

## Übungen zur Linearen Algebra 1 — Blatt 7

Prof. Dr. B. H. Matzat

Wintersemester 2013/14

Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß

Abgabe: bis Do, 12.12.2013, 9.15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

---

**31. Aufgabe:** (4 Punkte) Bestimmen Sie den Rang  $r$  der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 5}.$$

Finden Sie Matrizen  $C \in \text{GL}_4(\mathbb{Q})$  und  $D \in \text{GL}_5(\mathbb{Q})$ , so dass das Produkt  $CAD$  von der Form

$$CAD = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

ist, wobei  $I_r$  die  $r \times r$ -Einheitsmatrix und 0 jeweils eine Nullmatrix bezeichnet.

**32. Aufgabe:** (4 Punkte) Für Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  sei das folgende lineare Gleichungssystem (über  $\mathbb{R}$ ) gegeben:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 4 \\ -b \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von  $a$  und  $b$  hat das Gleichungssystem (i) genau eine, (ii) unendlich viele und (iii) keine Lösung(en)? Was sind in den Fällen (i) und (ii) die Lösungen?

**33. Aufgabe:** (4 Punkte) Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum der Dimension  $n$ . Weiter sei  $\phi$  ein Endomorphismus von  $V$ .

- Zeigen Sie: Ist  $\phi^2 = 0$ , so ist  $\text{Bild}(\phi) \subset \text{Kern}(\phi)$ .
- Zeigen Sie: Ist  $\text{Bild}(\phi) = \text{Kern}(\phi)$ , so ist  $n$  gerade.
- Es sei  $\phi \neq 0$  und es existiere ein  $l \in \mathbb{N}$ , so dass  $\phi^l = 0$ . Man nennt  $\phi$  dann nilpotent. Es sei nun  $m \in \mathbb{N}$  das kleinste Element der Menge  $\{l \in \mathbb{N} \mid \phi^l = 0\}$ .  
Zeigen Sie, dass es ein  $v \in V$  gibt mit  $\phi^{m-1}(v) \neq 0$ . Man beweise, dass für ein solches  $v$  die Vektoren  $\{v, \phi(v), \dots, \phi^{m-1}(v)\}$  linear unabhängig sind.
- Zeigen Sie: Ist  $\phi$  nilpotent, so ist  $\phi^n = 0$ .

**34. Aufgabe:** (4 Punkte) Für die reelle  $n \times n$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  gelte

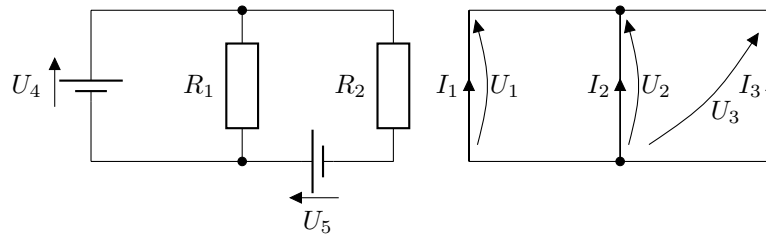
$$\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Man zeige, dass  $A$  invertierbar ist.

Hinweis: Es sei  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  ein Spaltenvektor mit  $Ax = 0$ . Zeigen Sie, dass  $x = 0$  ist. Verwenden Sie hierzu, dass eine Komponente  $x_j$  in  $x$  existiert mit  $|x_j| \geq |x_i| \forall 1 \leq i \leq n$ .

**Bitte wenden**

**35. Aufgabe:** (4 Punkte) (Alternative zu Aufgabe 34) Im folgenden Netzwerk



Es handelt sich hier um ein Netzwerk. Die Darstellung durch zwei Zeichnungen wurde aufgrund der Übersichtlichkeit vorgenommen.

seien die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  sowie die Spannungen  $U_4$  und  $U_5$  gegeben. Es sollen die verbleibenden Größen  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  und  $U_3$  bestimmt werden.

(a) Benutzen Sie die Knoten- und Maschenregel, um folgende Gleichungen herzuleiten:

$$U_1 - U_2 = 0, \quad U_2 - U_3 = 0, \quad I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad U_1 = U_4, \quad U_2 - R_1 I_2 = 0, \quad U_3 - R_2 I_3 = -U_5.$$

(b) Es seien  $A$  und  $B$  die Spaltenvektoren zu  $(U_1, U_2, U_3, I_1, I_2, I_3)$  bzw.  $(0, 0, 0, U_4, 0, -U_5)$ . Bestimmen Sie eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  mit

$$B = MA.$$

(c) Invertieren Sie  $M$  mit dem Gauß-Algorithmus. Geben Sie die Lösungen von  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  in Abhängigkeit von  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $U_4$  und  $U_5$  an.