1 Systemmodellierung

1.1 Einführung

"Also, wat is en Dampfmaschin? Da stelle mer uns janz dumm. Und da sage mer so: En Dampfmaschin, dat is ene jrosse schwarze Raum, der hat hinten und vorne e Loch. Dat eine Loch, dat is de Feuerung. Und dat andere Loch, dat krieje mer späer"
[Feuerzangenbowle, Heinrich Spoerl]

Das ist ein früher Versuch, ein technisches System als "Black-box" unter Verwendung von Ein- und Ausgangsgrössen zu beschreiben. Obwohl eine Dampfmaschine sehr gross sein kann, ist ihre Komplexität, verglichen mit moderneren technischen Systemen, bescheiden.

Eine deskriptive Beschreibung eines komplexen Systems wird leicht unverständlich und schwer reproduzierbar. Die Reproduzierbarkeit ist hingegen bei einer mathematischen Beschreibung eines Systems gewährleistet.

Definition 1.1

Ein Systemmodell ist eine rigorose mathematische Beschreibung, die es erlaubt, ein Systemverhalten, teilweise oder vollständig, unter genau spezifizierten Annahmen nachzubilden. Der Gültigkeitsbereich eines Modells wird durch Modellierungsannahmen definiert.

Ein Modell kann zu unterschiedlichen Zwecken verwendet werden, wie z.B. (siehe auch Abb. 1.1) zur:

- **Simulation:** Das Systemverhalten kann unter verschiedenen, auch extremen Bedingungen teilweise nachgebildet und veranschaulicht werden, ohne dazu ein reales System zu beanspruchen.

- **Analyse:** Bestimmte Eigenschaften eines Systems können untersucht werden, wie z.B. Verfügbarkeit, Sicherheit oder Stabilität.

- **Synthese:** Ein System kann modifiziert werden, um spezifizierten Anforderungen an Eigenschaften zu genügen, z.B. Massnahmen zur Steigerung der Verfügbarkeit.

Eine formale Systembeschreibung stellt eine der Vorraussetzungen zur Lösung obiger, wohlgemerkt zentraler, Aufgabe eines Ingenieurs dar.

Die Erstellung eines Systemmodells setzt ausreichende Systemkenntnis voraus. Bei der Modellierung müssen u.a. folgende Aspekte berücksichtigt werden.

1. Definition der Systemgrenzen (Systemdefinition)
2. Systemklasse[1]
3. Annahmen
4. Auswahl einer, für den Analysezweck geeigneten mathematischen Darstellung, beispielsweise anhand der Fragestellung, ob eine statische Betrachtung hinreichend ist oder eine dynamische notwendig wird.
5. Unsicherheiten bezüglich der Systemstruktur, Parameter und getroffenen Annahmen.

