Zähigkeit von Flüssigkeiten

```
Needs["ErrorBarPlots`"]
```

Kugelfallviskosimeter

Radien der Kügelchen

```
diameters = {1.5, 2, 3, 4, 5, 6, 7.144, 8, 9}
{1.5, 2, 3, 4, 5, 6, 7.144, 8, 9}
```

$\{r_{1.5}, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_{7.144}, r_8, r_9\}$ = .5 Quantity[diameters, "Millimeters"]

{0.75 mm, 1. mm, 1.5 mm, 2. mm, 2.5 mm, 3. mm, 3.572 mm, 4. mm, 4.5 mm}

$\{\Delta r_{1.5}, \Delta r_2, \Delta r_3, \Delta r_4, \Delta r_5, \Delta r_6, \Delta r_{7.144}, \Delta r_8, \Delta r_9\}$ =
 .01 * .5 Quantity[diameters, "Millimeters"]

{0.0075 mm, 0.01 mm, 0.015 mm, 0.02 mm,
 0.025 mm, 0.03 mm, 0.03572 mm, 0.04 mm, 0.045 mm}

Dichten der Kügelchen:

$\rho_{1.5} = \rho_9 = \mathrm{Quantity}\left[1.3625, \frac{\text{"Grams"}}{\text{"Centimeters"}^3}\right]$

$1.3625\ \mathrm{g/cm^3}$

$\rho_2 = \rho_4 = \rho_3 = \rho_5 = \rho_{7.144} = \rho_6 = \mathrm{Quantity}\left[1.3775, \frac{\text{"Grams"}}{\text{"Centimeters"}^3}\right]$

$1.3775\ \mathrm{g/cm^3}$

$\rho_8 = \mathrm{Quantity}\left[1.3575, \frac{\text{"Grams"}}{\text{"Centimeters"}^3}\right]$

$1.3575\ \mathrm{g/cm^3}$

(*Table[$\Delta\rho_i$,{i,diameters}]*) $\{\Delta\rho_{1.5`}, \Delta\rho_2, \Delta\rho_3, \Delta\rho_4, \Delta\rho_5, \Delta\rho_6, \Delta\rho_{7.144`}, \Delta\rho_8, \Delta\rho_9\}$ =
 $\mathrm{Table}\left[\mathrm{Quantity}\left[0.0025, \frac{\text{"Grams"}}{\text{"Centimeters"}^3}\right], \{i, \mathrm{diameters}\}\right]$

$\{0.0025\ \mathrm{g/cm^3}, 0.0025\ \mathrm{g/cm^3}, 0.0025\ \mathrm{g/cm^3}, 0.0025\ \mathrm{g/cm^3},$
 $0.0025\ \mathrm{g/cm^3}, 0.0025\ \mathrm{g/cm^3}, 0.0025\ \mathrm{g/cm^3}, 0.0025\ \mathrm{g/cm^3}, 0.0025\ \mathrm{g/cm^3}\}$

1.5 mm Durchmesser

Hinweis: Der Fehler der Streckenmessung liegt bei ca. 1 mm und damit mit $\frac{1}{200}$ vernachlässigbar klein gegen die anderen Fehler.

Strecke:

```
Δs1.5 = Quantity[200, "Millimeters"]
```

200 mm

Zeitmessungen:

```
Δt1.5 = Quantity[{160.34, 144.13, 154.17, 134.00, 143.69}, "Seconds"]
```

{160.34 s, 144.13 s, 154.17 s, 134. s, 143.69 s}

$$i = 1.5;\ \{v_i, \Delta v_i\} = \mathrm{Map}\left[\#\left[\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}\right] \&,\ \{\mathrm{Mean}, \mathrm{StandardDeviation}\}\right]\ //\ \mathrm{UnitConvert}$$

{0.00136334 m/s, 0.0000947579 m/s}

Temperatur zum Zeitpunkt der Messung:

```
T1.5 = Quantity[22.75, "Celsius"]
```

22.75 °C

```
ΔT1.5 = Quantity[0.5, "Celsius"]
```

0.5 °C

Daraus folgend: Dichte des Polyethylenglykols:

$$\rho_{fl,1.5} = \mathrm{Quantity}\left[1.1468, \frac{\text{"Grams"}}{\text{"Centimeters"}^3}\right]$$

1.1468 g/cm^3

$$\Delta\rho_{fl,1.5} = \mathrm{Quantity}\left[0.0005, \frac{\text{"Grams"}}{\text{"Centimeters"}^3}\right]$$

0.0005 g/cm^3

2 mm Durchmesser

```
Δs2 = Quantity[200, "Millimeters"]
```

200 mm

```
Δt2 = Quantity[{82.59, 82.28, 81.29, 80.92, 80.77}, "Seconds"]
```

{82.59 s, 82.28 s, 81.29 s, 80.92 s, 80.77 s}

$$i = 2;\ \{v_i, \Delta v_i\} = \mathrm{Map}\left[\#\left[\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}\right] \&,\ \{\mathrm{Mean}, \mathrm{StandardDeviation}\}\right]\ //\ \mathrm{UnitConvert}$$

