Analysis 1

1.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschr.; $a_n > 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$,

$\Rightarrow \exists \beta := \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \beta \ \forall n \geq n_0$

da $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$ gilt auch:

$\prod\limits_{k=m}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \prod\limits_{k=m}^{n-1} \beta$

$\Rightarrow \frac{a_n}{a_m} \leq \beta^{n-m}$

$\Rightarrow a_n \leq \beta^{n-m} \cdot a_m$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq \beta^{1-m/n} \cdot \sqrt[n]{a_m} \xrightarrow[n\to\infty]{}$

$\to \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \beta$ (da $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ u. $m/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

$\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\boxed{//}$

2 a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent nach Satz 6.8

~~Satz~~ $\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

$\Rightarrow$ Es gibt genau einen Häufungswert und dieser ist der Grenzwert.

$\boxed{//}$

b) Alle Teilfolgen einer konvergenten Folge konvergieren gegen den selben Grenzwert:

$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{m_k}$

$\Rightarrow$ ~~$(\lim a_{n_k} - \lim a_{m_k})$~~ $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k} - a_{m_k})$

$= \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} - \lim\limits_{k\to\infty} a_{m_k} = a - a = 0$

$\boxed{//}$

3. Aufgabe

a) $\frac{1}{8} < \frac{1}{2}n \;\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n^2 + \frac{1}{8} < \frac{1}{2}n + n^2$

$\Longrightarrow n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{8} < n^2 + n \Longrightarrow \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 < n(n+1)$

$\Longrightarrow n + \frac{1}{4} < \sqrt{n(n+1)} \Longrightarrow 1 + \frac{1}{4n} < \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n} \left(= \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{4n} < \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1$

$< \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ divergiert $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ divergiert

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}\right)$

$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)\right)$

$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ konvergiert gegen $\frac{1}{4}$

c) ~~$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$~~

~~$|a_n|$~~

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$$

$|a_n| = \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ ist monoton fallend, da:

$$n+\sqrt{n} < n+1+\sqrt{n+1}$$

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} > \frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}}$$

$$|a_n| > |a_{n+1}|$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0 \overset{7.13}{\Longrightarrow}$ Die Reihe ist konvergent.

$$n+n \geq \sqrt{n}+n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{n+n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}+n}$$

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}+n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ ist Minorante und divergent

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+n}$ ist divergent. Deswegen ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n}$ nicht absolut konvergent.

$\blacksquare$

4) a) Wurzelkriterium

$$a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 1 = 0 < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n \text{ konvergiert}$$

b) Quotientenkriterium

$$a_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n}{4}\right)^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{a_n}$$

$$= \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+2)!} \left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{(n+2)} \left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^n$$

$$= \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{4}\right)$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1}\, e \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{e}{4} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \quad \boxtimes$$