

Michelson - Interferometer

Messung der Wellenlänge

Startposition des Spiegels:

```
s0 = Quantity[{13.204, 13.392, 13.182}, "Millimeters"]  
{13.204 mm, 13.392 mm, 13.182 mm}
```

Endposition des Spiegels nach 200 Interferenzlinien :

```
s200 = Quantity[{13.490, 13.726, 13.460}, "Millimeters"]  
{13.49 mm, 13.726 mm, 13.46 mm}
```

```
Δs = Abs[s0 - s200]  
{0.286 mm, 0.334 mm, 0.278 mm}
```

Die Spiegelverschiebung ist im Verhältnis 5:1 untersetzt. Also ist $y = \frac{1}{5} \Delta s$.

```
y = 1 / 5 * Mean[Δs]  
0.0598667 mm
```

```
Δy = 1 / 5 * StandardDeviation[Δs]  
0.0060575 mm
```

```
nLines = 200  
200
```

Die Wellenlänge $\lambda \pm \Delta\lambda$ ist $2 \times \frac{y \pm \Delta y}{n_{\text{Lines}}}$.

```
{λ, Δλ} = UnitConvert[2 * {y, Δy} / nLines, "Nanometers"]  
{598.667 nm, 60.575 nm}
```

```
λ ± Δλ  
598.667 nm ± 60.575 nm
```

Messung des Brechungsindex der Luft

Küvettenlänge:

```
a = Quantity[50, "Millimeters"]; Δa = Quantity[0.05, "Millimeters"];
```

Zunächst zur Abschätzung von n : Die Linien-Zählungen von Druck 0 bis Normaldruck ergeben

```
ΔnLines = {48, 49, 49}  
{48, 49, 49}
```

Also erhalten wir als Brechindizes

$$\mathbf{ns}[\Delta_, \mathbf{A}_] := 1 + \frac{\Delta}{2 \mathbf{A}} \Delta \mathbf{n}_{\text{Lines}}$$

und bilden zwecks Fehlerabschätzung die partiellen Ableitungen nach λ und a (hier aus syntaktischen Gründen mit Großbuchstaben bezeichnet).

$$\mathbf{ns}\Delta[\Delta_, \mathbf{A}_] = \mathbf{D}[\mathbf{ns}[\Delta, \mathbf{A}], \Delta]$$

$$\left\{ \frac{24}{\mathbf{A}}, \frac{49}{2 \mathbf{A}}, \frac{49}{2 \mathbf{A}} \right\}$$

$$\mathbf{ns}\mathbf{A}[\Delta_, \mathbf{A}_] = \mathbf{D}[\mathbf{ns}[\Delta, \mathbf{A}], \mathbf{A}]$$

$$\left\{ -\frac{24 \Delta}{\mathbf{A}^2}, -\frac{49 \Delta}{2 \mathbf{A}^2}, -\frac{49 \Delta}{2 \mathbf{A}^2} \right\}$$

$$\mathbf{n}_{\text{Lab}} = \mathbf{Mean}[\mathbf{ns}[\lambda, a]]$$

$$1.00029$$

$$\Delta \mathbf{n}_{\text{Lab}} = \mathbf{Sqrt}[\mathbf{Mean}[\Delta \mathbf{ns} = \mathbf{Sqrt}[(\mathbf{ns}\Delta[\lambda, a] * \Delta \lambda)^2 + (\mathbf{ns}\mathbf{A}[\lambda, a] * \Delta a)^2]]^2 + \mathbf{StandardDeviation}[\mathbf{ns}[\lambda, a]]^2]$$

$$0.0000296832$$

Wir erhalten also für den Brechungsindex von Luft unter Laborbedingungen:

$$\mathbf{n}_{\text{Lab}} \pm \Delta \mathbf{n}_{\text{Lab}}$$

$$1.00029 \pm 0.0000296832$$

Zur genauen Auswertung betrachten wir die drei durchgeführten Druckmessungen:

$$\mathbf{p}_{\text{meas1}} = \{745, 670, 595, 515, 440, 365, 290, 210, 130, 55, 0\}$$

$$\{745, 670, 595, 515, 440, 365, 290, 210, 130, 55, 0\}$$

$$\mathbf{p}_{\text{meas2}} = \{750, 680, 605, 530, 455, 380, 305, 220, 140, 60, 0\}$$

$$\{750, 680, 605, 530, 455, 380, 305, 220, 140, 60, 0\}$$

$$\mathbf{p}_{\text{meas3}} = \{750, 680, 600, 525, 450, 375, 295, 220, 140, 65, 0\}$$