{0.00245208 m/s, 0.0000245631 m/s}

$\{T_2, \Delta T_2\} = \{T_{1.5}, \Delta T_{1.5}\}$

{22.75 °C, 0.5 °C}

$\{\rho_{fl,2}, \Delta\rho_{fl,2}\} = \{\rho_{fl,1.5}, \Delta\rho_{fl,1.5}\}$

{1.1468 g/cm^3, 0.0005 g/cm^3}

3 mm Durchmesser

```
Δs₃ = Quantity[300, "Millimeters"]
```

300 mm

```
Δt₃ = Quantity[{62.67, 64.03, 63.53, 64.48, 60.87}, "Seconds"]
```

{62.67 s, 64.03 s, 63.53 s, 64.48 s, 60.87 s}

$$i = 3;\ \{v_i, \Delta v_i\} = \text{Map}\left[\#\left[\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}\right] \&, \{\text{Mean}, \text{StandardDeviation}\}\right] \text{ // UnitConvert}$$

{0.00475512 m/s, 0.000109038 m/s}

$$\{T_3, \Delta T_3\} = \{T_{1.5}, \Delta T_{1.5}\}$$

{22.75 °C, 0.5 °C}

$$\{\rho_{f1,3}, \Delta\rho_{f1,3}\} = \{\rho_{f1,1.5}, \Delta\rho_{f1,1.5}\}$$

$\{1.1468\ g/cm^3, 0.0005\ g/cm^3\}$

4 mm Durchmesser

```
Δs₄ = Quantity[200, "Millimeters"]
```

200 mm

```
Δt₄ = Quantity[{24.38, 24.92, 25.07, 25.34, 24.59}, "Seconds"]
```

{24.38 s, 24.92 s, 25.07 s, 25.34 s, 24.59 s}

$$i = 4;\ \{v_i, \Delta v_i\} = \text{Map}\left[\#\left[\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}\right] \&, \{\text{Mean}, \text{StandardDeviation}\}\right] \text{ // UnitConvert}$$

{0.00804657 m/s, 0.000123511 m/s}

$$T_4 = \text{Quantity}[23.25, \text{"Celsius"}]$$

23.25 °C

$$\Delta T_4 = \Delta T_{1.5}$$

0.5 °C

$$\rho_{f1,4} = \text{Quantity}\left[1.1463, \frac{\text{"Grams"}}{\text{"Centimeters"}^3}\right]$$

$1.1463\ g/cm^3$

$$\Delta\rho_{f1,4} = \text{Quantity}\left[0.0005, \frac{\text{"Grams"}}{\text{"Centimeters"}^3}\right]$$

$0.0005\ g/cm^3$

5 mm Durchmesser

```
Δs₅ = Quantity[200, "Millimeters"]
```

200 mm

```
Δt₅ = Quantity[{16.31, 15.98, 16.50, 16.29, 16.13}, "Seconds"]
```

{16.31 s, 15.98 s, 16.5 s, 16.29 s, 16.13 s}

$\texttt{i = 5; \{v}_i\texttt{, }\Delta\texttt{v}_i\texttt{\} = Map}\left[\#\left[\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}\right]\texttt{ \&, \{Mean, StandardDeviation\}}\right]\texttt{ // UnitConvert}$

{0.0123152 m/s, 0.000149235 m/s}

$\{T_5, \Delta T_5\} = \{T_4, \Delta T_4\}$

{23.25 °C, 0.5 °C}

$\{\rho_{f1,5}, \Delta\rho_{f1,5}\} = \{\rho_{f1,4}, \Delta\rho_{f1,4}\}$

$\{1.1463\ g/cm^3, 0.0005\ g/cm^3\}$

6 mm Durchmesser

```
Δs₆ = Quantity[200, "Millimeters"]
```

200 mm

```
Δt₆ = Quantity[{11.79, 11.65, 11.97, 11.84, 11.68}, "Seconds"]
```

{11.79 s, 11.65 s, 11.97 s, 11.84 s, 11.68 s}

$\texttt{i = 6; \{v}_i\texttt{, }\Delta\texttt{v}_i\texttt{\} = Map}\left[\#\left[\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}\right]\texttt{ \&, \{Mean, StandardDeviation\}}\right]\texttt{ // UnitConvert}$

{0.0169709 m/s, 0.000185074 m/s}

$\{T_6, \Delta T_6\} = \{T_5, \Delta T_5\}$

{23.25 °C, 0.5 °C}

$\{\rho_{f1,6}, \Delta\rho_{f1,6}\} = \{\rho_{f1,4}, \Delta\rho_{f1,4}\}$

$\{1.1463\ g/cm^3, 0.0005\ g/cm^3\}$

7.144 mm Durchmesser

$\Delta s_{7.144}$ = Quantity[200, "Millimeters"]

200 mm

$\Delta t_{7.144}$ = Quantity[{8.75, 8.73, 8.90, 8.76, 8.88}, "Seconds"]

{8.75 s, 8.73 s, 8.9 s, 8.76 s, 8.88 s}

$\texttt{i = 7.144; \{v}_i\texttt{, }\Delta\texttt{v}_i\texttt{\} = Map}\left[\#\left[\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}\right]\texttt{ \&, \{Mean, StandardDeviation\}}\right]\texttt{ // UnitConvert}$

{0.0227184 m/s, 0.000204687 m/s}

```
T_{7.144} = Quantity[23.5, "Celsius"]
```
23.5 °C

```
ΔT_{7.144} = ΔT_{1.5}
```
0.5 °C

