromagnetische Feldstärketensor

In den letzten beiden Abschnitten haben wir uns ein wenig von der Viererschreibweise distanziert und mehr oder weniger mit 3D Vektoren gearbeitet. All die gewonnenen Erkenntnisse können natürlich auch in der „Vierersprache“ hergeleitet werden. Wir kehren nun zur Wirkung (483) zurück und berechnen ihre Variation

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right) = - \int_a^b \left(mc \frac{dx_i d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c} A_i \delta dx^i + \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) = 0. \quad (501)$$

Wir führen nun eine partielle Integration der ersten beiden Terme durch,

$$\int_a^b \left(mc du_i \delta x^i + \frac{e}{c} \delta x^i dA_i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) - \left(mc u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \Big|_a^b = 0. \quad (502)$$

Der letzte Term verschwindet da die Variation der Teilchenbahn an den Endpunkten a und b verschwindet. Im Einklang mit (494) gilt

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k \quad \text{und} \quad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k. \quad (503)$$

Damit erhalten wir

$$\int \left(mc du_i \delta x^i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^i dx^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^i \delta x^k \right) = 0. \quad (504)$$

²³Andere Koeffizienten entstehen weil wir jetzt die Gaußschen Einheiten benutzen.

Nun ersetzen wir im 1. Term $du_i = (du_i/ds)ds$ und im Rest $dx^i = u^i ds$. Außerdem vertauschen wir $i \leftrightarrow k$ im letzten Term (über diese beiden Indizes wird summiert!). Diese Operationen führen auf

$$\int \left[mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right] \delta x^i ds = 0. \quad (505)$$

δx^i ist beliebig \Rightarrow der Integrand verschwindet. Man definiere den *elektromagnetischen Feldstärketensor* durch

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \quad (506)$$

Dann erhalten wir

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \quad (507)$$

Wenn man sich erinnert, dass $A_i = (\phi, -\mathbf{A})$ gilt, erhält man die einzelnen Komponenten des Feldstärketensors:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (508)$$

in der kompakteren Schreibweise: $F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ und $F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H})$. Man vergleiche ihn mit der Diskussion des antisymmetrischen Tensors vom Rang 2 in (450). Schauen wir uns nun alles in Komponenten an. Wir erinnern uns, dass für die Vierergeschwindigkeit $u^i = (\gamma, \gamma \mathbf{v}/c)$ sowie $u_i = (\gamma, -\gamma \mathbf{v}/c)$ gilt. Damit erhalten wir für die Bewegungsgleichungen folgende Relation:

$$mc \frac{d}{\gamma dt} \begin{pmatrix} \gamma \\ \frac{\gamma}{c} v_x \\ \frac{\gamma}{c} v_y \\ \frac{\gamma}{c} v_z \end{pmatrix} = \frac{e}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ -\frac{\gamma}{c} v_x \\ -\frac{\gamma}{c} v_y \\ -\frac{\gamma}{c} v_z \end{pmatrix}. \quad (509)$$

Für die Zeitkomponente erhalten wir dann

$$mc \frac{\gamma}{c} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{e}{c} \frac{\gamma}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \Rightarrow (498). \quad (510)$$

Für die erste Raumkomponente gilt

$$mc \frac{\gamma}{c} \frac{d(\gamma v_x/c)}{dt} = \frac{e}{c} \left[\gamma E_x + \frac{\gamma}{c} (v_y H_z - v_z H_y) \right] \Rightarrow \frac{d(m\gamma v_x)}{dt} = e E_x + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H})_x. \quad (511)$$

Es gilt $m\gamma \mathbf{v} = \mathbf{p}$, daher erhalten wir die x -Komponente der Gleichung (497).