1. Die Definition des Begriffes "Systemklasse" folgt später

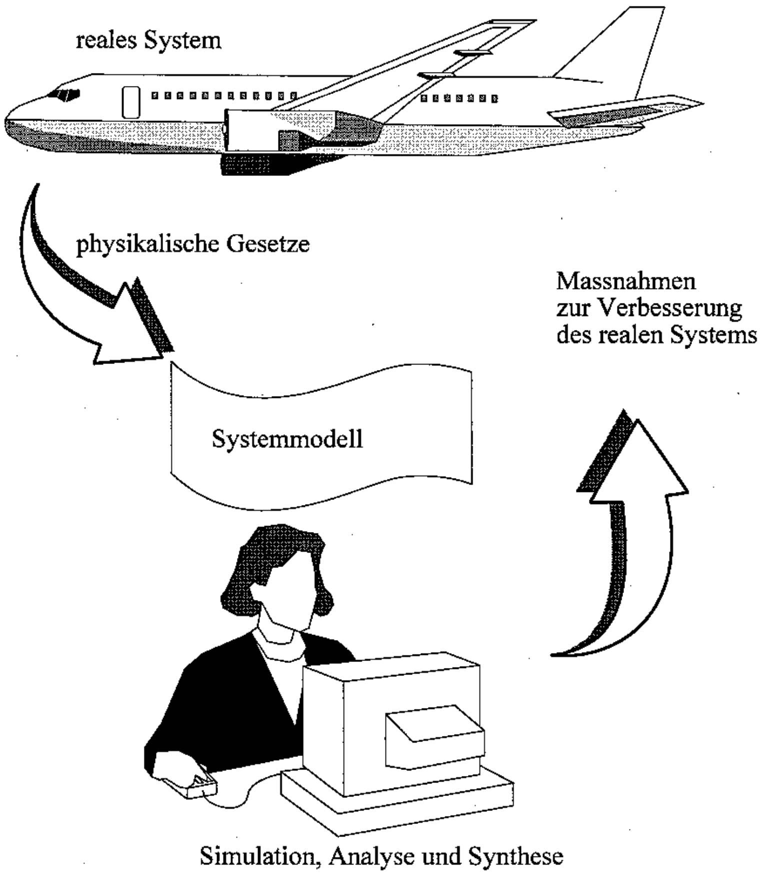

Abb. 1.1 Technisches Vorgehen bei Systemanalyse und Systemsynthese

1.2 Systembeschreibung

Eine Vorraussetzung für die Bestimmung einer Systemgrenze ist die Definition des Systems. Es stellt sich die Frage:

Was ist ein System?

Im allgemeinen Sprachgebrauch wird ein System als eine Anordnung von miteinander gekoppelten Komponenten verstanden, die als Ganzes spezifizierte Funktionen erfüllen sollen (Kap. 2.3.1). Diese Betrachtungsweise allein ist formal ausreichend, da sie keine Möglichkeiten liefert, ein System derart zu beschreiben, dass damit Analyse- und Syntheseaufgaben gelöst werden können. Aus der Sicht der technischen Wissenschaften muss eine Systembeschreibung die Systemeigenschaften (das Verhalten) durch physikalische Grössen wiedergeben.

In der modernen Systemtheorie werden drei Arten von Systembeschreibungen verwendet:

- Verhaltensbasierte Systembeschreibung
- Ein- und Ausgangsbeschreibung
- Zustandsvariablenbeschreibung

1.2.1 Verhaltensbasierte Systembeschreibung

Eine modernere Definition eines Systems [WJ 91] basiert auf einer abstrakten Betrachtung seines Verhaltens.

Definition 1.2

> ***Systemsverhalten:*** *In einem Signalraum W ist das Systemverhalten die Menge aller Trajektorien der Systemvariablen (Abb. 1.2).*

Man unterscheidet dabei nicht zwischen variablen Ein- und Ausgangsgrössen und internen Variablen, sondern versteht alle Variablen als Ein- und Ausgangskandidaten.

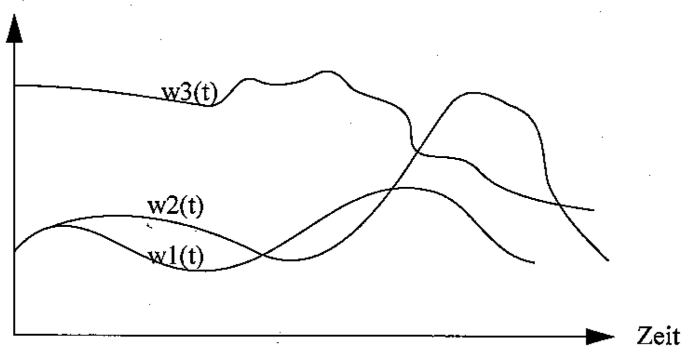

Abb. 1.2 Systemverhalten als Menge aller Trajektorien

Definition 1.3

Definition 1.4

***System (verhaltensbasiert):** Ein System S ist ein Triple*

$$S = \{T, W, B\} \qquad \text{(Gl. 1.1)}$$

mit der Zeit $T \subseteq \mathbf{R}$, dem Signalraum W und dem Verhalten $B \subseteq W$.

Beispiel 1:

Die Planetenbewegung nach Kepler soll zur Verdeutlichung dieser abstrakten Definition herangezogen werden.

$$\begin{aligned} T &= \mathbf{R} \\ W &= \mathbf{R}^3 \\ B &= \left\{ w \mid \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \text{Keplersche Gesetze} \right\} \end{aligned} \qquad \text{(Gl. 1.2)}$$

Für eine Definition eines Systems müssen die für eine Analyse interessanten Variablen definiert werden. Die Systemgrenze ist durch die Angabe der Menge relevanter Systemvariablen definiert.