$\rho_{f1,7.144}$ = Quantity$\left[1.1460, \frac{\text{"Grams"}}{\text{"Centimeters"}^3}\right]$

1.146 g/cm^3

$\Delta\rho_{f1,7.144}$ = Quantity$\left[0.0005, \frac{\text{"Grams"}}{\text{"Centimeters"}^3}\right]$

0.0005 g/cm^3

8 mm Durchmesser

```
Δs_8 = Quantity[200, "Millimeters"]
```
200 mm

```
Δt_8 = Quantity[{7.12, 7.92, 7.94, 7.67, 7.77}, "Seconds"]
```
{7.12 s, 7.92 s, 7.94 s, 7.67 s, 7.77 s}

i = 8; {v_i, Δv_i} = Map$\left[\#\left[\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}\right] \&, \{\text{Mean, StandardDeviation}\}\right]$ // UnitConvert

{0.0260694 m/s, 0.00118674 m/s}

{T_8, ΔT_8} = {$T_{7.144}$, $\Delta T_{7.144}$}

{23.5 °C, 0.5 °C}

{$\rho_{f1,8}$, $\Delta\rho_{f1,8}$} = {$\rho_{f1,7.144}$, $\Delta\rho_{f1,7.144}$}

{1.146 g/cm^3, 0.0005 g/cm^3}

9 mm Durchmesser

```
Δs_9 = Quantity[200, "Millimeters"]
```
200 mm

```
Δt_9 = Quantity[{6.21, 6.13, 6.32, 6.19, 6.43}, "Seconds"]
```
{6.21 s, 6.13 s, 6.32 s, 6.19 s, 6.43 s}

i = 9; {v_i, Δv_i} = Map$\left[\#\left[\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}\right] \&, \{\text{Mean, StandardDeviation}\}\right]$ // UnitConvert

{0.0319785 m/s, 0.000603505 m/s}

{T_9, ΔT_9} = {T_8, ΔT_8}

{23.5 °C, 0.5 °C}

```
{ρfl,9, Δρfl,9} = {ρfl,8, Δρfl,8}
```

$\{1.146\ \mathrm{g/cm^3},\ 0.0005\ \mathrm{g/cm^3}\}$

Innendurchmesser des Fallrohres

```
rinnen = .5 Quantity[75, "Millimeters"]
```

37.5 mm

Auswertung der Messungen

Nun wollen wir eine bestimmte Größe, wir nennen sie $q = \frac{\langle v \rangle}{\rho_k - \rho_f}$ (sie ergibt sich aus Formel (14) im Skript bzw. (4) in der schriftlichen Auswertung), gegen r^2 betrachten. Dazu berechnen wir zunächst die Ladenburg'sche Korrektur für alle Radien:

```
(*Table[λi,{i,diameters}]*)
```

$$\{\lambda_{1.5`}, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_{7.144`}, \lambda_8, \lambda_9\} = \mathrm{Table}\left[1 + 2.1\,\frac{r_i}{r_{innen}},\ \{i, \mathrm{diameters}\}\right]$$

{1.042, 1.056, 1.084, 1.112, 1.14, 1.168, 1.20003, 1.224, 1.252}

```
(*Table[Δλi,{i,diameters}]*)
```

$$\{\Delta\lambda_{1.5`}, \Delta\lambda_2, \Delta\lambda_3, \Delta\lambda_4, \Delta\lambda_5, \Delta\lambda_6, \Delta\lambda_{7.144`}, \Delta\lambda_8, \Delta\lambda_9\} = \mathrm{Table}\left[2.1\,\frac{\Delta r_i}{r_{innen}},\ \{i, \mathrm{diameters}\}\right]$$

{0.00042, 0.00056, 0.00084, 0.00112, 0.0014, 0.00168, 0.00200032, 0.00224, 0.00252}

Nun können wir die Größe mit und ohne diese Korrektur berechnen.

$$\{q_{without}, q_{with}\} = \mathrm{Transpose}\left[\mathrm{Table}\left[\frac{v_i\,\{1, \lambda_i\}}{(\rho_i - \rho_{fl,i})},\ \{i, \mathrm{diameters}\}\right]\right]\ //\ \mathrm{UnitConvert}$$

$\{\{6.32052\times10^{-6}\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 0.0000106289\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 0.0000206117\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},$
$0.0000348035\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 0.0000532664\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 0.0000734036\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},$
$0.0000981358\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 0.00012326\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 0.000147707\ \mathrm{m^4/(kg\,s)}\},$
$\{6.58598\times10^{-6}\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 0.0000112241\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 0.0000223431\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},$
$0.0000387015\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 0.0000607237\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 0.0000857354\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},$
$0.000117766\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 0.00015087\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 0.000184929\ \mathrm{m^4/(kg\,s)}\}\}$

$$\Delta q_{without} = \mathrm{Table}\left[\sqrt{\left(\frac{\Delta v_i}{\rho_{fl,i} - \rho_i}\right)^2 + \left(\frac{v_i}{(\rho_{fl,i} - \rho_i)^2}\right)^2 * \left(\Delta\rho_{fl,i}{}^2 + \Delta\rho_i{}^2\right)},\ \{i, \mathrm{diameters}\}\right]\ //\ \mathrm{UnitConvert}$$