5.4 Gleichungen für elektromagnetische Felder

5.4.1 Lorentz-Transformation des Feldstärketensors

Wir suchen nach der Vorschrift, nach der sich die Felder zwischen zwei sich relativ zueinander bewegenden Bezugssystemen K und K' transformieren. Wir nehmen an, die Koordinatenachsen der Systeme sind gleichgerichtet und $\mathbf{v} \parallel Ox$. Es gibt zwei Wege, die Aufgabe zu lösen:

Weg 1: Wir wissen, dass sich die Komponenten eines Tensors vom Rang 2 wie Produkte von zwei Vierervektoren transformieren. Laut (441) gilt demnach

$$F^{ik} = \Lambda^i_j \Lambda^k_m F'^{jm}. \quad (512)$$

In Matrixschreibweise ist das jedoch nichts anderes als Matrizenmultiplikation der Art $F = \Lambda F' \Lambda^T$. Deswegen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 F^{ik} &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -H'_z & H'_y \\ E'_y & H'_z & 0 & -H'_x \\ E'_z & -H'_y & H'_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -\gamma(E'_y + \beta H'_z) & -\gamma(E'_z - \beta H'_y) \\ E'_x & 0 & -\gamma(H'_z + \beta E'_y) & \gamma(H'_y - \beta E'_z) \\ \gamma(E'_y + \beta H'_z) & \gamma(H'_z + \beta E'_y) & 0 & -H'_x \\ \gamma(E'_z - \beta H'_y) & -\gamma(H'_y - \beta E'_z) & H'_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (513)
 \end{aligned}$$

Als Ergebnis erhalten wir folgende Vorschrift für die Transformation der einzelnen Felder:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma(E'_y + \beta H'_z), \quad E_z = \gamma(E'_z - \beta H'_y), \quad (514)$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \gamma(H'_y - \beta E'_z), \quad H_z = \gamma(H'_z + \beta E'_y). \quad (515)$$

Weg 2: Man benutze die Lorentz-Transformation für die Vierervektoren (441) und die Vorschriften (496). Das Ergebnis ist natürlich das gleiche.

In führender Ordnung in v/c lässt sich das Ergebnis auch in folgender Form hinschreiben²⁴,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c} (\mathbf{H}' \times \mathbf{v}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c} (\mathbf{E}' \times \mathbf{v}). \quad (516)$$

Wie erwartet, stimmt die erste Gleichung mit der Relation (237) überein (Vorfaktoren sind wegen der unterschiedlichen Einheiten unterschiedlich).

Nun versuchen wir die Frage zu beantworten, welche Größen, die die Felder enthalten, bei den Lorentz-Transformationen invariant bleiben. Es gibt offensichtlich ein Objekt, welches ein (echter) Skalar ist:

$$F_{ik} F^{ik} = \text{Tr} \left\{ (F_{ik})_{\text{Matrix}} \cdot [(F^{ik})_{\text{Matrix}}]^T \right\} = 2 (H^2 - E^2), \quad (517)$$

wobei Tr die Operation der Spurbildung bezeichnet. Dass es tatsächlich ein Skalar ist, sieht man auch an der rechten Seite: Sie enthält das Quadrat eines echten Vektors sowie eines Pseudovektors. Die andere invariante Größe ist ein Pseudoskalar:

$$F^{*ik} F_{ik} = \epsilon^{iklm} F_{lm} F_{ik} = \text{Tr} \left\{ (F^{*ik})_{\text{Matrix}} \cdot [(F_{ik})_{\text{Matrix}}]^T \right\} = 4 \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}. \quad (518)$$

Hier haben wir berücksichtigt, dass der duale Tensor folgende Komponenten hat:

$$F^{*ik} = \frac{1}{2} \epsilon^{iklm} F_{lm} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & -E_z & E_y \\ -H_y & E_z & 0 & -E_x \\ -H_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (519)$$

5.4.2 Kovariante Maxwell-Gleichungen I

Schauen wir uns den Gradienten des kovarianten Feldstärketensors an:

$$f_{lik} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^l \partial x^i} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^l \partial x^k}. \quad (520)$$

Dieses Objekt ist antisymmetrisch bezüglich der i und k Indizes [dies folgt aus der Definition des Feldstärketensors (506)]. Man kann ihn auch vollständig antisymmetrisch machen indem man f_{ilk} und f_{lki} abzieht. Dann erhält man

$$\mathcal{F}_{lik} = f_{lik} - f_{ilk} - f_{lki} = 0. \quad (521)$$

²⁴Zwar haben wir die Rechnung nur für den Fall $v_y = v_z = 0$ durchgeführt, man kann aber durch explizites Nachrechnen zeigen, dass die Relation (516) auch für beliebige \mathbf{v} stimmt.