$$\{750, 680, 600, 525, 450, 375, 295, 220, 140, 65, 0\}$$

$$\mathbf{Lines} = \mathbf{IndependentUnit}["\text{Lines}"]$$

$$\mathbf{IndependentUnit}[\text{Lines}]$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{Transpose}[$$

$$\{\mathbf{Quantity}[\mathbf{Append}[\mathbf{Table}[5 * i, \{i, 0, 9\}], 48], \mathbf{Lines}], -\mathbf{Quantity}[\mathbf{p}_{\text{meas1}}, "\text{Torr}"]\}]$$

$$\{\{0 \text{ Lines}, -745 \text{ torr}\}, \{5 \text{ Lines}, -670 \text{ torr}\},$$

$$\{10 \text{ Lines}, -595 \text{ torr}\}, \{15 \text{ Lines}, -515 \text{ torr}\}, \{20 \text{ Lines}, -440 \text{ torr}\},$$

$$\{25 \text{ Lines}, -365 \text{ torr}\}, \{30 \text{ Lines}, -290 \text{ torr}\}, \{35 \text{ Lines}, -210 \text{ torr}\},$$

$$\{40 \text{ Lines}, -130 \text{ torr}\}, \{45 \text{ Lines}, -55 \text{ torr}\}, \{48 \text{ Lines}, 0 \text{ torr}\}\}$$

```

p2 = Transpose[
  {Quantity[Append[Table[5 * i, {i, 0, 9}], 49], Lines], -Quantity[pmeas2, "Torr"]}]
  {{0 Lines, -750 torr}, {5 Lines, -680 torr},
   {10 Lines, -605 torr}, {15 Lines, -530 torr}, {20 Lines, -455 torr},
   {25 Lines, -380 torr}, {30 Lines, -305 torr}, {35 Lines, -220 torr},
   {40 Lines, -140 torr}, {45 Lines, -60 torr}, {49 Lines, 0 torr}}

```

```

p3 = Transpose[
  {Quantity[Append[Table[5 * i, {i, 0, 9}], 49], Lines], -Quantity[pmeas3, "Torr"]}]
  {{0 Lines, -750 torr}, {5 Lines, -680 torr},
   {10 Lines, -600 torr}, {15 Lines, -525 torr}, {20 Lines, -450 torr},
   {25 Lines, -375 torr}, {30 Lines, -295 torr}, {35 Lines, -220 torr},
   {40 Lines, -140 torr}, {45 Lines, -65 torr}, {49 Lines, 0 torr}}

```

Traumtemperatur:

```

TLab = UnitConvert[Quantity[23.7, "Celsius"], "Kelvins"]
296.85 K

```

```

ΔTLab = UnitConvert[Quantity[0.2, "Celsius"], "Kelvins"]
273.35 K

```

Temperatur und Druck unter Normalbedingungen:

```

T0 = Quantity[273.15, "Kelvins"]
273.15 K

```

```

p0 = Quantity[101325, "Pascals"]
101325 Pa

```

Maximum der Skalenanzeige:

```

pmax = Quantity[800, "Torr"]
800 torr

```

«Qualität» des Meßgeräts, d. h. Güteklasse. Ein Meßwert kann um maximal $q \times p_{\max}$ abweichen.

```

q = .6 / 100
0.006

```

Der Fehler ist damit konstant:

```

Δp = Table[pmax * q, {i, 0, 10}]
{4.8 torr, 4.8 torr, 4.8 torr, 4.8 torr, 4.8 torr,
 4.8 torr, 4.8 torr, 4.8 torr, 4.8 torr, 4.8 torr, 4.8 torr}

```

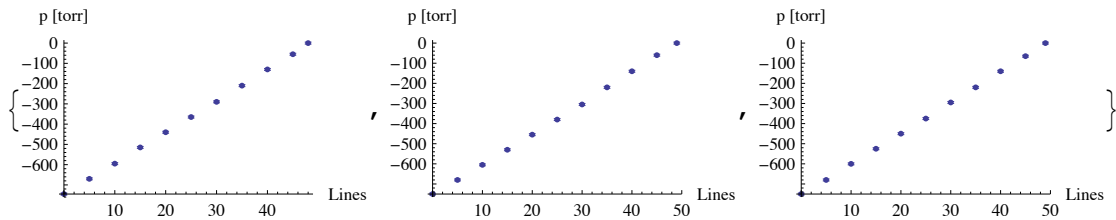
```

Needs["ErrorBarPlots`"]

```

Aus den oben angelegten Datensätzen können wir drei Graphen mit Fehlerbalken zeichnen.

```
Table[ErrorListPlot[
  Transpose[{QuantityMagnitude[pi], Map[ErrorBar, QuantityMagnitude[Δp]]}],
  AxesLabel → {"Lines", "p [torr]"}, {i, 1, 3}]
```



