

Der MILLIKAN - Versuch - Arbeitsblatt zur Theorie (Methode 2)

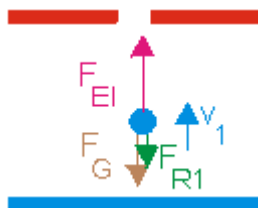
Die zweite Methode zur Bestimmung der Elementarladung e besteht darin,

- zuerst ein Öltröpfchen durch Anlegen einer Spannung steigen zu lassen (Steigen im Elektrischen Feld) und die eingestellte Spannung und die Geschwindigkeit des Öltröpfchens zu messen und
- dann das gleiche Öltröpfchen durch Umpolen der Spannung ‚fallen‘ zu lassen (Fallen im Elektrischen Feld) und dabei wieder seine Geschwindigkeit zu messen.

Steigen im Elektrischen Feld

Durchführung und Beobachtung: Die Spannung U wird so lange vergrößert, bis das Tröpfchen nach oben steigt. (Für ein negativ geladenes Tröpfchen muss die obere Platte positiv und die untere Platte negativ geladen werden). Nach einer kaum beobachtbaren Beschleunigungsphase steigt das Tröpfchen mit konstanter Geschwindigkeit v_1 nach oben.

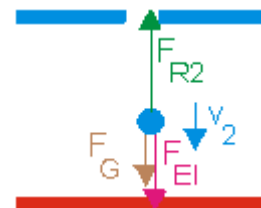
Erklärung: Auf das Tröpfchen wirken zuerst nur die Gewichtskraft F_G nach unten und die betraglich größere Elektrische Kraft F_{EI} nach oben, so dass die nach oben gerichtete resultierende Kraft F das Tröpfchen nach oben beschleunigt. Durch die größer werdende Geschwindigkeit steigt nun die der Bewegung entgegengerichtete STOKESsche Reibungskraft F_{R1} so lange an, bis sie betraglich gleich der resultierenden Kraft F ist. Ab diesem Zeitpunkt wirkt auf das Tröpfchen keine resultierende Kraft mehr und es bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter nach oben.



Fallen im Elektrischen Feld

Durchführung und Beobachtung: Die Spannung U wird nur umgepolt, so dass das Tröpfchen jetzt nach unten fällt. (Für ein negativ geladenes Tröpfchen ist jetzt die obere Platte negativ und die untere Platte positiv geladen). Nach einer kaum beobachtbaren Beschleunigungsphase fällt das Tröpfchen mit konstanter Geschwindigkeit v_2 nach unten.

Erklärung: Auf das Tröpfchen wirken zuerst nur die Gewichtskraft F_G und die Elektrische Kraft F_{EI} nach unten, so dass die nach unten gerichtete resultierende Kraft F das Tröpfchen nach unten beschleunigt. Durch die größer werdende Geschwindigkeit steigt nun die der Bewegung entgegengerichtete STOKESsche Reibungskraft F_{R2} so lange an, bis sie betraglich gleich der resultierenden Kraft F ist. Ab diesem Zeitpunkt wirkt auf das Tröpfchen keine resultierende Kraft mehr und es bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter nach unten.



Auswertung: Es gilt somit folgendes Kräftegleichgewicht:

Die Summe aus STOKESscher Reibungskraft $F_{R1} = -6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_1$ (η : Zähigkeit der Luft; r : Radius des Tröpfchens; v_1 : Geschwindigkeit des Tröpfchens beim Steigen) und Gewichtskraft $F_G = -m \cdot g$ (m : Masse des Tröpfchens; g : Erdbeschleunigung) ist betragsgleich der Elektrischen Kraft $F_{El} = +q \cdot E$ (q : Ladung des Tröpfchens; E : Elektrische Feldstärke des an die Metallplatten angelegten Elektrischen Feldes):

$$|F_{R1} + F_G| = |F_{El}|$$

$$6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_1 + m \cdot g = q \cdot E \quad (\text{Gleichung 1})$$

Durch Einsetzen von $m = \rho_{\text{öl}} \cdot V = \rho_{\text{öl}} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ ($\rho_{\text{öl}}$: Dichte von Öl; V : Volumen des Tröpfchens; r : Radius des Tröpfchens) und $E = \frac{U}{d}$ (U : Spannung zwischen den Metallplatten; d : Abstand der Metallplatten) sowie Eliminieren der schwer zu bestimmenden Größe r aus den entstehenden Gleichungen erhält man für die Ladung q

$$q = \frac{9\pi \cdot d}{2 \cdot U} \sqrt{\frac{\eta^3}{\rho_{\text{öl}} \cdot g}} \cdot \sqrt{v_2 - v_1} \cdot (v_2 + v_1) \quad (\text{Gleichung 3})$$

Die Größen η , $\rho_{\text{öl}}$ und g können aus Tabellen entnommen, die Größen U , d , v_1 und v_2 gemessen werden, so dass die Ladung q berechnet werden kann.