Das ist ein antisymmetrischer Tensor vom Rang 3 \Rightarrow alle drei Indizes müssen unterschiedlich sein. Es gibt insgesamt $4!/((4-3)!3!) = 4$ Möglichkeiten, aus 4 Indizes 0123 3 verschiedene auszuwählen. Also hat dieser Tensor 4 unabhängige Komponenten und besitzt demnach einen dualen Vierervektor! Diesen können wir mit Hilfe von ϵ^{iklm} konstruieren. Es ist

$$\mathcal{F}^{*i} = \epsilon^{iklm} \mathcal{F}_{klm} = 0. \quad (522)$$

Damit gilt folgende Gleichung – die 1. Maxwell-Gleichung in der kovarianten Schreibweise

$$\epsilon^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F^{*ik}}{\partial x^k} = 0. \quad (523)$$

Die Viererdivergenz des dualen Feldstärketensors verschwindet. Es sind 4 Gleichungen. Welchen „konventionellen“ Maxwell-Gleichungen entsprechen sie? Wir gehen zurück und erinnern uns an die explizite Form des Gradienten (451). Angewandt auf die erste Zeile ($i = 0$) von (519) ergibt sich

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (524)$$

die Gleichung (257). Für die zweite Zeile ($i = 1$) von (519) erhalten wir

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0. \quad (525)$$

Dies ist nichts anderes als die x -Komponente der Gleichung (255), die in Gaußschen Einheiten folgendermaßen aussieht:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (526)$$

5.4.3 Wirkung für das elektromagnetische Feld

Die totale Wirkung für ein System Teilchen-Feld besteht im Allgemeinen aus drei Beiträgen:

$$S = S_0 + S_{WW} + S_F, \quad (527)$$

wobei S_0 die Wirkung (465) für das freie Teilchen ist und S_{WW} die Wechselwirkung Teilchen-Feld beschreibt, s. (483). Der dritte Beitrag S_F ist die Wirkung für das Feld selbst. Bisher betrachteten wir es als vorgegeben. Es wird jedoch von den Teilchen generiert und unterliegt somit auch dem Prinzip der kleinsten Wirkung. Diese Wirkung muss einigen Anforderungen genügen. Die Lösungen sollten das Superpositionsprinzip nicht verletzen \Rightarrow die resultierenden Feldgleichungen sollten *linear* sein. Deswegen sollte die Wirkung *quadratisch* in den das Feld beschreibenden Größen sein²⁵. Diese Größen sind nicht die Potentiale, denn diese sind nicht eindeutig definiert \Rightarrow es muss der Feldstärketensor sein. Eine Möglichkeit eine skalare Größe zu konstruieren ist die folgende:

$$S_F = \alpha \int d\Omega F_{ik} F^{ik} = \alpha \int c dt dV F_{ik} F^{ik}. \quad (528)$$

Wir wissen jedoch, dass $F_{ik} F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$ gilt und dass \mathbf{E} eine Ableitung $(\partial \mathbf{A} / \partial t)^2$ enthält, die (z. B. durch stark oszillierende Terme) beliebig groß gemacht werden kann. Deswegen sollte der \mathbf{E} -Term mit einem positiven Vorzeichen vorkommen $\Rightarrow \alpha < 0$. Aus historischen Gründen ist diese Konstante definiert als

$$\alpha = -\frac{1}{16\pi c} \quad \Rightarrow \quad S_F = -\frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F_{ik} F^{ik}. \quad (529)$$

²⁵Denn die Variationsprozedur „verschlingt“ eine Potenz.

In der konventionellen 3D Schreibweise erhält man dann

$$S_F = \frac{1}{8\pi} \int dV dt (E^2 - H^2) \quad \text{mit} \quad L_F = \frac{1}{8\pi} \int dV (E^2 - H^2). \quad (530)$$

Die volle Wirkung für ein System aus mehreren Elementarteilchen ist dann gegeben durch

$$S = - \sum mc \int ds - \sum \frac{e}{c} \int dx^k A_k - \frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F_{ik} F^{ik}, \quad (531)$$

wobei die Summen sich über alle Teilchen erstrecken. Da wir uns nur für die Gleichungen der Felder interessieren, können wir die Teilchenbahnen als vorgegeben ansehen. Den ersten Term in (531) kann man also ignorieren. Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung, die durch eine Ladungsdichte ρ beschrieben wird muss der zweite Term folgendermaßen modifiziert werden:

$$- \sum \frac{e}{c} \int dx^k A_k = - \frac{1}{c} \int dV \rho \int dx^i A_i = - \frac{1}{c} \int dV dt \rho \frac{dx^i}{dt} A_i = - \frac{1}{c^2} \int d\Omega A_i j^i. \quad (532)$$