$\{4.45611\times10^{-7}\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 1.58535\times10^{-7}\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 5.24664\times10^{-7}\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},$
$6.57786\times10^{-7}\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 8.72734\times10^{-7}\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 1.13842\times10^{-6}\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},$
$1.39636\times10^{-6}\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 5.80447\times10^{-6}\ \mathrm{m^4/(kg\,s)},\ 3.28572\times10^{-6}\ \mathrm{m^4/(kg\,s)}\}$

$$\Delta q_{with} = \text{Table}\Big[\sqrt{\left(\left(\frac{\Delta v_i\,\lambda_i}{(\rho_{fl,i}-\rho_i)}\right)^2 + \left(\frac{v_i\,\lambda_i}{(\rho_{fl,i}-\rho_i)^2}\right)^2 * \left(\Delta\rho_{fl,i}{}^2 + \Delta\rho_i{}^2\right) + \left(\frac{v_i}{(\rho_{fl,i}-\rho_i)}\,\Delta\lambda_i\right)^2\right)},\ \{i, \text{diameters}\}\Big]\ //\ \text{UnitConvert}$$

$\{4.64334\times10^{-7}\ \text{m}^4/(\text{kg s}),\ 1.67519\times10^{-7}\ \text{m}^4/(\text{kg s}),\ 5.69\times10^{-7}\ \text{m}^4/(\text{kg s}),$
$7.32496\times10^{-7}\ \text{m}^4/(\text{kg s}),\ 9.97708\times10^{-7}\ \text{m}^4/(\text{kg s}),\ 1.33538\times10^{-6}\ \text{m}^4/(\text{kg s}),$
$1.68714\times10^{-6}\ \text{m}^4/(\text{kg s}),\ 7.11003\times10^{-6}\ \text{m}^4/(\text{kg s}),\ 4.13053\times10^{-6}\ \text{m}^4/(\text{kg s})\}$

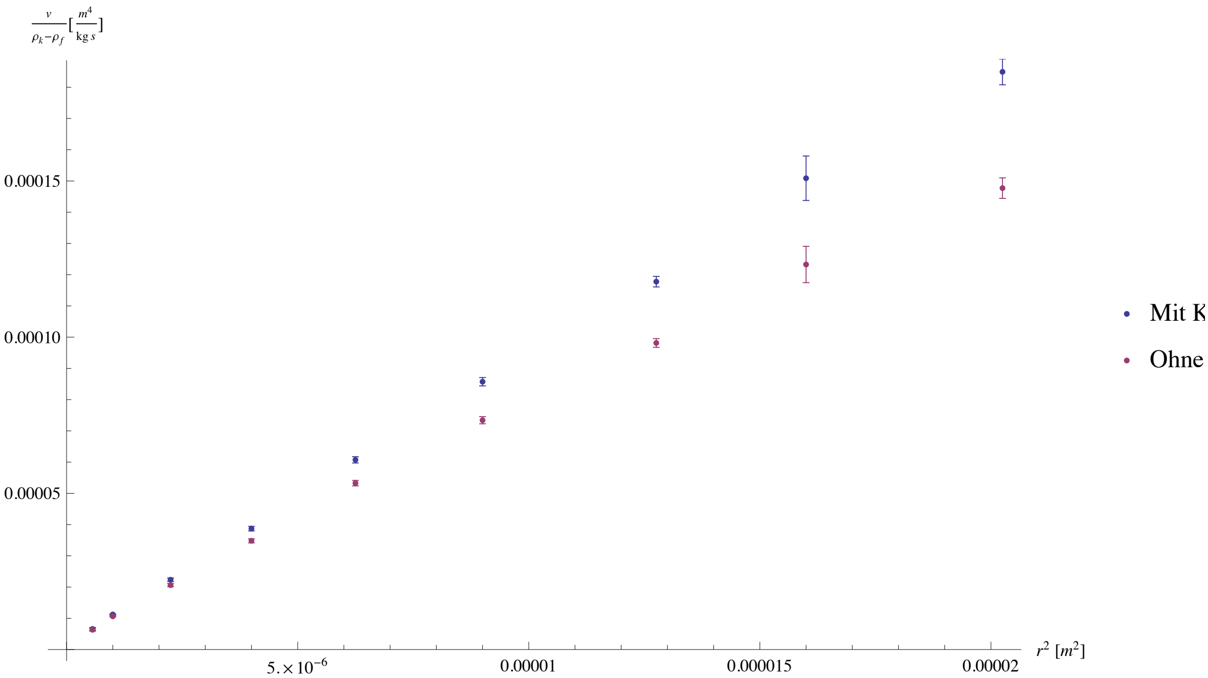
$$\text{rsq} = \text{Table}\left[r_i{}^2,\ \{i, \text{diameters}\}\right]\ //\ \text{UnitConvert}$$

$\{5.625\times10^{-7}\ \text{m}^2,\ 1.\times10^{-6}\ \text{m}^2,\ 2.25\times10^{-6}\ \text{m}^2,\ 4.\times10^{-6}\ \text{m}^2,$
$6.25\times10^{-6}\ \text{m}^2,\ 9.\times10^{-6}\ \text{m}^2,\ 0.0000127592\ \text{m}^2,\ 0.000016\ \text{m}^2,\ 0.00002025\ \text{m}^2\}$

```
{data_with, data_without} = Table[
   Transpose[{Transpose[{rsq, q_what} // QuantityMagnitude],
     ErrorBar /@ QuantityMagnitude[Δq_what]}], {what, {with, without}}];
```