Lineare Regression mit meßfehlerabhängiger Gewichtung der Werte liefert uns dasselbe Ergebnis wie graphisches Anlegen von Ausgleichs- und Fehlergeraden (nur etwas genauer).

```
{fit1, fit2, fit3} = Table[LinearModelFit[
  QuantityMagnitude[pi], x, x, Weights → QuantityMagnitude[1 / Δp],
  VarianceEstimatorFunction → (1 &)], {i, 1, 3}]
```

```
{FittedModel[-748.173 + 15.4392 x],
 FittedModel[-758.655 + 15.4022 x], FittedModel[-754.559 + 15.329 x]}
```

```
fit1["BestFit", "ParameterTable"]
```

		Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
-748.173 + 15.4392 x,	1	-748.173	1.24519	-600.849	4.98813 × 10 ⁻²²
	x	15.4392	0.0425304	363.015	4.64973 × 10 ⁻²⁰

```
fit2["BestFit", "ParameterTable"]
```

		Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
-758.655 + 15.4022 x,	1	-758.655	1.24058	-611.533	4.25646 × 10 ⁻²²
	x	15.4022	0.0421566	365.357	4.38825 × 10 ⁻²⁰

```
fit3["BestFit", "ParameterTable"]
```

		Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
-754.559 + 15.329 x,	1	-754.559	1.24058	-608.231	4.46899 × 10 ⁻²²
	x	15.329	0.0421566	363.621	4.5805 × 10 ⁻²⁰

```
slope1 = fit1["ParameterTableEntries"][[2]][[1 ;; 2]]
```

```
{15.4392, 0.0425304}
```

```
slope2 = fit2["ParameterTableEntries"][[2]][[1 ;; 2]]
```

```
{15.4022, 0.0421566}
```

```
slope3 = fit3["ParameterTableEntries"][[2]][[1 ;; 2]]
```

```
{15.329, 0.0421566}
```

```
slopes = Table[slopei, {i, 1, 3}]
```

```
{{15.4392, 0.0425304}, {15.4022, 0.0421566}, {15.329, 0.0421566}}
```

```
ms = Quantity[First /@ slopes, "Torr"]
```

```
{15.4392 torr, 15.4022 torr, 15.329 torr}
```

```
Δms = Quantity[Last /@ slopes, "Torr"]
```

```
{0.0425304 torr, 0.0421566 torr, 0.0421566 torr}
```

$m = \frac{\Delta p}{\Delta n_{\text{Lines}}}$ ist die Steigung der Striche-Druck-Geraden und wird durch Mittelung bestimmt. Ihr Fehler ist die Summe der Quadrate der Standardabweichung dieser Werte und des mittleren Fehlers auf jeden einzelnen Wert.

m = Mean [ms]

15.3901 torr

$\Delta m = \text{Sqrt}[\text{StandardDeviation}[\text{ms}]^2 + \text{Mean}[\Delta \text{ms}]^2]$

0.0702276 torr

Nun ist der Brechungsindex der Luft unter Normalbedingungen:

$$n_0[\Lambda, A, M, \text{Temp}] := 1 + \frac{\Lambda}{2A} * \frac{1}{M} * \frac{p_0}{T_0} * \text{Temp}$$

Auch hier bilden wir wieder die partiellen Ableitungen:

$$n_\Lambda[\Lambda, A, M, \text{Temp}] = \frac{D[n_0[\Lambda, A, M, \text{Temp}], \Lambda]}{\text{Temp} (185.475 \text{ Pa/K})}$$

A M

$$n_A[\Lambda, A, M, \text{Temp}] = \frac{D[n_0[\Lambda, A, M, \text{Temp}], A]}{\text{Temp} \Lambda (-185.475 \text{ Pa/K})}$$

$A^2 M$

$$n_M[\Lambda, A, M, \text{Temp}] = \frac{D[n_0[\Lambda, A, M, \text{Temp}], M]}{\text{Temp} \Lambda (-185.475 \text{ Pa/K})}$$

$A M^2$

$$n_{\text{Temp}}[\Lambda, A, M, \text{Temp}] = \frac{D[n_0[\Lambda, A, M, \text{Temp}], \text{Temp}]}{\Lambda (185.475 \text{ Pa/K})}$$

A M

Nun können wir n_0 mit Fehler ermitteln:

$n_0[\lambda, a, m, T_{\text{Lab}}]$

1.00032

$$\Delta n_0 = \text{Sqrt}[(n_\Lambda[\lambda, a, m, T_{\text{Lab}}] * \Delta \lambda)^2 + (n_A[\lambda, a, m, T_{\text{Lab}}] * \Delta a)^2 + (n_M[\lambda, a, m, T_{\text{Lab}}] * \Delta m)^2 + (n_{\text{Temp}}[\lambda, a, m, T_{\text{Lab}}] * \Delta T_{\text{Lab}})^2]$$

0.000297636

Ermittlung der Kohärenzlänge

Da wir jeweils auf Basis von zwei Positionsmessungen arbeiten, muß der Fehler auf die einzelne Messung mal $\sqrt{2}$ genommen werden.