Arbeitsaufträge:

1. *Leiten Sie mit Hilfe der folgenden Arbeitsschritte die Formel zur Berechnung der Ladung q her:*

- Ersetzen Sie in Gleichung 1 die Größe m durch $m = \rho_{\text{öl}} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ und die Größe E durch $E = \frac{U}{d}$ und lösen Sie die neue Gleichung nach v_1 auf. Die dadurch neu entstehende Gleichung sei Gleichung 1.1.*
- Ersetzen Sie in Gleichung 2 die Größe m durch $m = \rho_{\text{öl}} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ und die Größe E durch $E = \frac{U}{d}$ und lösen Sie die Gleichung nach v_2 auf. Die dadurch neu entstehende Gleichung sei Gleichung 2.1.*
- Addieren Sie die Gleichungen 1.1 und 2.1, bilden Sie so die Summe $v_2 + v_1$ und fassen Sie die rechte Seite der neuen Gleichung 3.1 so weit wie möglich zusammen.*
- Lösen Sie Gleichung 3.1 nach der Größe q auf. Die dadurch neu entstehende Gleichung sei Gleichung 3.2.*
- Subtrahieren Sie die Gleichungen 1.1 und 2.1, bilden Sie so die Differenz $v_2 - v_1$ und fassen Sie die rechte Seite der neuen Gleichung 3.3 so weit wie möglich zusammen.*
- Lösen Sie Gleichung 3.3 nach der Größe r auf. Die dadurch neu entstehende Gleichung sei Gleichung 3.4.*
- Ersetzen Sie die Größe r in Gleichung 3.2 durch den gleichwertigen Term für r aus Gleichung 3.4 und fassen Sie die rechte Seite der neuen Gleichung 3.5 so weit wie möglich zusammen. Es ergibt sich Gleichung 3.*

Auswertung: Es gilt somit folgendes Kräftegleichgewicht:

Die Summe aus Gewichtskraft $F_G = -m \cdot g$ (m : Masse des Tröpfchens; g : Erdbeschleunigung) und Elektrischer Kraft $F_{El} = -q \cdot E$ (q : Ladung des Tröpfchens; E : Elektrische Feldstärke des an die Metallplatten angelegten Elektrischen Feldes) ist betragsgleich der STOKESsche Reibungskraft $F_{R2} = +6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_2$ (η : Zähigkeit der Luft; r : Radius des Tröpfchens; v_2 : Geschwindigkeit des Tröpfchens beim Fallen):

$$|F_G + F_{El}| = |F_{R2}|$$

$$m \cdot g + q \cdot E = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_2 \quad (\text{Gleichung 2})$$

(*) Die **STOKESsche Reibungskraft** $F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$ (η : Zähigkeit der Luft; r : Radius des Tröpfchens; v : Geschwindigkeit des Tröpfchens) ist eine aus der Strömungslehre für laminare Strömungen bekannte Kraft auf kugelförmige Körper in einem ‚zähen‘ Medium mit der Zähigkeit η . Die STOKESsche Reibungskraft tritt nur dann auf, wenn sich das Tropfchen bewegt und wirkt dann der Bewegungsrichtung entgegen. Die Kraft wächst zudem mit der Geschwindigkeit und zwar so lange, bis sich das Tröpfchen nur noch mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Für eine präzisere Messauswertung, die wir an dieser Stelle nicht durchführen werden, müssen weitere Kräfte bzw. Korrekturfaktoren berücksichtigt werden:

Die **Auftriebskraft** in der Luft $F_A = +\rho_{\text{Luft}} \cdot V \cdot g$ (; ρ_{Luft} : Dichte von Luft; V : Volumen des Tröpfchens; g : Erdbeschleunigung). Da die Dichte von Luft gegenüber der Dichte von Öl sehr klein ist, kann man vereinfachend die Auftriebskraft des Tröpfchens in Luft vernachlässigen.

Die **CUNNINGHAMSche Korrektur** der STOKESschen Reibungskraft: Beim Zerstäuben von Öl erhält man so kleine Kugeln, dass der Radius der beobachteten Tröpfchen in der gleichen Größenordnung liegt wie die mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle und das Gesetz von STOKES nur noch bedingt gilt. Die Tröpfchen bewegen sich nicht wie Kugeln durch eine Front von Luftmasse, sondern manövrieren sich zwischen den Luftmolekülen hindurch und erfahren durch Stöße mit einzelnen Molekülen Bremskräfte. Der mittlere Abstand der Luftmoleküle beträgt etwa 10^{-7} m. Erstaunlicherweise lässt sich auch diese Situation pauschal erfassen. Man muss lediglich einen Korrekturfaktor in das STOKESsche Gesetz ein-

bauen. Als Erfahrungswert erhält man für die Zähigkeit von Luft $\eta' = \frac{\eta}{(1 + 0,83 \cdot \frac{10^{-7} \text{ m}}{r})}$ (r : Radius des

Tröpfchens). Für ein Tröpfchen mit dem Radius $r = 2,8 \cdot 10^{-8}$ m wäre $\eta' = 0,25\eta$ nur noch ein Viertel des Wertes für eine Kugel, für $r = 8,3 \cdot 10^{-7}$ m wäre $\eta' = 0,9\eta$. Je kleiner also die Tröpfchen, desto größer die Abweichung vom STOKESschen Gesetz.