24.04.2012

1.4 Vereinfachte Herleitung ... & Schlusskommentare

$$0 = \delta S = \int dt\, \delta L(q,\dot q,t) = \dots = \int dt\,(\dots)\,\delta q$$

① Argumente von L: wenn $\ddot q, \dddot q, \dots$ in L stünde

$\Rightarrow$ dann $\dddot q, \ddddot q, \dots$ in Bewglnen

$\Rightarrow$ übliche Anfangsbdg. reichen nicht!

② Totale Zeitableitungen: Sei $L' = L + \frac{d}{dt} f(q,t)$

$$\Rightarrow S' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt} f(q,t)$$

$$= S + \underbrace{\left[f(q^{(2)},t_2) - f(q^{(1)},t_1)\right]}_{\text{unabh. von } \delta q}$$

$\Rightarrow \delta S' = \delta S$

$\Rightarrow$ L' gleichwertig mit L bzw. L nur bis auf totale Zeitableitung definiert.

③ Bedeutung von S in QM

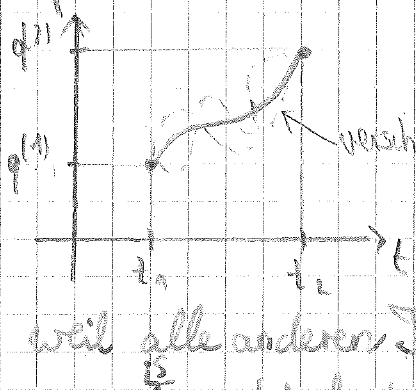
Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang eines Systems von $(q^{(1)}, t_1)$ nach $(q^{(2)}, t_2)$ ist

$$w \sim |A|^2 \quad ; A \in \mathbb{C} \quad \text{„Amplitude"}$$

$$A \sim \underbrace{\int Dq}_{\substack{\text{Summe}\\ \text{über alle}\\ \text{möglichen}}} \exp\left(\frac{iS[q]}{\hbar}\right)$$

Wege von $(q^{(1)}, t_1) \to (q^{(2)}, t_2)$ $\equiv$ „Pfadintegral"

Zitat: „Klassische Mechanik gibt es nicht" (A. Hebecker)



versch. Wege, klassischer Weg ist nur einer davon

[Im Limes $\hbar \to 0$ dominiert der klass. Weg in A, weil alle anderen Integrationsbereiche wegen der schnellen Oszillation von $e^{\frac{iS}{\hbar}}$ nicht beitragen.)

2 Symmetrien & Erhaltungssätze

1) Symmetrien $\Rightarrow$ Form der Wirkung

2) Wirkung hat Symm. $\Rightarrow$ Erhaltungsgröße

2.1 Symmetrie-Motivation der Wirkung der klass. Mechanik

freier Massenpkt.: $L(\vec{x}, \vec{v}, t) = L(\vec{v})$ - Homogenität von Raum & Zeit

Anm.: Raum-Zeit-Invarianz $= L(\vec{v}^2)$ - Isotropie

Galilei-Boost: $\vec{v} \to \vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$

$$L(\vec{v}^2) \to L(\vec{v}'^2) = L(\vec{v}^2 + 2\vec{v}\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^2)$$ Taylor um $\vec{\varepsilon} = 0$

$$= L(\vec{v}^2) + \frac{\partial L(\vec{v}^2)}{\partial \vec{v}^2}\underbrace{(2\vec{v}\vec{\varepsilon})}_{= \frac{d}{dt}(2\vec{x}\cdot\vec{\varepsilon})} + O(\varepsilon^2)$$

falls $\frac{\partial L}{\partial v^2} = \text{const.} \Rightarrow \quad = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}(2\vec{x}\vec{\varepsilon})\right)$

$\Rightarrow$ S ist invariant (bis auf Randterme), falls $\frac{\partial L}{\partial v^2} = \text{const.}$

$\Rightarrow L = \frac{m}{2}\vec{v}^2$

Mehrere Massenpkte: Wegen Additivität gilt $L = \sum_a \frac{m_a}{2}\vec{v}_a^2$

Hinzunahme von Wechselwirkungen der Form $V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$ respektiert Galilei-Trf., weil $|\vec{x}_a - \vec{x}_b|$ invariant.