Hier haben wir eine neue Größe definiert – den Stromdichtevierervektor

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt} \quad \text{mit den Komponenten} \quad j^i = (c\rho, \rho\mathbf{v}). \quad (533)$$

Zusammenfassend erhalten wir also folgende Wirkung für das Feld und seine Wechselwirkung mit den Ladungen:

$$S_{WW} + S_F = - \frac{1}{c^2} \int d\Omega A_i j^i - \frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F_{ik} F^{ik}. \quad (534)$$

5.4.4 Kovariante Maxwell-Gleichungen II

Wir variieren nun die Wirkung (534). Die Ströme sind vorgegeben, deswegen bleibt j^l unverändert. Für den Rest erhalten wir

$$\delta S = - \frac{1}{c} \int d\Omega \left(\frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \delta F_{ik} \right) = 0. \quad (535)$$

Hier haben wir benutzt, dass $F^{ik} \delta F_{ik} = F_{ik} \delta F^{ik}$ gilt. Unter Benutzung der Definition (506) ergibt sich

$$= - \frac{1}{c} \int d\Omega \left(\frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_k - \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right). \quad (536)$$

Im 2. Term tauschen wir die Indizes $i \leftrightarrow k$ aus und ersetzen anschließend F_{ki} durch F_{ik} . Dann gilt

$$= - \frac{1}{c} \int d\Omega \left(\frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right). \quad (537)$$

Den letzten Term können wir nun partiell integrieren:

$$= - \frac{1}{c} \int d\Omega \left(\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i - \frac{1}{4\pi c} \int dS_k F^{ik} \delta A_i, \quad (538)$$

wobei der letzte Term der Integration über die Hyperfläche entspricht, die das Volumen Ω einschließt \Rightarrow er ist Null. Damit erhalten wir die 2. Maxwell-Gleichung in der kovarianten Formulierung:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = - \frac{4\pi}{c} j^i. \quad (539)$$

Welchen „konventionellen“ Maxwell-Gleichungen entspricht sie? Schauen wir uns die $i = 1$ Komponente an:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F^{10}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} = - \frac{4\pi}{c} j^1. \quad (540)$$

Mit Hilfe von (508) erhalten wir

$$\frac{1}{c} \frac{E_x}{\partial t} - \frac{H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j_x. \quad (541)$$

Dies ist nichts anderes als die x -Komponente der Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (542)$$

Für die $i = 0$ Komponente der Gleichung (539) ergibt sich dagegen

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F^{00}}{\partial t} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x} + \frac{\partial F^{02}}{\partial y} + \frac{\partial F^{03}}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j^0. \quad (543)$$

Einsetzen der Komponenten führt auf

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} c\rho \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (544)$$

Wir erhalten tatsächlich ein Paar der „konventionellen“ Maxwell-Gleichungen.

Durch Anwendung des Vierergradienten auf (539) erhält man eine skalare Größe:

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j^i}{\partial x^i}. \quad (545)$$

Die linke Seite ist ein symmetrischer Differentialoperator angewandt auf ein antisymmetrisches Objekt \Rightarrow sie ist Null. Demnach erhalten wir eine fundamentale Relation:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 = \frac{1}{c} \frac{\partial c\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (546)$$

Dies ist nichts anderes als die Kontinuitätsgleichung in Viererschreibweise.