Beispiel 2:

Man betrachte das System "Personenkraftwagen" (Abb. 1.3).

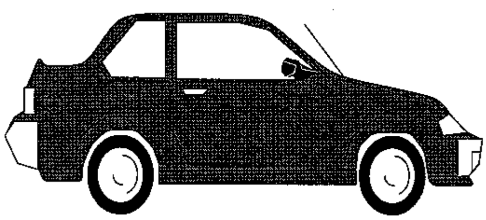

Abb. 1.3 "Personenwagen" als ein System

Dieses System soll beschrieben werden. Es stellt sich dabei die Frage:

Wie wird die Systemgrenze festgelegt?

Die klassische Festlegung der Systemgrenze als eine geometrische Hülle um den PKW erlaubt nur eine Grobe (eher unspezifische) Beschreibung des Systems. Der verhaltensbasierte Ansatz zur Systembeschreibung definiert im voraus die für das Analyseziel relevanten Variablen.

Die populäre Bezeichnung "passive Sicherheit" des Personenwagens z.B. bezieht sich auf das Verhalten des Fahrzeuges bei einer Kollision.

Die relevanten Variablen des Systemverhaltens in bezug auf das Analyseziel "passive Sicherheit" lassen sich entsprechend beschreiben als:

$$B_1=\{\textit{Verformung, Verformungsgeschwindigkeit, Energie des Aufpralls}\}$$

Will man detailliertere Analysen durchführen, kann z.B. die Zugkraft eines Sicherheitsgurtes relevant werden.

Steht die "aktive Sicherheit" im Mittelpunkt unserer Interessen, ist das Verhalten eines PWs vor einer Kollision, d.h. das Verhalen, das zur Vermeidung dieser dienen könnte, von Bedeutung:

$$B_2=\{\textit{Beschleunigung, Bremsverzögerung}\}$$

Je nach gewünschtem Analyseziel ist es auch denkbar, weitere Variablen zu berücksichtigen, z.B. den Reifendruck, der einen Einfluss auf das Beschleunigungs- und Verzögerungsverhalten haben wird. Es kann sogar sein, dass das Autoradio zum System gehört, falls Informationen über den Strassenzustand, die Sichtverhältnisse und das Verkehrsaufkommen von Bedeutung sind. Die Umsetzung von Begriffen, wie Strassenzustand, Sichtverhältnisse und Verkehrsaufkommen, in physikalische, weiterverwendbare Grössen ist als einer der zentralen Punkte einer Modellierung anzusehen.

Zusammenfassend lässt sich folgendes aussagen:

- Ein System ist durch sein Verhalten, d.h. durch die für den Analysezweck interessierenden Variablen, zu definieren und nicht durch Verwendung einer geometrischen Systemgrenze.
- Systemvariablen sind Zeitfunktionen physikalischer Grössen.
- Ein System, dargestellt durch sein Verhalten, kann ohne Ein- und Ausgangsgrössen definiert werden. Sie können später, je nach Anwendung, hinzugefügt werden.

1.2.2 Ein- und Ausgangsbeschreibung

System (Eingang-Ausgang): *Ein System ist ein Abbildungsoperator H[.], der die Eingangsgrössen u in die Ausgangsgrössen y abbildet (Abb. 1.4).*

$$y = H[u] \tag{Gl. 1.3}$$

Die Ein- und Ausgangsgrössen sind im allgemeinen Zeitfunktionen,

$$u = [u1(t), u2(t), \dots] \tag{Gl. 1.4}$$

$$y = [y1(t), y2(t), \dots] \tag{Gl. 1.5}$$

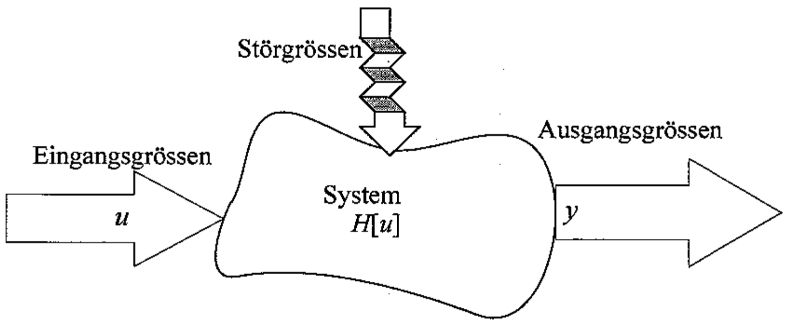

Abb. 1.4 Ein- und Ausgangsbeschreibung des Systems

Wie in Abb. 1.4 dargestellt, kann ein System auch von aussen gestört werden.