$\Rightarrow$ $\boxed{L = T - V \text{ in der Tat allgemeinster Fall}}$

2) Symm. $\to$ Erhaltungsgröße

2.2 Energieerhaltung

Homogenität der Zeit = Zeittranslationsinvarianz

$\Rightarrow L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q})$

Summe über i inkludiert

Also: $\frac{d}{dt}L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \underset{\text{E.L.-Gln.}}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\dot{q}_i)$

$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L}_{E}\Big) = 0}$

MB Homogene Fkt.en & Satz von Euler

Eine Fkt. f von n Variablen heißt homogen vom Grad k falls: $f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n)$

24.04.2012

Bsp.: $f(x,y,z) = \frac{x}{y \cdot z} + \frac{1}{x}\cos\left(\frac{x}{z}\right)$ $\}\ k=-1$

: $T = \frac{1}{2} f_{ij}(q)\dot{q}_i \dot{q}_j$ $\}\ k=2$, aber nur bzgl. der $\dot{q}_i$'s

Satz von Euler: f sei homogen vom Grad $k \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = k \cdot f$

Begr.: $\frac{d}{d\alpha} f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \frac{d}{d\alpha}\left(\alpha^k f(x_1, \dots, x_n)\right)$

$$\frac{\partial f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)}{\partial(\alpha x_i)} \cdot \underbrace{\frac{d(\alpha x_i)}{d\alpha}}_{x_i} = k\alpha^{k-1} f(x_1, \dots, x_n)$$

Setz $\alpha = 1 \Rightarrow$ Behauptung steht da. Schöne Grüße an Jannis

Zurück zur Energieerhaltung:

Wir nehmen an: $L = T - V = \underbrace{\frac{1}{2} f_{ij}(q)\dot{q}_i \dot{q}_j} - V(q)$

(Diese Form ergibt sich typischerweise aus $\sum_a \frac{m_a}{2}\dot{\vec{x}}_a^{\,2}$ nach Übergang zu verallg. Koord.)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \overset{\text{Satz von Euler}}{=} 2T$$

Anm.: Summenkonvention

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = \underline{\underline{T + V}} \checkmark$$

(Symmetrie $\hat{=}$ Invarianz)

2.3 Erhaltung der verallg. Impulse

Eine Koordinate heißt „zyklisch" falls sie nicht explizit in L vorkommt. Z.B. ist für

$L(q_2, q_3, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$

die Koordinate q_1 zyklisch. Die Trf. $q_1 \to q_1' = q_1 + \varepsilon$ ist eine Symm.

wegen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$ ist $\boxed{p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}}$ erhalten: $\boxed{\frac{d}{dt}p_1 = 0}$

„verallg. Impuls"

Bsp.: ① Massenpkt. im Potential, welches nicht von x^1 abhängt.

② Massenpkt. in Ebene im Zentralpotential:

$L = \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right) - V(r)$

φ zyklisch! $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \checkmark = |L|$

26.04.2012 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L\right) = 0$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = 0$

2.4 Noether-Theorem

kontinuierliche Symm. unserer Theorie:

Sei $q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + \underset{\text{kleine Änderung}}{\delta q(t)} = q(t) + \underbrace{\varepsilon\, \chi(t)}_{=\delta q(t)}$ (mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ & $\varepsilon \to 0$ möglich)

Wir fordern: $\delta L \equiv L(q+\delta q, \dot q + \delta \dot q, t) - L(q, \dot q, t) \overset{!}{=} \varepsilon \frac{d}{dt} f$ (damit die Bew.glen invariant sind, → 1.4)

$\hat{=}$ kontinuierliche Symm.

$$\varepsilon \frac{d}{dt} f = \delta L = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q}\delta q}_{\text{wird ersetzt mithilfe E.-L.-Gln.}} + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q \overset{\text{E.L.-Gln.}}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{dt}(\delta q)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\underbrace{\delta q}_{\varepsilon\chi} - \varepsilon f\right) = 0$$

↳ ε „kürzen"

Endergebnis: (gleich für viele Koord.-en):

> Sei die Trf. mit $\delta q_i = \varepsilon \chi_i$ eine Symm. (d.h. $\delta L = \varepsilon \frac{d}{dt} f$).
> Dann gilt: $\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\chi_i - f\right)}_{\text{Erhaltungsgröße}} = 0$

Noether-Theorem

Bsp.: ① Zeittranslationsinvarianz: $q'(t) = q(t+\varepsilon)$
(L habe keine expliz. Zeitabh.) $= q(t) + \underbrace{\dot q(t)\cdot\varepsilon}_{\delta q}$

$\boxed{\chi = \dot q}$

$$\Rightarrow \delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial q}\dot q + \varepsilon \frac{\partial L}{\partial \dot q}\ddot q = \varepsilon \frac{d}{dt} L$$

$$= \varepsilon\left(\frac{\partial L}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d\dot q}{dt}\right)$$

$\Rightarrow f = L$; Erhaltungsgröße: $\frac{\partial L}{\partial \dot q}\chi - f = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L = E$

② Zyklische Koordinate:

$q' = q + \varepsilon \Rightarrow \chi = 1$; $\delta L = 0 \Rightarrow f = 0$

Erhaltungsgröße: $\frac{\partial L}{\partial \dot q} - f = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = p$ (verallg. Impuls)

Galilei-Trf.en auf einem Blick:

Zeittransl. $\to$ Energie

Transl. $\to$ Impuls

Rotationen $\to$ Drehimpuls

~~Boosts~~ $\to \bar{x}_S - \bar{v}_S t$ (gerad. gleichf. Bewegung des Schwerpunktes)