5.4.5 Energie-Impuls-Tensor

Allgemein deutet die verschwindende Divergenz eines Vektorfeldes auf die Existenz einer Erhaltungsgröße. In dem Fall oben war das die Ladungserhaltung. Eine ähnliche Form hatten bereits der Poyntingsche Satz und die Impulserhaltung, s. (283) und (292). Daher stellt sich die Frage ob und wie man diese Aussagen auch in Viererschreibweise ausdrücken kann. Wir stellen die Frage sehr allgemein: Man finde eine Größe (Vierervektor oder -Tensor), deren Einträge die Dimension der Energiedichte haben (weil intensiv!) und deren Divergenz verschwindet. Wir nehmen an, dass wir es mit einem allgemeinen System zu tun haben, dessen Lagrange-Dichte $\Lambda(q, \partial q/\partial x^i)$ von den verallgemeinerten Koordinaten q und Impulsen $\partial q/\partial x^i$ abhängt. Die Wirkung ist dann gegeben durch

$$S = \int dV dt \Lambda(q, \partial q/\partial x^i) = \frac{1}{c} \int d\Omega \Lambda. \quad (547)$$

Wir versuchen es direkt mit

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}, \quad (548)$$

wobei wir neue Notation $q_{,k} = \partial q/\partial x^k$ eingeführt haben. Um voranzukommen können wir uns der Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \quad (549)$$

bedienen. Dann gilt

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right) q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \frac{\partial q_{,i}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right). \quad (550)$$

Andererseits können wir für die linke Seite

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \delta_i^k \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} \quad (551)$$

schreiben. Dann erhalten wir eine Gleichung

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0 \quad \text{für die Größe} \quad T_i^k = q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k \Lambda. \quad (552)$$

T_i^k ist der *Energie-Impuls-Tensor*. Was ist da so alles erhalten? Aus (546) sehen wir, dass das Integral über eine Hyperfläche $x^0 = \text{const}$

$$\int dS_i j^i = c\rho \quad (553)$$

eine Konstante ist (dS_i ist ein 3D Volumenelement!). Ähnliches gilt auch für das Integral der Form:

$$P^i = \frac{1}{c} \int dS_k T^{ik}, \quad (554)$$

wobei P^i der Viererimpuls des Systems ist. Es lässt sich auch ein Drehimpulstensor definieren²⁶:

$$M^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c} \int dS_l (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d\Omega \frac{\partial}{\partial x^l} (x^i T^{kl} - x^k T^{il}), \quad (555)$$

wobei das Integral über die Fläche berechnet wird, die das Volumen Ω einschließt, dessen Drehimpuls wir berechnen möchten. Dieses Volumen kann man sehr groß machen, dann muss der Drehimpuls natürlich verschwinden. Daraus ergibt sich die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^l} (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) = 0. \quad (556)$$

Es gilt $\partial x^i / \partial x^l = \delta_l^i$ und $\partial T^{kl} / \partial x^l = 0$ [s. (552)], daher erhalten wir

$$\delta_l^i T^{kl} - \delta_l^k T^{il} = T^{ki} - T^{ik} = 0, \quad (557)$$

also muss der Energie-Impuls-Tensor lediglich symmetrisch sein, damit die Drehimpulserhaltung gilt.

Nun wenden wir uns dem elektromagnetischen Feld zu. Hier gilt

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{kl} F^{kl}, \quad (558)$$

und $q \rightarrow A_k$. Deswegen erhalten wir

$$T_i^k = \frac{\partial A_l}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_l / \partial x^k)} - \delta_i^k \Lambda. \quad (559)$$

Um die Ableitung von Λ auszuwerten, berechnen wir zunächst die Variation

$$\delta \Lambda = -\frac{1}{8\pi} F^{kl} \delta F_{kl} = -\frac{1}{8\pi} F^{kl} \delta \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l} \right) = -\frac{1}{4\pi} F^{kl} \delta \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} \right), \quad (560)$$

wobei wir verwendet haben, dass F^{kl} antisymmetrisch ist. Daraus folgt, dass

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_l / \partial x^k)} = -\frac{1}{4\pi} F^{kl} \quad (561)$$

²⁶Dieser Ausdruck ist eine triviale Verallgemeinerung der konventionellen 3D Definition des Drehimpulses \mathbf{M} mit Hilfe des Vektorprodukts: $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Man beachte die Antisymmetrie bezüglich der Transformation $i \leftrightarrow k$.

gilt, was unmittelbar auf

$$T_i^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_l}{\partial x^i} F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta_i^k F_{lm} F^{lm} \quad (562)$$

führt. Für die kontravarianten Komponenten erhalten wir

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^l}{\partial x_i} F_l^k + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{lm} F^{lm}. \quad (563)$$