Es ergibt sich die folgende Graphik:

```
fallplot = ErrorListPlot[{data_with, data_without},
  PlotLegends → {"Mit Korrektur", "Ohne Korrektur"},
  AxesLabel → {"r^2 [m^2]", "v/(ρ_k - ρ_f) [m^4/(kg s)]"}]
```

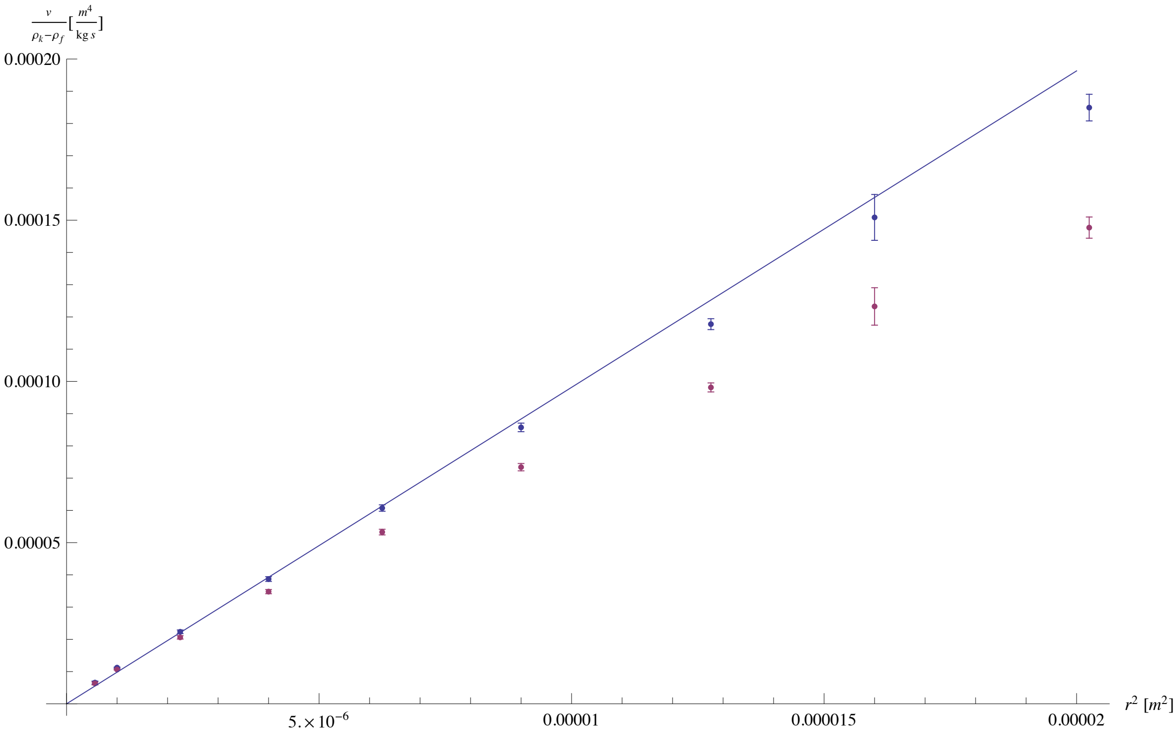


Für den linearen Fit nutzen wir alle Datenpunkte bis auf die letzten zwei; wir fitten die Datenpunkte mit Korrektur. Wir gewichten die Meßpunkte mit den Inversen der Fehlerquadrate; auch gewichten wir die 0 mit einem willkürlichen hohen Wert, um eine Ursprungsgerade zu gewährleisten.

```
fit = LinearModelFit[
  Prepend[Transpose[{rsq, q_with} // QuantityMagnitude], {0, 0}][[ ;; -3]],
  x, x, Weights → Prepend[QuantityMagnitude[1 / Δq_with^2][[ ;; -3]], 10^100
    (*die 0 wird hoch gewichtet*)], VarianceEstimatorFunction → (1 &)]
```

FittedModel[$7.22107\times10^{-92} + 9.81568\,x$]

```
Show[fallplot, Plot[fit[x], {x, 0, 0.00002}], ImageSize → Full, PlotRange → All]
```




```
fit["ParameterTable"] // Chop
```

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	0	0	0	1
x	9.81568	0.0667532	147.044	0

Es folgt für die Steigung:

```
{m, Δm} =
 Quantity[fit["ParameterTableEntries"][[2, 1 ;; 2]], "Meters"^2 / ("Kilograms" * "Seconds")]
```

$\{9.81568\ \mathrm{m^2/(kg\,s)},\ 0.0667532\ \mathrm{m^2/(kg\,s)}\}$

Diese Steigung entspricht nun $\frac{2}{9}\frac{g}{\eta}$. Also können wir angeben:

```
{η_fall, Δη_fall} = (2/9) (g/m) * {1, Δm/m} // UnitConvert[#, "Pascals" * "Seconds"] &
```

{UnitConvert[g (0.0226395 kg s/m²), Pascals Seconds],
 UnitConvert[g (0.000153964 kg s/m²), Pascals Seconds]}

