Institut für Theoretische Physik | Universität Heidelberg
Prof. Ulrich Schwarz | Thorsten Erdmann
Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2014/2015

4. Übungsblatt

Ausgabe 11-11-2014 – Abgabe 18/19-11-2014 – Besprechung 25/26-11-2014

1. Aufgabe [5 Punkte]: Elektrischer Multipol

Entwickeln Sie das elektrostatische Potential $\phi(\boldsymbol{r})$ der Ladungsverteilung

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\left[\delta\left(\boldsymbol{r} - (a,a,0)\right) + \delta\left(\boldsymbol{r} - (-a,-a,0)\right) - \delta\left(\boldsymbol{r} - (a,-a,0)\right) - \delta\left(\boldsymbol{r} - (-a,a,0)\right)\right]$$

für große Entfernungen $r = |\boldsymbol{r}| \gg a$.

2. Aufgabe [4 Punkte]: Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung

Betrachten Sie eine Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$, deren Gesamtladung Q und Gesamtdipolmoment $\boldsymbol{p}$ verschwinden. Zeigen Sie, dass das Quadrupolmoment dieser Ladungsverteilung gleich bleibt, wenn man die Ladungsverteilung entlang eines Vektors $\boldsymbol{r_0}$ verschiebt. Zeigen Sie auch, dass dies nicht mehr gilt, wenn Q oder $\boldsymbol{p}$ ungleich Null sind.
HINWEIS: Benutzen Sie die kartesischen Definition der Multipolmomente für die Verschiebung.

3. Aufgabe [6 Punkte]: Elektrostatisches Potential mit beweglichen Ladungen

In der Lösung eines Salzes in einer Flüssigkeit bewegen sich positive und negative Ionen frei durch die Flüssigkeit, die eine Temperatur T haben soll. Die Ionen können als Punktladungen $\pm(ze)$ betrachtet werden, wobei e die Elementarladung und z die Valenz der Ionen bezeichnet. In einem elektrostatischen Potential $\phi(\boldsymbol{r})$ folgt die Konzentration $n_\pm(\boldsymbol{r})$ dieser Ionen der Boltzmannverteilung, die somit die Ladungsdichte

$$\rho_\pm(\boldsymbol{r}) = \pm zen_\pm(\boldsymbol{r}) = \pm zen_\infty \mathrm{e}^{\mp ze\phi(\boldsymbol{r})/k_\mathrm{B}T}$$

erzeugen, wobei k_B die Boltzmannkonstante bezeichnet und n_∞ die Ionenkonzentration für $\boldsymbol{r} \to \infty$. Dabei wird angenommen, dass das Potential im unendlichen verschwindet und die Konzentration positiver und negativer Ionen identisch ist.

(a) Formulieren Sie die Poisson-Gleichung für die von den Ionen erzeugte Ladungsdichte und zeigen Sie, dass diese *Poisson-Boltzmann-Gleichung* in der dimensionslosen Form

$$\Delta\psi(\boldsymbol{\xi}) = \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\right]\psi(\boldsymbol{\xi}) = \sinh\left(\psi(\boldsymbol{\xi})\right)\ .$$

geschrieben werden kann. Geben Sie die Definitionen des dimensionslosen Ortsvektors $\boldsymbol{\xi}$ und des dimensionslosen Potentials $\psi(\boldsymbol{\xi})$ an. **[1P]**

(b) Linearisieren Sie die Poisson-Boltzmann-Gleichung für den Fall schwacher Potentiale $\psi \ll 1$. **[1P]**

(c) Zeigen Sie, dass das Yukawa-Potential $\psi(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi}/\xi$ mit $\xi = |\boldsymbol{\xi}|$ die Greensche Funktion der linearisierten Poisson-Boltzmann-Gleichung ist. **[2P]**

(d) Berechnen Sie mit Hilfe der linearisierten Poisson-Boltzmann-Gleichung, das elektrostatische Potential um eine Kugel mit Radius R, die auf ihrer Oberfläche eine homogene Ladungsdichte mit der Gesamtladung Q trägt und sich in einer monovalenten Salzlösung ($z = 1$) befindet. **[2P]**

4. Aufgabe [5 Punkte]: Greensche Funktion einer vektorwertigen Differentialgleichung

In der Vorlesung haben wir die Greensche Funktion für die Poisson-Gleichung für eine skalare Größe $\phi(\boldsymbol{r})$ diskutiert. Jetzt betrachten wir eine ähnliche Gleichung für ein Vektorfeld $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$:

$$\mu \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) + (\mu + \lambda)\, \boldsymbol{\nabla} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \right) = -\boldsymbol{F} \delta(\boldsymbol{r})\,.$$

Dabei sind μ und λ positive Konstanten. Der Unterschied zur Poisson-Gleichung besteht darin, dass es jetzt zwei Terme zweiter Ordnung gibt, von denen der zweite die Komponenten von $\boldsymbol{u}$ koppelt. Die Greensche Funktion ist jetzt ein Tensor zweiter Stufe, der über folgende Beziehung mit $\boldsymbol{u}$ verbunden ist:

$$u_i(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{ij}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') F_j(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}'\,.$$

Zeigen Sie, dass der Tensor

$$G_{ij}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{8\pi\mu\,(2\mu + \lambda)} \left[(3\mu + \lambda)\, \delta_{ij} + (\mu + \lambda)\, \frac{r_i r_j}{r^2} \right] \frac{1}{r}$$

die gesuchte Lösung ist. Skizzieren Sie den Verlauf von $\boldsymbol{u}$ in der x-z-Ebene für $\boldsymbol{F} = (0, 0, F_z)$.