Dieses Objekt ist noch nicht symmetrisch. Die Symmetriesierung kann durch Addition von

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^i}{\partial x_l} F_l^k$$

erreicht werden. Das ist erlaubt, denn in Abwesenheit von Ladungen gilt aufgrund von (539)

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^i}{\partial x_l} F_l^k = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_l} (A^i F_l^k). \quad (564)$$

Eine zusätzliche Ableitung nach x^k wäre Null wegen der Antisymmetrie von $F_l^k \Rightarrow$ die Gleichung (552) wäre dabei nicht verletzt. Mit Hilfe der Relation $\partial A^l / \partial x_i - \partial A^i / \partial x_l = F^{il}$ erhalten wir dann für den Energie-Impuls-Tensor folgendes Ergebnis:

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{il} F_l^k + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right). \quad (565)$$

Ausgeschrieben in Komponenten sieht dieser Tensor folgendermaßen aus:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz} \\ S_y/c & -T_{yx} & -T_{yy} & -T_{yz} \\ S_z/c & -T_{zx} & -T_{zy} & -T_{zz} \end{pmatrix}, \quad (566)$$

wobei

$$W = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) \quad (567)$$

die Energiedichte im System ist. Weiterhin sind

$$cT^{0\alpha} = \mathbf{S}^\alpha = \left(\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right)^\alpha \quad (568)$$

die Komponenten des Poynting-Vektors \mathbf{S} und

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + H^2) \right], \quad (569)$$

bezeichnet den Maxwell'schen Spannungstensor [s. auch (291)].

Index

- Abstand, 68
- Arbeit, 10
- Axialvektor, 71

- Bahndrehimpuls, 35
- Basisfunktion, 52
- Bessel-Funktion, 18
- Bezugssystem, 40
 - Labor-, 40
- Bildladung, 15, 23
- Biot-Savart-Gesetz, 28

- Coulomb-Eichung, 32
- Coulombsches Gesetz, 8

- d'Alembertscher Operator, 49, 72
- δ -Funktion, 8
- Determinante, 33
- Diamagnetismus, 37
- Dielektrikum, 24
 - anisotropes, 25
- Dielektrizitätskonstante, 25, 26, 54
- Differentialgleichung
 - für Felder, 8
 - partielle, 16
- Diffusionsgleichung, 6
- Dipol, 11
 - magnetischer, 35
 - permanenter, 37
- Dipolflächendichte, 14
- Dipolmoment, 12, 13, 24, 27
- Dipolschicht, 14
- Divergenz, 3
- Drehimpuls
 - erhaltung, 83
 - tensor, 83
- Drehmoment, 12, 28, 35
- Dualität
 - der Tensoren, 71
- Durchflutungsgesetz
 - Ampèresches, 37

- Eichinvarianz, 44
- Eichtransformation, 32, 44
- Eichung, 32, 77
 - Coulomb-, 32, 38, 45
 - Lorenz-, 44
 - Strahlungs-, 45
 - transversale, 45
- Eigenfunktion, 17, 52
- Eigensystem, 19
- Eigenzeit, 68, 74
- Eindeutigkeit, 21

- Einhüllende, 54
- Einheitstensor, 71
- Energie
 - des Magnetfeldes, 41
 - potentielle, 10, 25, 35
 - relativistische, 74
- Energie-Impuls-Tensor, 83
- Energiedichte, 6, 11
- Entwicklung
 - Laurent-, 65
- Ereignis
 - lichtartiges, 68
 - raumartiges, 68
 - zeitartiges, 68
- Erhaltungssatz
 - Energie-, 46
 - Impuls-, 48

- Faltungstheorem, 50
- Feld, 3
 - quellenfreies, 45
 - Skalar-, 3
 - solenoidales, 45
 - Vektor-, 3
 - wirbelfreies, 45
- Feldenergie, 11, 46
- Feldgleichungen, 80
- Feldquelle, 41
- Feldstärketensor
 - elektromagnetischer, 78
- Fernzone, 11, 12, 58, 60
- Ferromagnet, 38
- Ferromagnetismus, 37
- Flächenintegral, 7
- Flächenladung, 13
- Flächenladungsdichte, 13, 14, 24
- Flächenstromdichte, 38
- Fortsetzung
 - analytische, 65
- Fourier
 - Entwicklung, 16, 50
 - Komponente, 51
 - Transformation, 52, 55
 - Transformierte, 50
- Fourier-Transformierte
 - der Gauß-Verteilung, 51
- Fouriersches Gesetz, 4
- Frequenz, 52, 55
- Funktionensystem
 - orthogonales, 17