Also ist η mit Fehler:

```
NumberForm[η_fall, 3] ± NumberForm[Δη_fall, 1]
```

```
UnitConvert[g (0.0226 kg s/m^2), Pascals Seconds] ±
 UnitConvert[g (0.0002 kg s/m^2), Pascals Seconds]
```

Untersuchung der Reynoldszahl

Nun können wir für alle Radien den theoretischen Wert v_{lam} mit Fehler gemäß Gleichung (14) aus dem Praktikumsskript berechnen:

```
g = Quantity["StandardAccelerationOfGravity"];
```

$$\text{Table}\left[v_{lam,i} = \frac{2}{9} g \frac{(\rho_i - \rho_{fl,i})}{\eta_{fall} \lambda_i} r_i^2, \{i, \text{diameters}\}\right] \text{ // UnitConvert}$$

```
{0.00114294 m/s, 0.00214439 m/s, 0.00470025 m/s, 0.00816326 m/s,
 0.0124418 m/s, 0.0174867 m/s, 0.0241602 m/s, 0.0271375 m/s, 0.0343715 m/s}
```

$$\text{Table}\left[\Delta v_{lam,i} = \frac{2}{9} g \sqrt{\left(\left(2 \frac{(\rho_i - \rho_{fl,i})}{\eta_{fall} \lambda_i} r_i \Delta r_i\right)^2 + \left(\Delta\rho_i^2 + \Delta\rho_{fl,i}^2\right)\left(\frac{1}{\eta_{fall} \lambda_i} r_i^2\right)^2 + \left(\frac{(\rho_i - \rho_{fl,i})}{\eta_{fall}^2 \lambda_i} r_i^2 \Delta\eta_{fall}\right)^2 + \left(\frac{(\rho_i - \rho_{fl,i})}{\eta_{fall} \lambda_i^2} r_i^2 \Delta\lambda_i\right)^2\right)}, \{i, \text{diameters}\}\right] \text{ // UnitConvert}$$

```
{0.0000276705 m/s, 0.0000511364 m/s, 0.000112116 m/s,
 0.000194701 m/s, 0.000296877 m/s, 0.00041746 m/s,
 0.000576977 m/s, 0.000661902 m/s, 0.000834156 m/s}
```

Die Reynoldszahlen ergeben sich mit Fehlern zu:

$$\text{Table}\left[\text{Reynolds}_i = \frac{2 \rho_{fl,i} v_i r_i}{\eta_{fall}}, \{i, \text{diameters}\}\right]$$

```
{0.0105632, 0.0253317, 0.0736856, 0.166181,
 0.317923, 0.525735, 0.837754, 1.07651, 1.48558}
```

$$\text{Table}\left[\Delta\text{Reynolds}_i = \sqrt{\left(\left(\frac{2 \Delta\rho_{fl,i} v_i r_i}{\eta_{fall}}\right)^2 + \left(\frac{2 \rho_{fl,i} \Delta v_i r_i}{\eta_{fall}}\right)^2 + \left(\frac{2 \rho_{fl,i} v_i \Delta r_i}{\eta_{fall}}\right)^2 + \left(\frac{2 \rho_{fl,i} v_i r_i}{\eta_{fall}^2} \Delta\eta_{fall}\right)^2\right)}, \{i, \text{diameters}\}\right]$$

```
{0.000745232, 0.000397945, 0.00191051, 0.00324818,
 0.0054446, 0.00856427, 0.0126391, 0.0507073, 0.0333049}
```

Wir bilden einige Hilfstabellen für $\frac{v}{v_{lam}}$ sowie ln (Reynolds), jeweils mit Fehlern.

```
vovervlam = Table[v_i / v_{lam,i}, {i, diameters}]
```

{1.19283, 1.14349, 1.01167, 0.985706,
0.989824, 0.970504, 0.940323, 0.960642, 0.930377}

$$\Delta\text{vovervlam} = \text{Table}\left[\sqrt{\left(\frac{\Delta v_i}{v_{lam,i}}\right)^2 + \left(\frac{v_i}{v_{lam,i}^2}\,\Delta v_{lam,i}\right)^2},\ \{i, \text{diameters}\}\right]$$

{0.0877923, 0.0295764, 0.0334739, 0.0279578,
0.0264897, 0.0254717, 0.0240011, 0.0496123, 0.0286027}

```
lnR = Table[Log[Reynolds_i], {i, diameters}]
```

