

Übungen zur Linearen Algebra 1 — Zusatzblatt

Prof. Dr. B. H. Matzat

Wintersemester 2013/14

Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß

Abgabe: bis Mo, 03.02.2014, 9:15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

61. Aufgabe: (4 Punkte)

Es sei $V := \{f \in \mathbb{C}[X] \mid \text{grad}(f) \leq 3\}$ der \mathbb{C} -Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 mit Basis $S := \{1, X, X^2, X^3\}$.

(a) Geben Sie die Koordinatendarstellung folgender Vektoren bzgl. der Basis S an:

$$\begin{aligned} f_1 &:= X^3 + 2X^2 + X + 1, & f_2 &:= X^2 - 2X, & f_3 &:= X^3 - X^2 + 3X + 1, \\ f_4 &:= 3X^3 + X^2 + 7X + 3, & f_5 &:= -3X^3 + 2X^2 - 5X - 1, & f_6 &:= 3X^2 + 2X + 2. \end{aligned}$$

(b) Es seien nun die Unterräume U und W gegeben durch

$$U = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \text{ und } W = \langle f_4, f_5, f_6 \rangle.$$

Bestimmen Sie die Dimensionen von U , W , $U + W$ und $U \cap W$.

(c) Auf V sei nun eine lineare Abbildung $\phi \in \text{End}(V)$ gegeben durch

$$\phi(1) = 2X^3 + 2X + 1, \quad \phi(X) = X^2 + 2X, \quad \phi(X^2) = -X^3 + 3X^2 \quad \text{und} \quad \phi(X^3) = iX^3.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D(\phi)_S$ bzgl. der Basis S , die Eigenwerte und Eigenvektoren.

(d) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren eine Basis T von V definieren und geben Sie ohne zu rechnen die Darstellungsmatrix $D(\phi)_T$ an. Berechnen Sie nun die Basiswechsellmatrizen C_T^S und C_S^T .

62. Aufgabe: (4 Punkte)

Es sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum mit Basis $\{s_1, \dots, s_n\}$ und $n > 1$ sowie $\phi \in \text{End}(V)$ gegeben durch

$$\phi(s_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n s_j.$$

Berechnen Sie das Haupt- und Minimalpolynom von ϕ .

Hinweis: Verwenden Sie Induktion.

63. Aufgabe: (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}(V)$ und $W < V$ ein ϕ -invarianter Unterraum. Man zeige:

(a) ϕ definiert einen Endomorphismus $\bar{\phi}$ auf $\bar{V} := V/W$.

(b) Für die Minimalpolynome gilt $g_{\bar{\phi}} \mid g_{\phi}$.

(c) Für die Hauptpolynome gilt $h_{\phi} = h_{\bar{\phi}} \cdot h_{\phi|_W}$

Hinweis: Ergänzen Sie eine Basis von W zu V .

64. Aufgabe: (4 Punkte)

Es sei V ein n -dimensionaler IPR über \mathbb{C} mit Basis $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ und Innenprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(a) Es sei $A_S := (\langle s_i, s_j \rangle)_{i,j} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Man zeige, dass die Gleichung $\langle v, w \rangle = v_S^{tr} A_S \bar{w}_S$ für alle $v, w \in V$ gilt.

(b) Es sei T eine weitere Basis von V . Man zeige, dass $A_T = (C_S^T)^{tr} A_S \bar{C}_S^T$ ist.

(c) Man beweise: Für jede Basis T von V gilt $\det(A_T) > 0$.

Bitte wenden

65. Aufgabe: (4 Punkte)

Es sei $V = \mathbb{R}[1, X, \dots, X^6]$ der \mathbb{R} -Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 6 mit dem Innenprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f \cdot g \, dX.$$

- (a) Bestimmen Sie eine Basis des orthogonalen Komplements W^\perp von $W = \langle X, X^3, X^5 \rangle$.
- (b) Berechnen Sie für $v = 1 + X + X^2 + X^3 + X^5$ die orthogonale Projektion $\pi_W(v)$ von v auf W .
- (c) Zeigen Sie, dass der Abstand von v und $\pi_W(v)$ kleiner als 2 ist, d.h. dass $|v - \pi_W(v)| < 2$ gilt.