

## Übungen zur Linearen Algebra 1 — Blatt 9

Prof. Dr. B. H. Matzat

Wintersemester 2013/14

Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß

Abgabe: bis Do, 09.01.2014, 9.15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

---

### 41. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen in  $\mathbb{R}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a-3 & 1 & a \\ a-3 & 2a^2-1 & 6+a \\ 3-a & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix über einem Körper  $K$ :

$$B = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & 1 & x & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & x \end{pmatrix} \in K^{n \times n}, \text{ d.h. } B = (b_{i,j}) \text{ mit } b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \neq j \\ x & \text{falls } i = j \end{cases}$$

und  $x \in K$ . Für welche Werte von  $x$  ist  $B$  invertierbar?

**42. Aufgabe:** (4 Punkte) Der Weihnachtsmann muss dieses Jahr  $2n + 1$  Geschenke verteilen. Sobald er ein beliebiges Geschenk von seinem Schlitten nimmt, kann er die restlichen  $2n$  Geschenke so auf seinem Schlitten verstauen, dass sich auf der linken sowie rechten Seite  $n$  Geschenke befinden und der Schlitten im Gleichgewicht ist.

Helfen Sie dem Weihnachtsmann! Zeigen Sie, dass alle Geschenke das gleiche Gewicht haben.

*Anregung:* Verwenden Sie Aufgabe 41 (b) mit  $K = \mathbb{F}_2$ .

**43. Aufgabe:** (4 Punkte) Es sei  $M$  eine „Blockmatrix“ von der Form

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in K^{n \times n},$$

wobei  $A \in K^{r \times r}$ ,  $B \in K^{r \times (n-r)}$ ,  $C \in K^{(n-r) \times r}$  und  $D \in K^{(n-r) \times (n-r)}$  Matrizen sind und  $0 < r < n$ . Zeigen Sie:

(a) Falls  $B$  oder  $C$  eine Nullmatrix ist, so folgt  $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$ .

(b) Ist  $A$  invertierbar, so gilt  $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$ .

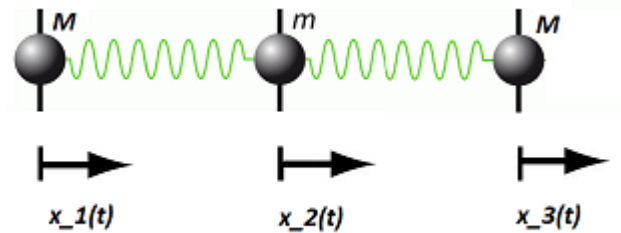
**44. Aufgabe:** (4 Punkte) Es sei  $K$  ein Körper. Weiter seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume der Dimension  $n$  bzw.  $l$  und  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$  eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $W$ . Zeigen Sie:

(a) Gilt  $\text{Rang}(\phi) = r$ , so ist  $\text{Rang}(\bigwedge^m \phi) = \binom{r}{m}$ .

(b) Ist  $\phi$  ein Isomorphismus, so ist auch  $\bigwedge^m \phi : \bigwedge^m(V) \rightarrow \bigwedge^m(W)$  ein Isomorphismus.

**Bitte wenden**

**45. Aufgabe:** (4 Punkte) (Alternative zu Aufgabe 44) Drei durch Federkräfte verbundene Kugeln mit den Massen  $M$ ,  $m$  und  $M$  schwingen in einer Geraden. Sei  $x_i(t)$  die Auslenkung aus der Ruhelage zur Zeit  $t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ).



(a) Mit Hilfe der Newtonschen Gesetze zeige man:

$$x_1'' = -\frac{k}{M}(x_1 - x_2), \quad (E_1)$$

$$x_2'' = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3), \quad (E_2)$$

$$x_3'' = -\frac{k}{M}(x_3 - x_2), \quad (E_3)$$

wobei  $k$  die Federkonstante der Federn bezeichnet.

(b) Man sucht nun die Eigenschwingung des Systems, d.h. man sucht ein  $\omega \in \mathbb{R}$ , so dass

$$y_i = A_i \sin(\omega t) + B_i \cos(\omega t) \text{ mit } i \in \{1, 2, 3\} \text{ und mit } A_i, B_i \text{ Konstanten}$$

eine von Null verschiedene Lösung des Systems  $(E_1, E_2, E_3)$  ist.

Man zeige:  $\omega$  ist genau dann eine Eigenschwingung des Systems, wenn

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{M} - \omega^2 & -\frac{k}{M} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} - \omega^2 \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist.

(c) Man zeige:  $\omega$  ist genau dann eine Eigenschwingung des Systems, wenn

$$\omega^2 \left( \frac{k}{M} - \omega^2 \right) \left( \omega^2 - \frac{2k}{m} - \frac{k}{M} \right) = 0$$

ist.

(d) Geben Sie für jede Eigenschwingung  $\omega$  eine Lösung des Systems  $(E_1, E_2, E_3)$  an.