Für die Ein- und Ausgangsbeschreibung sind interne Variablen uninteressant. Das System ist in diesem Fall eine “Black-Box”. Die Spezifikationen der Ein- und Ausgangsgrössen sind allerdings, ausser für einfache Systeme, nicht a priori gegeben.

Systemklassifizierung

Es können zwei Hauptklassen von Systemen unterschieden werden:

- deterministische
- stochastische

Der Unterschied liegt darin, dass, im Gegensatz zu deterministischen Systemen, die Zustände stochastischer Systeme Zufallsvariablen sind. Weitere Systemklassifizierungen können für diese beiden Hauptklassen auf Grund der Ein- und Ausgangsbeschreibung gegeben werden.

Definition 1.5

> ***Statisches System:*** *Ein statisches System ist gedächtnislos. Der Momentanwert der Ausgangsgrösse ist durch den Momentanwert der Eingangsgrösse bestimmt.*

$$y(t_i) = H[u(t_i)] \qquad -\infty < t_i < \infty \qquad \text{(Gl. 1.6)}$$

Definition 1.6

> ***Dynamisches System:*** *Ein dynamisches System besitzt ein Gedächtnis. Der Momentanwert der Ausgangsgrösse hängt vom Verlauf der Eingangsgrösse über ein Zeitinterval ab.*

$$y(t) = H[u\langle t_1, t_2\rangle]$$ endliches Gedächtnis

$$y(t) = H[u\langle -\infty, t_2\rangle]$$ unendliches Gedächtnis (Gl. 1.7)

$$y(t) = H[u\langle -\infty, t\rangle]$$ kausales System, zukünftige Werte von u haben keinen Einfluss

Definition 1.7

Zeitinvariantes System: *Ein System heisst zeitinvariant, wenn eine zeitliche Verschiebung der Eingangsgrösse dieselbe zeitliche Verschiebung der Ausgangsgrösse verursacht. Andernfalls ist das System zeitvariant.*

$$H[u(t-\tau)] = y(t-\tau) \qquad \text{(Gl. 1.8)}$$

Definition 1.8

Lineares System: *Ein System heisst linear, wenn eine lineare Kombination mehrerer Eingangsfunktionen dieselbe lineare Kombination der indi-viduellen Ausgangsfunktionen erzeugt (Superpositionsprinzip).*

$$H[\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2] = \alpha_1 \cdot H[u_1] + \alpha_2 H[u_2] \qquad \text{(Gl. 1.9)}$$

1.2.3 Zustandsvariablenbeschreibung

Nach der obigen Definition sind die Ausgangsgrössen eines dynamischen Systems vom Verlauf der Eingangsgrössen über ein Zeitinterval abhängig. Beim kausalen System mit “unendlichem” Gedächtnis gilt:

$$y(t) = H[u\langle -\infty, t_2\rangle] \qquad \text{(Gl. 1.10)}$$

Falls die Eingangsgrösse u erst ab $t=t_0$ bekannt ist, wird neben $u<t_0,t>$ für die Bestimmung der Ausgangsgrösse $y(t)$ zusätzliche Information über den "Zustand" des Systems zur Zeit t_0 benötigt. Dies kann durch $u(-\infty,t_0)$ dargestellt werden.

Definition 1.9

> *Der **Zustand** eines Systems zur Zeit $t=t_0$ ist die minimale Information, die zusammen mit dem Verlauf von $u<t_0,t>$ das Verhalten des Systems (d.h. Ausgang und Zustand) für $t \geq t_0$ eindeutig bestimmt.*

Bemerkungen:

- Die Wahl der Information, die der Beschreibung des Zustands dient, ist nicht eindeutig. Systeme mit unterschiedlichen Zustandsvariablen können dasselbe Ein- und Ausgangsverhalten aufweisen.

- Die Beschreibung des Zustands kann durch eine unendliche oder endliche Anzahl von Variablen erfolgen. Man beachte, dass nicht nur der Ausgang, sondern auch der Zustand für $t>t_0$ durch den Zustand bei $t=t_0$ und $u<t_0,t>$ bestimmt ist.