- Gaußsches Kästchen, 13
- Gaußscher Integralsatz, 6

in 4D, 73
 Geschwindigkeit
 Vierer-, 72
 Gesetz
 Ampèresches, 29
 Biot–Savartsches, 28
 Gradient, 3
 Vierer-, 72
 Gravitation, 9
 Gravitationskraft, 9
 Greensche
 Funktion, 21, 22
 Identität, 22
 Greensche Funktion, 23
 Greenscher Satz, 22
 Greensfunktion, 23, 56, 66
 avancierte, 57
 der Wellengleichung, 55
 retardierte, 57
 zeitabhängige, 56
 Grenzbedingung, 26, 37
 Gruppengeschwindigkeit, 54

 Hamilton
 –Funktion, 74, 76
 Hysterese, 37

 Impuls
 Vierer-, 75
 Induktion
 magnetische, 28
 Induktionsgesetz
 Faradaysches, 40
 Induktivität
 Gegen-, 42
 Selbst-, 42
 Induktivitätskoeffiziente, 42
 Inertialsystem, 67
 Integralgleichung, 22

 Kapazität, 11, 14
 Kapazitätskoeffizient, 11, 42
 Kondensator, 14, 48
 Kontinuitätsgleichung, 6, 29, 32
 in 4D, 82
 Kontraktion
 eines Tensors, 71
 kontravarianter
 Vierervektor, 70
 Kontur, 51, 66
 deformierte, 63
 Konvergenzfaktor, 50
 kovarianter
 Vierervektor, 70
 Kovektor, 72
 Kraft, 12
 elektromotorische, 40, 41
 in 4D, 75
 Kugelflächenfunktionen, 20
 Addition der, 21
 Kugelfunktionen, 20
 Kugelkoordinaten, 17, 18, 21, 55
 Kugelwelle, 55

 Lösung
 partikuläre, 56
 Ladungsdichte, 8, 9
 Ladungserhaltung, 29
 Ladungssystem, 8
 Ladungsverteilung, 8, 25
 kontinuierliche, 10
 Lagrange
 –Funktion, 74, 76
 –Gleichungen, 76
 –Dichte, 82
 Laplace-Gleichung, 10, 16, 18, 22, 23, 31
 Laplace-Operator, 4, 17, 56
 Laurent–
 Entwicklung, 65
 Leistung
 abgestrahlte, 60
 Leiter, 11, 15, 24
 Levi–Civita–Symbol, 71
 lichtartig, 68
 lichtartiges
 Ereignis, 68
 Lichtkegel, 68
 Lorentz
 –Boost, 69
 –Transformation, 68, 69
 des Feldstärketensors, 78
 Lorentzkontraktion, 70

 Magnetisierung, 36
 Magnetisierungsdichte, 36
 Massendichte, 9
 Maxwell-Gleichung
 kovariante Form, 80
 Maxwell-Gleichungen
 kovariante, 81
 Maxwell-Gleichungen
 der Elektrodynamik, 40, 43
 der Elektrostatik, 9, 24
 der Magnetostatik, 30, 31
 Medien
 dichte, 24, 36
 isotrope, 25
 Moment
 magnetisches, 28
 Monopol, 13
 Multipolentwicklung, 13, 21
 Multipolmomente, 24