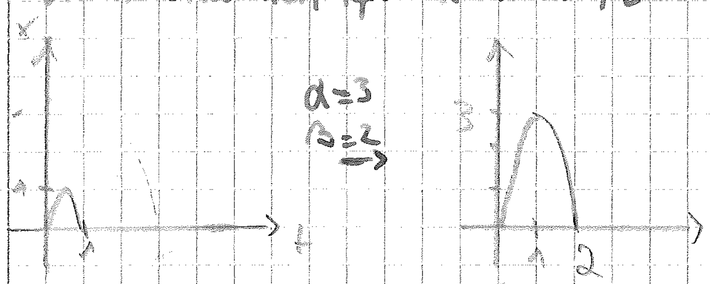
2.5 Mechanische Ähnlichkeit

Sei $L = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\bar{x}}_a^2 - V(\bar{x}_1, .., \bar{x}_N)$

Sei $\underbrace{t \mapsto \{\bar{x}_a(t)\}}_{\text{in Zukunft verkürzt: } t \mapsto x(t)}$ eine phys. Bewegung

$\boxed{\text{Sei } V \text{ homogen vom Grad } k.}$

Wir betrachten Trf. : $x \to \alpha x$ *) ; $t \to \beta t$



Trajektorien der alten & neuen Bewegung sind

$\{t \to x(t)\} \to \{\beta t \to \alpha x(t)\}$

Die kin. & pot. Energien sind dementsprechend:

$T, V \to \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 T, \ \alpha^k V$

*) Ein α für alle x

Falls $\underline{\alpha^k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}$, gilt auch $L \to \alpha^k L$

Nun ist aber $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ ist homogen in L, q, t.

Falls also $x \to \alpha x$, $t \to \beta t$, $L \to \alpha^k L$ gilt:

$\boxed{\text{Die neue transformierte Trajektorie beschreibt wieder eine physik. Bewegung. („mechanische Ähnlichkeit")}}$

Anwendung:
- Sei X eine „typische Länge" einer Bewegung (Bahnradius, Entfernung zum Umkehrpkt., ...)
- Sei T eine „typische Zeit" einer Bewegung (Periode, Zeit zw. zwei Umkehrpkt.en, ...)
- Seien $X' = \alpha X$ & $T' = \beta T$ die entsprechenden Größen der ähnlichen Bewegung

$\Rightarrow \frac{T'}{T} = \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}} = \left(\frac{X'}{X}\right)^{1-\frac{k}{2}}$, also: $\boxed{\frac{T'}{T} = \left(\frac{X'}{X}\right)^{1-\frac{k}{2}}}$

26.04.2012 Bsp.: ① Harm. Osz. : $V \sim x^2$, $k=2$ $\Rightarrow \boxed{\frac{T'}{T} = 1}$ (Periode unabh. zur Auslenkung)

② Freier Fall: $V \sim x$; $k=1$ $\Rightarrow \boxed{\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{x'}{x}}}$ (Quadrate der Fallzeiten verhalten sich wie Fallhöhen.)

③ Gravitation: $V \sim \frac{1}{x}$, $k=-1$ $\Rightarrow \boxed{\frac{T'}{T} = \left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}$ (3. Keplersche Gesetz)

2.6 Virialsatz

Wir interessieren uns für zeitgemittelte Größen:

$$\bar{A} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' A(t')$$

(Besonders einfach falls A totale Zeitableitung ist)

Um $\bar{T}$ zu ermitteln, versuchen wir T als totale Zeitableitung umzuschreiben: $T = \frac{1}{2} m v^2$

Anm.: $F = -\text{grad} V$

$$2T = mv^2 = p \cdot \dot{x} = \frac{d}{dt}(px) - \dot{p}x = \frac{d}{dt}(px) + x \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow 2T - x \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt}(px)$$

$$\overline{2T - x \frac{\partial V}{\partial x}} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' \frac{d}{dt'}(px)$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \left[px|_t - px|_0 \right]$$

$$\underset{\uparrow}{=} 0$$

falls p & x beschränkt

$\Rightarrow$ Für Bewegungen in einem beschränkten Gebiet mit beschränkten Geschwindigkeiten gilt: $\boxed{2\bar{T} = \overline{\underbrace{\sum_a x_a \frac{\partial V}{\partial x_a}}_{\text{Virial}}}}$ Virialsatz

genauer: $\sum_a^N \sum_{i=1}^3 x_a^i \frac{\partial V}{\partial x_a^i}$

Falls V homogen vom Grad k ist, folgt: $2\bar{T} = k\bar{V}$.

z.B.: ① Harm. Osz.: $\bar{T} = \bar{V}$

② Gravitation: $2\bar{T} = -\bar{V}$

relevant für die Langzeitbeschreibung der Bewegung von Sternen in einer Galaxie