$\Delta s = \text{Sqrt}[2] * \text{Quantity}[2, \text{"Micrometers"}]; \Delta s // N$

2.82843 μm

Wir nutzen für die Kohärenzlänge stets die Formel $L = \frac{1}{5} (s' - s)$. Weiterhin ist $\lambda = 546 \text{ nm}$ fix

eingestellt, $\Delta\lambda$ wird variiert.

```
s' = Quantity[{13.444, 13.400, 13.400, 13.380}, "Millimeters"]
{13.444 mm, 13.4 mm, 13.4 mm, 13.38 mm}
```

```
s'' = Quantity[{13.136, 13.180, 13.146, 13.200}, "Millimeters"]
{13.136 mm, 13.18 mm, 13.146 mm, 13.2 mm}
```

$$L = \frac{1}{5} (s' - s'')$$

```
{0.0616 mm, 0.044 mm, 0.0508 mm, 0.036 mm}
```

Der Fehler auf L ist mit obigem Argument immer gleich:

$$\Delta L = \frac{1}{5} \text{Table}[\Delta s, \{i, 1, 4\}]; \Delta L // N$$

```
{0.565685 μm, 0.565685 μm, 0.565685 μm, 0.565685 μm}
```

Da der Name λ bereits oben vergeben ist, müssen wir hier einen anderen (*lambda*) wählen.

```
lambda = Quantity[546, "Nanometers"]
546 nm
```

Bandbreiten:

```
Δlambda = Quantity[{4, 8.6, 16, 32}, "Nanometers"]
{4 nm, 8.6 nm, 16 nm, 32 nm}
```

Nun können wir wieder Graph und Regression erstellen (alle Einheiten werden in Meter umgerechnet):

```
data = QuantityMagnitude[UnitConvert[Transpose[{lambda^2 / Δlambda, L}]]]
```

```
{ { 74 529 / 1 000 000 000, 0.0000616 }, { 0.0000346647, 0.000044 },
  { 74 529 / 4 000 000 000, 0.0000508 }, { 74 529 / 8 000 000 000, 0.000036 } }
```

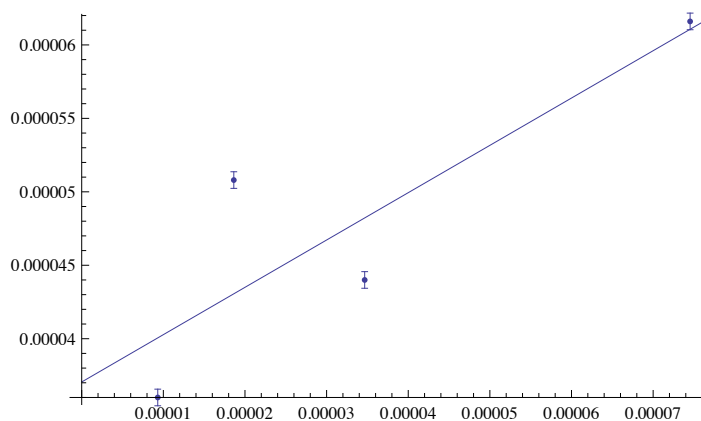
```
error = QuantityMagnitude[UnitConvert[ΔL]]
```

```
{ 1 / (1 250 000 √2), 1 / (1 250 000 √2), 1 / (1 250 000 √2), 1 / (1 250 000 √2) }
```

```
fitL = LinearModelFit[QuantityMagnitude[data], x, x,
  Weights → QuantityMagnitude[1 / error], VarianceEstimatorFunction → (1 &)]
```

```
FittedModel[ 0.0000370545 + 0.322163 x ]
```

```
Show[ErrorListPlot[Transpose[{data, Map[ErrorBar, error]}]],
Plot[fit_L[x], {x, 0, 800 000 / 8 000 000 000}]]
```



```
slope_L = fit_L["ParameterTableEntries"][[2]][[1 ;; 2]]
{0.322163, 15.0781}
```

Die Steigung der Geraden ist also mitnichten 1, sondern vielmehr 0.3 ± 15 . Für eine Erklärung dieser großen Ungenauigkeit siehe die Diskussion im Anschluß.