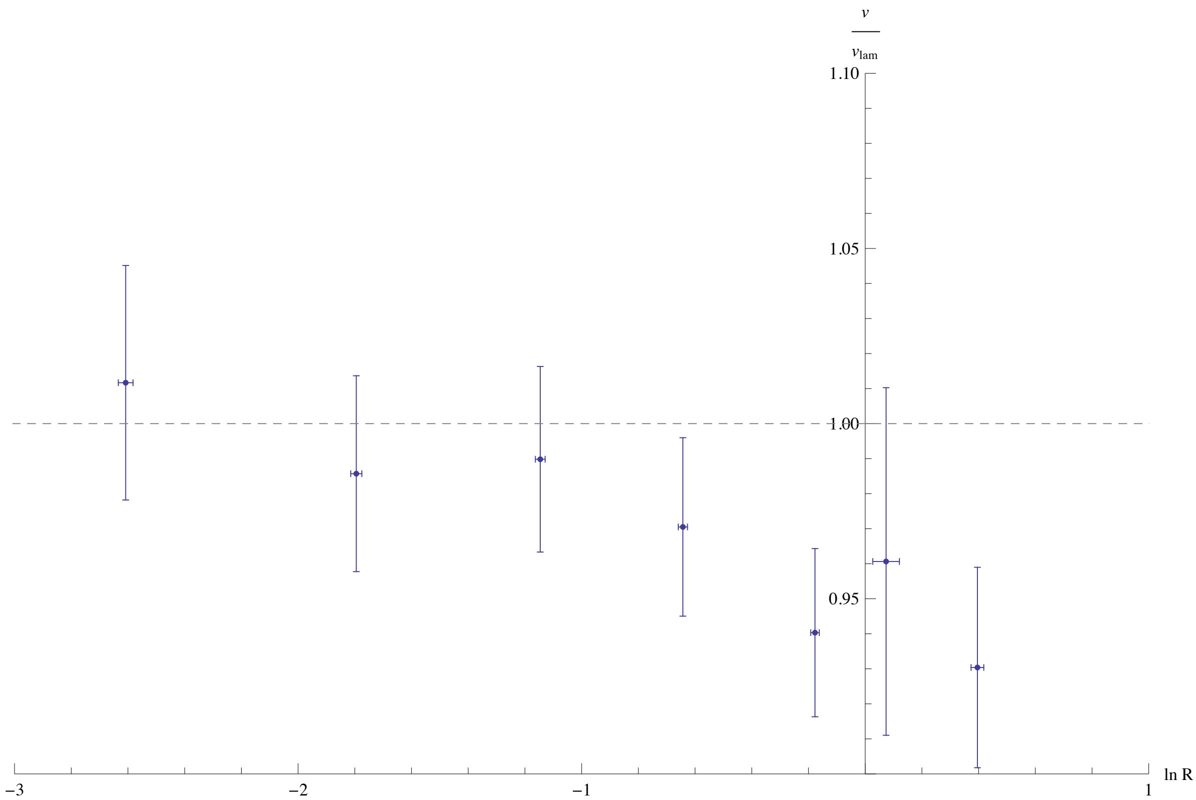
{-4.55038, -3.6757, -2.60795, -1.79468,
-1.14595, -0.642958, -0.177031, 0.0737235, 0.395808}

$$\Delta\text{lnR} = \text{Table}\left[\frac{\Delta\text{Reynolds}_i}{\text{Reynolds}_i},\ \{i, \text{diameters}\}\right]$$

{0.0705501, 0.0157094, 0.0259278, 0.0195461,
0.0171255, 0.0162901, 0.0150869, 0.0471034, 0.0224187}

Nun können wir $\frac{v}{v_{lam}}$ gegen ln(Reynolds) auftragen. Dabei lassen wir die ersten beiden Werte, wo v etwas größer als v_{lam} ist, weg, da sie die Erkennbarkeit des Knicks trüben. Dieser ist dann kurz vor der 0 wahrzunehmen, also können wir die kritische Reynoldszahl als »etwa 1« abschätzen (siehe unten).

```
ErrorListPlot[Transpose[{Transpose[{lnR, vovervlam}],
   Apply[ErrorBar, #] & /@ Transpose[{ΔlnR, Δvovervlam}]}],
 PlotRange → {{-3, 1}, {.9, 1.1}}, AxesLabel → {"ln R", "v/vlam"},
 Epilog → {Dashed, Gray, Line[{{-10, 1}, {10, 1}}]}, ImageSize → Full]
```



Genauer als

```
Reynolds7.144 ± ΔReynolds7.144 // NumberForm[#, 2] &
```

0.84 ± 0.013

(in nicht-logarithmischer Skala) können wir die Position des Knicks wohl nicht bestimmen.

Kapillarviskosimeter

Länge des Kapillarrohrs:

```
{L, ΔL} = Quantity[{100, .5}, "Millimeters"]
```

{100 mm, 0.5 mm}

Radius des Kapillarrohrs:

```
{R, ΔR} = .5 Quantity[{1.5, .01}, "Millimeters"]
```

{0.75 mm, 0.005 mm}

Temperatur:

$\{T_M, \Delta T_M\}$ = Quantity[{23.5, .5}, "Celsius"]

{23.5 °C, 0.5 °C}

Daraus folgt die Dichte der Flüssigkeit:

$\{\rho_{fl,M}, \Delta\rho_{fl,M}\} = \{\rho_{fl,9}, \Delta\rho_{fl,9}\}$

$\{1.146\ g/cm^3, 0.0005\ g/cm^3\}$

Höhe der Flüssigkeitssäule zu Beginn der Messung:

$\{h_A, \Delta h_A\}$ = Quantity[{547, 1}, "Millimeters"]

{547 mm, 1 mm}

Höhe der Flüssigkeitssäule am Ende der Messung:

$\{h_E, \Delta h_E\}$ = Quantity[{540, 1}, "Millimeters"]

{540 mm, 1 mm}

Daraus folgt die mittlere Höhe:

$$\{\overline{h}, \overline{\Delta h}\} = \left\{\frac{h_A + h_E}{2}, \sqrt{\Delta h_A^2 + \Delta h_E^2}\right\} \text{ // N}$$