sphärische, 21
 Nahzone, 11, 58
 Normale, 3
 Normalenvektor, 14, 31
 Normalkomponente, 37, 39
 Operator
 d'Alembertscher, 49
 Orthogonalität, 17, 20
 Orthogonalsystem, 50
 Oszillator
 harmonischer, 56
 Paramagnetismus, 37
 Parameter
 kleiner, 11
 Permeabilität, 37, 39
 Phasengeschwindigkeit, 54, 55
 Plattenkondensator, 13
 Poisson-Gleichung, 10, 11, 15, 21, 22, 32, 56
 Polarisierung, 27
 ebener Wellen, 53
 elliptische, 54
 lineare, 53
 zirkulare, 53
 Polarisationsrichtung, 53
 Polarisierungstensor, 25
 Polarisierbarkeit, 25
 Polarvektor, 71
 Polynome, 17
 Chebyshev, 18
 Hermite, 17
 hypergeometrische, 18
 Laguerre, 17
 Legendre, 17, 19, 27
 erzeugende Funktion, 20
 zugeordnete, 20
 Potential, 9, 11
 Potentiale
 elektromagnetische, 43
 Poynting
 -Vektor, 84
 Prinzip
 der kleinsten Wirkung, 73
 Hamiltonsches, 73
 Probeladung, 8
 Pseudoskalar, 71
 Pseudotensor, 71
 Punktladungssystem, 10
 Quadrupol, 12
 Quadrupolmoment, 12, 13, 21
 Quanteneffekte, 35
 Quantenmechanik, 55
 Quellenfreiheit, 30
 Quellenterm, 55, 57
 Randbedingung, 15
 Dirichlet-, 15, 21, 23
 gemischte, 22
 Neumann-, 15, 21, 23
 Randeffekte, 14
 Randwertproblem, 8, 15
 Rapidität, 69
 raumartig, 68
 raumartiges
 Ereignis, 68
 Raumwinkel, 60
 Regel
 Lenzsche, 40
 Relativitätstheorie
 spezielle, 67
 Residuensatz, 65
 Residuum, 65
 Rodrigues-Formel, 19
 Rotation, 4
 Separationsansatz, 16
 Skalar
 Pseudo-, 71
 Skalarfeld, 3
 Spannungstensor
 Maxwellscher, 47, 84
 Spektralfunktion, 54
 Stokessche
 Fläche, 13, 37
 Stokesscher
 Satz, 7, 31
 in 4D, 73
 Strahlung, 58
 elektrischer Dipolanteil, 58
 elektrischer Monopolanteil, 58
 Stromdichte, 29, 30, 36
 -vierervektor, 81
 Stromschleife
 Flächeninhalt, 34
 Stromverteilung
 lokalisierte, 32
 Sturm-Liouville-Problem, 17, 19, 50
 Superpositionsprinzip, 8, 9, 80
 Suszeptibilität
 elektrische, 25
 magnetische, 37
 Symmetrie, 9
 azimutale, 19
 Tangentialkomponente, 13, 24, 26, 37–39
 Taylor-Entwicklung, 11
 Tensor
 metrischer, 71
 Pseudo-, 71

Tensorkontraktion, 71
 Tensorverjüngung, 71
 Theorem
 von Poynting, 46, 60
 Transformation
 Lorentz-, 68
 Transformationsgesetz
 des elektrischen Feldes, 40
 Translationsinvarianz, 56
 Trennung
 der Variablen, 15, 18, 49

 Variation, 73
 Vektor
 -operator, 3
 Axial-, 71
 Polar-, 71
 Poyntingscher, 46
 Vektorfeld, 3, 75
 Vektormultipolentwicklungen, 58
 Vektorpotential, 32
 Verhältnis
 gyromagnetisches, 35
 Verschiebung
 dielektrische, 25
 Verschiebungsstrom
 Maxwellscher, 42
 Viererdivergenz, 80
 Vierergeschwindigkeit, 72
 Vierergradient, 72
 Viererimpuls, 75
 Vierertensor, 70
 Vierervektor, 70

 Wärmeleitung, 4
 Wärme
 spezifische, 6
 Wärmeleitungsgleichung, 6
 Wegintegral, 4, 10
 Welle
 ebene, 17
 Kugel-, 55
 monochromatische, 54
 Wellenfront, 52, 55
 Wellengleichung, 52
 Helmholtzsche, 56
 inhomogene, 57
 Wellenlänge, 52, 55
 Wellenpaket, 54
 Gaußscher, 54
 Wellenvektor, 52, 55
 Wellenwiderstand
 des Vakuums, 57
 Wellenzone, 58
 Weltlinie, 72
 Wirkung, 73

 zeitartig, 68
 zeitartiges
 Ereignis, 68
 Zeitdilatation, 68
 Zirkulation, 7
 Zwischenzone, 58