28.11.2011

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 1

$v_1 = (0,1,2)$, $v_2 = (2,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$, $v_4 = (1,0,0)$ im $\mathbb{R}^3$

(a)

(v_1, v_2)

$a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a\cdot 0 + b \cdot 2 = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 = 0 \\ a \cdot 2 + b \cdot 0 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2b = 0 & \Rightarrow b = 0 \\ a + b = 0 & \Rightarrow a = -b \\ 2a = 0 & \Rightarrow a = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (v_1, v_2)$ l.u.

$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ darstellbar?

Erzeugendensystem? nein

keine Basis von $\mathbb{R}^3$, da nur zwei Vektoren

(b)

(v_1, v_2, v_3) $\quad a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a \cdot 0 + b \cdot 2 + c \cdot 1 = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0 \\ a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2b + c = 0 & \\ a + b + c = 0 & \mid \cdot 2 \\ 2a + c = 0 & \Leftrightarrow c = 2a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2b + c = 0 \\ 2a + 2b + 2c = 0 \\ 2a + c = 0 \end{array} \ominus$$

$$\begin{array}{l} 2b + c = 0 \\ -2b - c = 0 \end{array} \oplus$$

$0 = 0$

Sei $a = t$

$\Rightarrow c = -2t$

$\Rightarrow b = t$

(v_1, v_2, v_3) l.a., da t beliebig

kein Erzs.

(c) (v_1, v_2, v_4)

$av_1 + bv_2 + cv_4 = 0$

$\Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 2 + c \cdot 1 = 0$

$a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0$

$a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$

$2b + c = 0 \quad \Rightarrow c = 0$

$a + b = 0 \quad \Rightarrow b = 0$

$2a = 0 \quad \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow$ l.u.

ja Erzeugendensystem?

Basis des $\mathbb{R}^3$

(d) (v_1, v_2, v_3, v_4)

$av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0$

$\Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 2 + c \cdot 1 + d \cdot 1 = 0$

$a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d \cdot 0 = 0$

$a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d \cdot 0 = 0$

$2b + c + d = 0$

$a + b + c = 0 \quad | \cdot 2 \quad \Rightarrow b = a$

$2a + c = 0 \quad \Rightarrow c = -2a$

$2b + c + d = 0$ Sei $a = t$

$2a + 2b + 2c = 0 \quad \ominus \quad \Rightarrow b = t$

$2a + c = 0 \quad \Rightarrow c = -2t$

$2b + c + d = 0 \quad \ominus \quad \Rightarrow$ l.a., da t beliebig

$2b + c = 0$ Erzeugendensystem ? 1/a

$d = 0$ keine Basis des $\mathbb{R}^3$

29.11.2011

Aufgabe 2

$U, V \subset \mathbb{R}^4$

$U = Lin((2,3,0,1), (2,0,0,-1), (-2,3,0,3))$

$V = Lin((0,3,1,2), (0,0,1,0))$

U:
$$\begin{aligned} 2a + 2b - 2c &= 0 \\ 3a + 0b + 3c &= 0 \\ 0a + 0b + 0c &= 0 \\ 1a - 1b + 3c &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a + 2b - 2c &= 0 \quad | \cdot (-3) \\ 3a + 3c &= 0 \quad | \cdot 2 \\ a - b + 3c &= 0 \quad | \cdot 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6a - 6b + 6c &= 0 \\ 6a + 6c &= 0 \quad + \\ 6a - 6b + 18c &= 0 \quad \oplus \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6b + 12c &= 0 \quad | \cdot (-2) \\ -12b + 24c &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12b - 24c &= 0 \\ -12b + 24c &= 0 \quad \oplus \end{aligned}$$

$0 = 0$

$$\begin{aligned} 2a + 2b &= 0 \Rightarrow a = -b \\ 3a + 0b &= 0 \Rightarrow a = 0 \\ 0a + 0b &= 0 \\ 1a - 1b &= 0 \Rightarrow a = b \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ eine(!) Basis von U: $(2,3,0,1), (2,0,0,-1)$

$\Rightarrow \underline{\dim U = 2}$

V:
$$\begin{aligned} 0a + 0b &= 0 \\ 3a + 0b &= 0 \Rightarrow a = 0 \\ 1a + 1b &= 0 \Rightarrow a = -b = 0 \\ 2a + 0b &= 0 \Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ l.u.

$\Rightarrow \underline{\underline{\dim V = 2}}$

$U+V = Lin\big((2,3,0,1),(2,0,0,-1),(0,3,1,2),(0,0,1,0)\big)$

$$\begin{array}{ccccl} 2a & 2b & 0c & 0d & =0 \\ 3a & 0b & 3c & 0d & =0 \\ 0a & 0b & 1c & 1d & =0 \\ 1a & -1b & 2c & 0d & =0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2a + 2b = 0 & \Rightarrow & a=-b \Leftrightarrow b=-a \\ 3a + 3c = 0 & \Rightarrow & c=-a \\ c + d = 0 & \Rightarrow & c=-d \\ a - b + 2c = 0 & \Rightarrow & a+b-2a=0 \\ & \Rightarrow & a \text{ bel.} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2a + 2b + 0c = 0 & \Rightarrow & \checkmark \\ 3a + 0b + 0c = 0 & \Rightarrow & a=0 \\ 0a + 0b + 1c = 0 & \Rightarrow & c=0 \\ 1a - 1b + 0c = 0 & \Rightarrow & a=b=0 \end{array}$$

eine(!) Basis zu $(U+V)$ ist $(2,3,0,1)$, $(2,0,0,-1)$, $(0,0,1,0)$

$\Rightarrow \underline{\underline{\dim(U+V) = 3}}$

29.11.2011 **Aufgabe 3**

$K \ldots$ Körper, U, V : K-VR, $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ Mengen

$U \oplus V = (\{(u,v) \mid u \in U, v \in V\}, +_{U \times V}, (0_U, 0_V))$

$$(w_k)_{k \in \mathcal{I} \dot\cup \mathcal{J}} = \begin{cases} (u_k, 0) & \text{für } k \in \mathcal{I} \\ (0, v_k) & \text{für } k \in \mathcal{J} \end{cases}$$

Zz.: $(u_i)_{i \in \mathcal{I}}$ ist X für U und $(v_j)_{j \in \mathcal{J}}$ ist X für V $\Leftrightarrow$ $(w_k)_{k \in \mathcal{I} \dot\cup \mathcal{J}}$ ist X für $U \oplus V$ für $X \in \{$l.u. System, Erzsys, Basis$\}$

Voraussetzung: $\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i u_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i \in \mathcal{I}\right)$ und $\left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j v_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j \in \mathcal{J}\right)$

$\Downarrow \quad \Uparrow$

$$\left(\sum_{k \in \mathcal{I} \dot\cup \mathcal{J}} \alpha_k w_k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \ \forall k \in \mathcal{I} \text{ oder } k \in \mathcal{J}\right)$$

$$w_k = \begin{cases} (u_k, 0) & \text{für } k \in \mathcal{I} \\ (0, v_k) & \text{für } k \in \mathcal{J} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\alpha_{i_1}(u_{i_1}, 0) + \ldots + \alpha_{i_n}(u_{i_n}, 0)} + \underbrace{\alpha_{j_1}(0, v_{j_1}) + \ldots + \alpha_{j_m}(0, v_{j_m})} \overset{!}{=} 0 \quad \text{soll}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i (u_i, 0)} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j (0, v_j)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i v_i, 0\right) + \left(0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j v_j\right)$$

$$= (0, 0) \quad \square$$

analog Erzs. + Basis