Im Weiteren sollen nur Systeme, die durch einen Zustandsvektor $x(t)$ mit einer endlichen Anzahl Variablen repräsentiert werden können, betrachtet werden.

Dynamische Gleichungen

Gemäss der Definition von Zustandsvariablen ist der Ausgang und der Zustand für $t>t_0$ eindeutig durch $x(t_0)$ und $u<t_0,t>$ bestimmt.

Die Gleichungen, die diese Relation beschreiben und die Berechnung von $y<t_0,\infty)$ und $x(t_0,\infty>$ ermöglichen, heissen dynamische Gleichungen.

Eine allgemeine Form dieser Gleichungen ist gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\
y(t) &= g(x(t), u(t), t) \\
x(t_0) &= x_0
\end{aligned}
\qquad \text{(Gl. 1.11)}
$$

1.2.4 Unsicherheiten

Die Modellierung technischer (und nicht-technischer) Systeme ist im allgemeinen mit Unsicherheiten behaftet. Folgende Arten von Unsicherheiten verdienen besondere Beachtung:

1. Strukturunsicherheiten beziehen sich auf die Interaktionen zwischen den Komponenten (oder den Subsystemen) eines Systems. Solche Unsicherheiten entstehen v.a. durch unvollständiges Verständnis der Funktionsweise des Systems. Diese besitzen eine gravierende Wirkung auf das Verhalten des Modells. Sie sind aber relativ einfach bei der Modellvalidierung[1] zu entdekken.

   Beruhen die Strukturunsicherheiten auf der abrupten Änderung der Systemfunktion, z.B. durch Umschalten von einer Betriebsart zur anderen oder durch grosse Parameterveränderungen, dann können sie explizit durch eine variable Modellstruktur berücksichtigt werden. Das Systemmodell besteht dann aus mehreren Teilen, die zu- oder ausgeschaltet werden.

2. Parameterunsicherheiten können durch ungenaue Kenntnis der Parameterwerte oder wiederum durch veränderliche Werte während des normalen Betriebs, z.B. wegen des Alterns der Komponenten, entstehen. Die Auswirkung kleiner Parameterunsicherheiten ist, im Vergleich zu den Strukturunsicherheiten, weniger gravierend.

   Die Parameterwerte können durch ein Identifikationsverfahren noch verfeinert werden (Abb. 1.5), falls es möglich, ist Messungen am realen System durchzuführen.

3. Grundsätzlich sind alle Modelle nur unter bestimmten Voraussetzungen aussagekräftig. Annahmen zur Vereinfachung der Modellierung (z.B. linear anstatt nicht-linear oder zeitinvariant anstatt zeitvariant) sind auf ihre Gültigkeit sorgfältig zu untersuchen. Stimmen diese Annahmen nicht mit dem realen System überein, sind die Analyseresultate nur mit Einschränkung zu verwenden.

Die obigen Unsicherheiten betonen die Notwendigkeit der Modellvalidierung als integralen Bestandteil jedes Modellierungsprozesses.

1. Unter Modellvalidierung versteht man die Überprüfung des Verhaltens des Modells im Vergleich zum realen Systems.

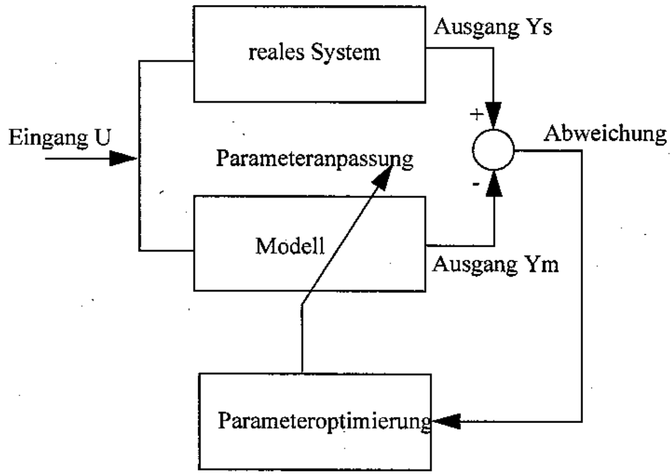

Abb. 1.5 Verfahren zur Parameteridentifikation