

Übungen zur Linearen Algebra 1 — Blatt 11

Prof. Dr. B. H. Matzat

Wintersemester 2013/14

Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß

Abgabe: bis Do, 23.01.2014, 9.15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

51. Aufgabe: (4 Punkte) Im folgenden sind Endomorphismen $\phi_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch ihre Darstellungsmatrizen A_i bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^3 gegeben. Berechnen Sie jeweils die Eigenwerte und die Eigenräume. Welche der ϕ_i sind diagonalisierbar? Falls ϕ_i diagonalisierbar ist, geben Sie die Darstellungsmatrix von ϕ_i bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren an.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 12 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 2 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

52. Aufgabe: (4 Punkte) Auf $V = \mathbb{Q}^4$ sei ein Endomorphismus ϕ gegeben durch seine Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis S :

$$A := D_S(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie das Hauptpolynom h_ϕ und dessen Faktorisierung: $h_\phi = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$.
- Berechnen Sie zu jedem Primärfaktor $p_i^{e_i}$ den Unterraum $V_i = \text{Kern}(p_i^{e_i}(\phi))$ und geben Sie jeweils eine Basis S_i von V_i an.
- Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $D_T(\phi)$ bezüglich der Basis $T = S_1 \cup \cdots \cup S_r$.
- Berechnen Sie das Minimalpolynom g_ϕ . Vergleichen Sie g_ϕ und h_ϕ .

53. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum.

- Es seien $\phi \in \text{End}(V)$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus und U ein ϕ -invarianter Untervektorraum von V , d.h. $\phi(U) \subset U$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $\phi|_U : U \rightarrow U$, $x \mapsto \phi(x)$ diagonalisierbar ist.
- Es seien ϕ und $\psi \in \text{End}(V)$ mit $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$. Zeigen Sie, dass $E_\phi(a)$ ψ -invariant für alle $a \in \text{Spec}(\phi)$ ist.
- Es seien ϕ und $\psi \in \text{End}(V)$ diagonalisierbar mit $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$. Zeigen Sie, dass eine Basis S existiert, so dass die Darstellungsmatrizen von ϕ und ψ bezüglich S Diagonalgestalt besitzen.

54. Aufgabe: (4 Punkte) In einem Körper K seien Elemente $c_0, \dots, c_m \in K$ mit $c_m = 1$ gegeben. Ein Unterraum L des Folgenraums $V = K^{\mathbb{N}}$ wird gegeben durch

$$L = \{(x_0, x_1, \dots) \in V \mid \sum_{i=0}^m c_i \cdot x_{n+i} = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Außerdem sei ein Endomorphismus $\phi: V \rightarrow V$ gegeben durch

$$\phi((x_0, x_1, \dots)) = (y_0, y_1, \dots) \text{ mit } y_n := x_{n+1}$$

(„Verschiebungsoperator“).

- Zeigen Sie, daß L die Dimension m hat.

Bitte wenden

(b) Verifizieren Sie, daß L von ϕ in sich selbst abgebildet wird, d.h. $\phi(L) \subseteq L$. Damit ist die Einschränkung $\phi|_L$ ein Endomorphismus von L .

(c) Es sei

$$f = \sum_{i=0}^m c_i X^i \in K[X].$$

Zeigen Sie, daß L der Kern von $f(\phi)$ ist. Schließen Sie, daß f das Hauptpolynom von $\phi|_L$ ist.

(d) Nun wird vorausgesetzt, daß f in m verschiedene Linearfaktoren zerfällt:

$$f = \prod_{i=1}^m (X - a_i)$$

mit $a_1, \dots, a_m \in K$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, daß daraus die direkte Zerlegung

$$L = \langle (1, a_1, a_1^2, a_1^3, \dots) \rangle \oplus \dots \oplus \langle (1, a_m, a_m^2, \dots) \rangle$$

folgt.

55. Aufgabe: (4 Punkte) (Alternative zu Aufgabe 54) Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der reellwertigen Funktionen auf \mathbb{R} betrachte man den Endomorphismus ϕ , gegeben durch

$$\phi(f) = g \quad \text{mit} \quad g(x) = x \cdot f(x).$$

- (a) Berechnen Sie den Kern und das Bild von ϕ .
- (b) Welche Eigenwerte hat ϕ , und was sind zugehörige Eigenvektoren?
- (c) Zeigen Sie, daß ϕ nicht algebraisch ist.
- (d) Ist ϕ diagonalisierbar?

Anmerkung: In der Quantenphysik nennt man ϕ den „Ortsoperator“. Man sagt, daß ein Teilchen scharf lokalisiert ist, wenn seine Wellenfunktion ein Eigenvektor von ϕ ist. Der zugehörige Eigenwert ist dann der Ort des Teilchens.

Achtung: Man kann sich ab heute und spätestens bis Donnerstag, den 30. Januar 2014, 24 Uhr zur ersten Klausur anmelden. Bitte beachten Sie, dass auch für diejenigen eine Anmeldung zur ersten Klausur erforderlich ist, die nur an der zweiten Klausur teilnehmen möchten. Weitere Informationen finden Sie auf der Vorlesungs-homepage.