Übungen zur Linearen Algebra 1 — Blatt 10

Prof. Dr. B. H. Matzat Wintersemester 2013/14
Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß
Abgabe: bis Do, 16.01.2014, 9.15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

46. Aufgabe: (4 Punkte) Berechnen Sie in folgenden Ringen R mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $d := \mathrm{ggT}(a, b)$ der angegebenen Paare $a, b \in R$ und stellen Sie ihn als R-Linearkombination $d = ua + vb$ mit $u, v \in R$ dar.

(a) $R = \mathbb{Z}$, $a = 2759$, $b = 2047$,

(b) $R = \mathbb{Q}[X]$, $a = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$, $b = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$.

47. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien K ein Körper und $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ Elemente aus K mit $x_i + y_j \neq 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Man beweise:

$$\det \begin{pmatrix} (x_1+y_1)^{-1} & \dots & (x_1+y_n)^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ (x_n+y_1)^{-1} & \dots & (x_n+y_n)^{-1} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{V}(x_1, ..., x_n) \cdot \mathrm{V}(y_1, ..., y_n)}{\prod_{i,j}(x_i + y_j)}$$

Hinweis: Nach geschickten Spaltensubtraktionen können Sie aus den Zeilen Faktoren herausziehen, so dass in der ersten Spalte nur noch Einsen stehen.

48. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien K ein Körper und $f(X) = \sum_{i=0}^m a_i X^i$ sowie $g(X) = \sum_{i=0}^n b_i X^i \in K[X]$ Polynome über K mit $m + n \geq 1$. Man betrachte nun folgende Matrix $A \in K^{(m+n)\times(m+n)}$, deren Einträge aus Nullen und den Koeffizienten von f und g bestehen:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m & & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m & \\ & & & & a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & b_n & & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & b_n & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & b_n & \\ & & & & b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \end{matrix}$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $\det(A) = 0$.

(b) Die Menge $\{f, Xf, ..., X^{n-1}f, g, Xg, ..., X^{m-1}g\}$ ist linear abhängig.

(c) Es existieren Polynome $p, q \in K[X]$, $p, q \neq 0$, mit $\mathrm{Grad}(p) \leq n - 1$, $\mathrm{Grad}(q) \leq m - 1$ und $pf = qg$.

(d) f und g haben einen gemeinsamen nichtkonstanten Teiler $h \in K[X]$.

Wir haben gezeigt, dass $\det(A) = 0$ ist, falls f und g eine gemeinsame Nullstelle besitzen.

49. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad d mit der Eigenschaft, dass $f(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Man zeige:

$$d! \cdot f(X) \in \mathbb{Z}[X].$$

Hinweis: Schauen Sie sich die Physikerübung an.

Bitte wenden

50. Aufgabe: (4 Punkte) (Alternative zu Aufgabe 49) Manchmal sind von einer Funktion nur einzelne Punkte bekannt. Ein Beispiel hierfür sind Punkte als Resultat einer physikalischen Messung. Könnte man die Punkte durch einen Polynom verbinden, so wäre es möglich, die unbekannte Funktion an den dazwischenliegenden Stellen zu schätzen. Diese Aufgabe bezeichnet man als Interpolationsproblem. Das **Lagrange'sches Interpolationspolynom** ist eine Lösung dieser Aufgabe.
Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und

$$V = \{f \in K[X] \mid \mathrm{Grad}(f) \leq n-1\}.$$

Außerdem seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ paarweise verschiedene Elemente von K.

(a) Zeigen Sie, dass V ist ein Unterraum von $K[X]$ der Dimension n ist.

(b) Zeigen Sie weiter, dass die Abbildung

$$\phi\colon V \to K^n,\ f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n))$$

linear und injektiv ist.

(c) Schließen Sie, dass ϕ auch surjektiv, also ein Isomorphismus ist.

(d) Die Bijektivität von ϕ kann man auch so ausdrücken: Zu vorgegebenen $y_1, \ldots, y_n \in K$ gibt es genau ein Polynom f vom Grad $\leq n-1$, so dass $f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$. Dieses f läßt sich sogar explizit angeben. Rechnen Sie nach, dass

$$f = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=1,\ldots,n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

die Bedingungen $f(x_i) = y_i$ erfüllt. Man nennt f **Lagrange'sches Interpolationspolynom**.
