Übungen zur Linearen Algebra 1 — Blatt 8

Prof. Dr. B. H. Matzat — Wintersemester 2013/14
Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß
Abgabe: bis Do, 19.12.2013, 9.15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

---

36. Aufgabe: (4 Punkte) Bilden Sie zu folgenden Matrizen (falls möglich) die Inverse:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 & -12 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & 7 & 3 \\ 11 & 6 & 19 & -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \text{ und}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & -3i \\ 4i & 5 & 1-i \\ 2-3i & 2i & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

37. Aufgabe: (4 Punkte) Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V seien zwei Basen $S = \{s_1, ..., s_n\}$ und $T = \{t_1, ..., t_n\}$ gegeben. $C_S^T = (c_{ij})$ sei die Basiswechselmatrix, also $t_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} s_i$. Weiter sei $S^* = \{s_1^*, ..., s_n^*\}$ die Dualbasis zu S und $T^* = \{t_1^*, ..., t_n^*\}$ diejenige zu T.

(a) Zeigen Sie, dass für die Basiswechselmatrix $C_{S^*}^{T^*}$ gilt:

$$C_{S^*}^{T^*} = ((C_S^T)^{\,tr})^{-1}.$$

(b) Sei $\phi : V \to V^*$ eine lineare Abbildung. Wir bilden die Darstellungsmatrix $D(\phi)_{S^*}^S$ bezüglich der Basen S und S^*, und ebenso $D(\phi)_{T^*}^T$ bezüglich T und T^*. Zeigen Sie, dass eine Matrix C existiert mit

$$D(\phi)_{T^*}^T = C^{tr} D(\phi)_{S^*}^S C.$$

38. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\psi : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W^*, V^*),\ \phi \mapsto \phi^*$$

eine lineare Abbildung ist.

(b) Es seien V und W endlichdimensional. Beweisen Sie, dass ψ ein Isomorphismus ist.

39. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien V ein unendlichdimensionaler Vektorraum und $\theta : V \to V^{**}$, $v \mapsto \theta_v$ die natürliche lineare Abbildung von V auf V^{**}. Weiter seien I eine Indexmenge mit $\#I = \infty$ und $S := \{s_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V. Die Elemente der Menge $S^* := \{s_i^* \mid i \in I\}$ seien definiert durch $s_i^*(s_j) = \delta_{i,j}$.

(a) Man zeige, dass θ injektiv ist.

(b) Man zeige: Die Elemente s_i^* der Menge S^* sind linear unabhängig, erzeugen aber nicht V^*.

(c) Es sei $f \in V^*$, so dass die Menge $T := S^* \cup \{f\}$ linear unabhängig ist. Man zeige, dass ein $g \in V^{**}$ existiert mit $g(u) = 1$ für alle $u \in T$.

(d) Man zeige, dass $g \notin \mathrm{Bild}(\theta)$ ist.

Wir haben gezeigt, dass der Dualitätssatz nicht für unendlichdimensionale Vektorräume gilt.

Bitte wenden

40. Aufgabe: (4 Punkte) (Alternative zu Aufgabe 39) In dieser Aufgabe soll eine Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}, \; T(0,x) = g(x) \tag{1}$$

berechnet werden.
Es sei V der Vektorraum der 2-mal differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ mit Periode 1. Hierbei bedeutet Periode 1, dass $f(x+1) = f(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter seien für $n \in \mathbb{Z}$ die Funktionen $e_n(x)$ definiert durch

$$e_n(x) = e^{2i\pi nx} \; \forall x \in \mathbb{R}$$

und die Funktionen $e_n^*(f)$ seien gegeben durch

$$e_n^*(f) = \int_0^1 f(x) e_{-n}(x) dx \quad \forall f \in V.$$

(a) Zeigen Sie: $e_n^* \in V^*$ und $e_n^*(e_k) = \delta_{n,k}$ für alle $n, k \in \mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ linear unabhängig in V ist.

(c) Zeigen Sie, dass $e_n^*(f') = 2i\pi n e_n^*(f)$ ist.
Es sei nun $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1) und es bezeichne $u_t(x) = T(t,x)$. Zeigen Sie:

$$e_n^*(u_t) = e_n^*(g)\exp(-4\pi^2 n^2 t).$$

(d) Folgende Aussage stammt von Fourier:

$$f(x) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=-k}^{k} e_n^*(f) e_n(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_n^*(f) e_n(x) \quad \forall f \in V, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Warum ist die Aussage offensichtlich für $f \in \langle e_n \mid n \in \mathbb{Z} \rangle$? Verwenden Sie dies, um eine Lösung für (1) anzugeben.