{543.5 mm, 1.41421 mm}

Nach Pascal ist die Druckdifferenz:

$p_{diff} = \rho_{fl,M} * g * \overline{h}$ // UnitConvert[#, "Pascals"] &

6108.08 Pa

$$\Delta p_{diff} = \sqrt{\left(\Delta\rho_{fl,M} * g * \overline{h}\right)^2 + \left(\rho_{fl,M} * g * \overline{\Delta h}\right)^2} \text{ // UnitConvert[\#, "Pascals"] \&}$$

16.1154 Pa

times = {5, 10, 15, 20, 25}; Table[V_i = Quantity[i, "Centimeters"^{3}], {i, times}]

$\{5\ cm^3, 10\ cm^3, 15\ cm^3, 20\ cm^3, 25\ cm^3\}$

Zeit, nach der 5 ml ausgeflossen sind:

$\{t_5, \delta t_5\}$ = Quantity[{129.64, .01}, "Seconds"]

{129.64 s, 0.01 s}

Zeit, nach der 10 ml ausgeflossen sind:

$\{t_{10}, \delta t_{10}\}$ = Quantity[{246.42, .01}, "Seconds"]

{246.42 s, 0.01 s}

Zeit, nach der 15 ml ausgeflossen sind:

$\{t_{15}, \delta t_{15}\}$ = Quantity[{400.74, .01}, "Seconds"]

{400.74 s, 0.01 s}

Zeit, nach der 20 ml ausgeflossen sind:

$\{t_{20}, \delta t_{20}\}$ = Quantity[{538.96, .01}, "Seconds"]

{538.96 s, 0.01 s}

Zeit, nach der 25 ml ausgeflossen sind:

```
{t25, δt25} = Quantity[{676.11, .01}, "Seconds"]
```

{676.11 s, 0.01 s}

Wir berechnen Mittelwert und Fehler des Volumenstroms:

$$\{Vdot, \Delta Vdot\} = \text{Map}\left[\#\left[\text{Table}\left[\frac{V_i}{t_i}, \{i, \text{times}\}\right]\right] \&, \{\text{Mean}, \text{StandardDeviation}\}\right] \text{// UnitConvert}$$

$\{3.8133 \times 10^{-8}\ m^3/s,\ 1.5053 \times 10^{-9}\ m^3/s\}$

Nun können wir das Gesetz von Hagen-Poiseuille anwenden:

$$\eta_{hp} = \frac{\pi * p_{diff} * R^4}{8 * Vdot * L} \text{ // UnitConvert}[\#, \text{"Seconds"} * \text{"Pascals"}] \&$$

0.199026 s Pa

$$\Delta\eta_{hp} = \sqrt{\left(\left(\frac{\pi * \Delta p_{diff} * R^4}{8 * Vdot * L}\right)^2 + \left(\frac{\pi * p_{diff} * 4 R^3 \Delta R}{8 * Vdot * L}\right)^2 + \left(\frac{\pi * p_{diff} * R^4}{8 * Vdot^2 * L} \Delta Vdot\right)^2 + \left(\frac{\pi * p_{diff} * R^4}{8 * Vdot * L^2} \Delta L\right)^2\right)}$$

0.00954772 s Pa

Also ergibt sich für η:

$$\text{NumberForm}[\eta_{hp}, 2] \pm \text{NumberForm}[\Delta\eta_{hp}, 1]$$

0.2 s Pa ± 0.01 s Pa

Reynoldszahl

Hierfür müssen wir noch die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit errechnen:

$$\overline{v} = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{p_{diff}}{4\, \eta_{hp}\, L} \left(R^2 - r^2\right) dr \text{ // UnitConvert}$$

0.0287718 m/s

Dann ergibt sich mit der charakteristischen Länge 2 *R*

$$\text{Reynolds}_{hp} = \frac{2\, \rho_{fl,M}\, \overline{v}\, R}{\eta_{hp}}$$

0.248504

mit dem Fehler (wobei wir den Fehler auf $\overline{v}$ vernachlässigen):

$$\Delta\text{Reynolds}_{hp} = \sqrt{\left(\frac{2\, \Delta\rho_{fl,M}\, \overline{v}\, R}{\eta_{hp}}\right)^2 + \left(\frac{2\, \rho_{fl,M}\, \overline{v}\, \Delta R}{\eta_{hp}}\right)^2 + \left(\frac{2\, \rho_{fl,M}\, \overline{v}\, R}{\eta_{hp}^2} \Delta\eta_{hp}\right)^2}$$

0.0120364

Wir stellen also fest, daß es sich unmöglich um eine turbulente Strömung gehandelt haben kann, wenn die kritische Reynoldszahl bei dieser Strömungsart erst bei ca. 2000 liegt.

Vergleich der gemessenen Viskositäten

```
Grid[{{Null, Text["Fallviskosimeter"], Text["Hagen-Poiseuille"]}, {Text["η"],
    (ηfall // NumberForm[#, 3] &) ± (Δηfall // NumberForm[#, 1] &),
    (ηhp // NumberForm[#, 2] &) ± (Δηhp // NumberForm[#, 1] &)}},
 Frame → All]
```

	Fallviskosimeter	Hagen–Poiseuille
η	0.222 s Pa ± 0.002 s Pa	0.2 s Pa ± 0.01 s Pa