

## Übungen zur Linearen Algebra 1 — Blatt 6

Prof. Dr. B. H. Matzat

Wintersemester 2013/14

Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß

Abgabe: bis Do, 5.12.2013, 9.15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

---

**26. Aufgabe:** (4 Punkte) Es seien  $V$  und  $W$  reelle Vektorräume der Dimension 3 mit Basen  $S := \{s_1, s_2, s_3\}$  bzw.  $T := \{t_1, t_2, t_3\}$ . Weiter sei  $\phi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, die durch

$$\begin{aligned} s_1 &\mapsto t_1 + t_2 \\ s_2 &\mapsto -t_1 + t_3 \\ s_3 &\mapsto t_2 + t_3 \end{aligned}$$

definiert ist und bezüglich obiger Basen die Darstellungsmatrix  $D_T^S(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  besitzt.

Aus dem Homomorphiesatz erhalten wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ \kappa \downarrow & & \uparrow \iota \\ V/\text{Kern}(\phi) & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \text{Bild}(\phi) \end{array}$$

- Zeigen Sie, dass  $\text{Kern}(\phi) = \langle s_1 + s_2 - s_3 \rangle$  und  $\bar{S} := \{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$  eine Basis von  $V/\text{Kern}(\phi)$  ist. Berechnen Sie  $D_{\bar{S}}^{\bar{S}}(\bar{\phi})$ .
- Es ist  $U := \{u_1, u_2\}$  mit  $u_1 = t_1 + t_2$  und  $u_2 = t_2 + t_3$  eine Basis von  $\text{Bild}(\phi)$ . Berechnen Sie  $D_U^{\bar{S}}(\bar{\phi})$  und zeigen Sie, dass  $D_U^{\bar{S}}(\bar{\phi})$  invertierbar ist.
- Man ergänze  $U$  mittels  $u_3 = t_2$  zu einer Basis  $\tilde{U} := \{u_1, u_2, u_3\}$  von  $W$ . Berechnen Sie  $D_{\tilde{U}}^U(\iota)$  sowie die Basiswechselmatrix  $C_T^{\tilde{U}}$ .
- Verifizieren Sie folgende Formel anhand Ihrer Ergebnisse:

$$D_T^S(\phi) = C_T^{\tilde{U}} \cdot D_{\tilde{U}}^U(\iota) \cdot D_U^{\bar{S}}(\bar{\phi}) \cdot D_{\bar{S}}^{\bar{S}}(\bar{\phi}) \cdot D_S^S(\kappa).$$

**27. Aufgabe:** (4 Punkte) Es seien  $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  die Einheitsmatrix.

- Beweisen Sie, dass es für  $n \in \mathbb{N}$  ganze Zahlen  $a_n$  und  $b_n$  gibt mit  $M^n = a_n M + b_n I_3$ .
- Bestimmen Sie Rekursionsformeln für  $a_n$  und  $b_n$  und zeigen Sie  $|a_n - b_n| \leq 1$ .

**28. Aufgabe:** (4 Punkte) Es sei  $K$  ein Körper. Für  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in K^{n \times n}$  ist die Spur von  $A$  definiert als

$$\text{Spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- Es seien  $A \in K^{n \times m}$  und  $B \in K^{m \times n}$ . Zeigen Sie, dass  $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$  ist.
- Es seien  $A \in K^{n \times n}$  und  $C \in \text{GL}_n(K)$ . Folgern Sie aus (a) die Gültigkeit von

$$\text{Spur}(C^{-1}AC) = \text{Spur}(A).$$

- Es sei  $P \in K^{n \times n}$  die Darstellungsmatrix einer Projektion. Zeigen Sie  $\text{Rang}(P) = \text{Spur}(P)$ .

**Bitte wenden**

**29. Aufgabe:** (4 Punkte) Es sei  $K$  ein Körper.

(a) Es seien  $U, V, W$  Untervektorräume eines  $K$ -Vektorraums  $X$ . Man beweise:

$$\dim(U) + \dim(V) + \dim(W) = \dim(U + V + W) + \dim((U + V) \cap W) + \dim(V \cap U).$$

(b) Es seien  $\phi, \psi : V \rightarrow W$  lineare Abbildungen zwischen zwei endlich dimensionalen  $K$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$ . Zeigen Sie:

$$\dim(\text{Kern}(\phi)) - \text{Rang}(\psi) \leq \dim(\text{Kern}(\phi + \psi)) \leq \dim(\text{Kern}(\phi)) + \text{Rang}(\psi).$$

**30. Aufgabe:** (4 Punkte) (Alternative zu Aufgabe 29)

Es seien zwei durch eine Membran getrennte Behälter gegeben, die mit einem Stoff gefüllt sind. Dabei befinden sich zu Beginn in beiden Behältern zusammen eine endliche Anzahl von  $0 \leq N$  Partikeln, etwa die einzelnen Moleküle des Stoffes. Im linken Behälter halten sich am Anfang  $0 \leq l_0 \leq N$  und im rechten Behälter  $0 \leq r_0 = N - l_0 \leq N$  Partikel auf.

Der Stoffaustausch zwischen den beiden Behältern kann durch ein stochastisches Modell beschrieben werden. So wird in jedem Zeitschritt  $n$  genau eines der  $N$  Teilchen mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit ausgewählt, welches den Behälter wechselt.

Die Koeffizienten der Matrix  $M = (m_{i,j})_{i,j=0,\dots,N}$  seien gegeben durch

$$m_{i,j} = \begin{cases} \frac{i}{N}, & \text{falls } j = i - 1, \\ \frac{N-i}{N}, & \text{falls } j = i + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für eine Anzahl  $0 \leq c \leq N$  an Partikeln, bezeichne  $p_{n,c} = P(l_n = c)$  die Wahrscheinlichkeit, dass sich  $c$  Partikel zum Zeitpunkt  $n$  im linken Behälter befinden. Diese Wahrscheinlichkeiten seien im Zeilenvektor  $P_n = (p_{n,0}, p_{n,1}, \dots, p_{n,N})$  zusammengefasst.

(a) Man zeige: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $P_{n+1} = P_n M$ .

(b) Es sei nun explizit  $p_{n,c} = P(l_n = c) = \binom{N}{c} \frac{1}{2^N}$  und für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  sei  $P_{n_0}$  der Zeilenvektor  $\left( \binom{N}{0} \frac{1}{2^N}, \binom{N}{1} \frac{1}{2^N}, \dots, \binom{N}{N} \frac{1}{2^N} \right)$ . Man zeige die Gültigkeit von  $P_n = P_{n_0} M$  und folgere hieraus, dass  $P_n = P_{n_0}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  ist.

(c) Es seien nun  $N = 2$  und  $P_0 = (1, 0, 0)$  der Zeilenvektor mit den Wahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt 0. Geben Sie  $P_n$  explizit für alle  $n \in \mathbb{N}$  an.