

Übungen zur Linearen Algebra 1 — Blatt 12

Prof. Dr. B. H. Matzat

Wintersemester 2013/14

Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß

Abgabe: bis Do, 30.01.2014, 9.15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

56. Aufgabe: (4 Punkte)

Bestimmen Sie zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

die Jordansche Normalform und eine Basis des \mathbb{R}^5 , bezüglich der diese angenommen wird.

57. Aufgabe: (4 Punkte)

Berechnen Sie mit dem Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis von der Basis $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ des \mathbb{C}^4 bezüglich des Standardskalarprodukts, wobei

$$z_1 = (-1, i, 0, 1), \quad z_2 = (i, 0, 2, 0), \quad z_3 = (1 + i, 1 - i, 0, 2) \quad \text{und} \quad z_4 = (0, 1, 2 - i, 2 \cdot i)$$

ist.

58. Aufgabe: (4 Punkte)

Es seien V ein n -dimensionaler Vektorraum über einen Körper K und $\phi \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus mit Hauptpolynom $h_\phi(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{d_i}$ und Haupträumen $H_i^{(j)} := \ker(\phi - a_i I_n)^j$. Man zeige:

(a) Die Anzahl d aller Jordankästchen der Jordanschen Normalform von ϕ ist gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Eigenvektoren, d.h. $d = \sum_{i=1}^r e_\phi(a_i)$.

(b) Für die Anzahl d_{ij} der Jordankästchen der Länge j zum Eigenwert a_i gilt

$$d_{ij} = \dim(H_i^{(j)} / H_i^{(j-1)}) - \dim(H_i^{(j+1)} / H_i^{(j)}).$$

(c) Mit $e_i := \max\{j \mid d_{ij} \neq 0\}$ gilt für das Minimalpolynom $g_\phi(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{e_i}$.

(d) Für $n \leq 6$ lässt sich die Jordansche Normalform von ϕ bereits aus $h_\phi(X), g_\phi(X)$ sowie den Dimensionen der Eigenräume $e_\phi(a_i)$ bestimmen.

59. Aufgabe: (4 Punkte)

Es seien V ein n -dimensionaler Vektorraum über einem Körper K , $\phi \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus mit Minimalpolynom $g_\phi(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{e_i}$ und $g_i(X) := g_\phi(X)(X - a_i)^{-e_i}$. Offensichtlich sind g_1, \dots, g_r teilerfremd und deshalb existieren Polynome $q_i \in K[X]$ mit $\sum_{i=1}^r q_i g_i = 1$. Man definiere nun $p_i := q_i g_i$, $\phi_d := \sum_{i=1}^r a_i p_i(\phi)$ und $\phi_n := \sum_{i=1}^r (\phi - a_i I_n) p_i(\phi)$. Beweisen Sie:

(a) Es gelten $\phi = \phi_d + \phi_n$ und $\phi_d \circ \phi_n = \phi_n \circ \phi_d$.

(b) Die Abbildung $p_i(\phi)$ ist die Projektion auf $H_\phi(a_i)$ sowie ϕ_d ist diagonalisierbar und ϕ_n ist nilpotent.

(c) Es seien ϕ, ψ vertauschbar, d.h. es gelte $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$, und diagonalisierbar bzw. nilpotent. Dann ist auch $\phi + \psi$ diagonalisierbar bzw. nilpotent.

(d) Die Zerlegung in (a) mit ϕ_d diagonalisierbar und ϕ_n nilpotent ist eindeutig.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 53 für Frage (c).

Bitte wenden

60. Aufgabe: (4 Punkte)(Alternative zu Aufgabe 59)

In dieser Aufgabe geht es um homogene Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Dazu sei V der \mathbb{C} -Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$. Wir schreiben die Funktionen aus V als Spaltenvektoren $(f_1, \dots, f_n)^{tr}$ mit $f_i \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, wobei der Ableitungsoperator D komponentenweise auf die f_i und dort jeweils auf Real- und Imaginärteil wirkt. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine vorgegebene Matrix. Gesucht ist der Unterraum

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in V \mid D \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right\} \leq V,$$

also der Lösungsraum des durch A gegebenen Systems von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(a) A habe die spezielle Form

$$A = A_0 := \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie durch Induktion nach n , daß $(f_1, \dots, f_n)^{tr} \in V$ genau dann in L liegt, falls $f_n(x) = g(x)$ mit einem Polynom $g \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad $< n$ und $f_{n-i} = D^i(f_n)$ für $1 \leq i \leq n-1$ ist. Verwenden Sie die Tatsache, daß eine Funktion f mit $f' = 0$ konstant sein muß.

(b) Nun habe A die etwas allgemeinere Form

$$A = A_a := \begin{pmatrix} a & 0 & & 0 \\ 1 & a & & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & a \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{C}$. Für $\mathbf{f} := (f_1, \dots, f_n)^{tr} \in V$ sei $\tilde{\mathbf{f}} \in V$ definiert durch

$$\tilde{\mathbf{f}}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \cdot e^{-ax} \\ \vdots \\ f_n(x) \cdot e^{-ax} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

$$\mathbf{f} \in L \iff D\tilde{\mathbf{f}} = A_0 \cdot \tilde{\mathbf{f}}.$$

Verwenden Sie dabei die Produktregel für die Ableitung. Folgern Sie, daß (für A von der oben angegebenen Form) L die Dimension n hat.

(c) Nun sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ beliebig und $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie:

$$L = \{C \cdot \mathbf{g} \mid \mathbf{g} \in V, D\mathbf{g} = (C^{-1}AC) \cdot \mathbf{g}\},$$

wobei wir \mathbf{g} für einen Spaltenvektor $(g_1, \dots, g_n) \in V$ schreiben. Insbesondere können die Spalten von C eine Basis des \mathbb{C}^n sein, bezüglich der A Jordan-Normalform annimmt.

(d) Folgern Sie aus (a)-(c), daß L die Dimension n hat. Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man eine Basis von L bestimmen kann.