Übungen zur Linearen Algebra 1 — Blatt 5

Prof. Dr. B. H. Matzat Wintersemester 2013/14
Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß
Abgabe: bis Do, 28.11.2013, 9.15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

---

21. Aufgabe: (4 Punkte) Im $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

$$v_1 = (1, 1, -1, 2), \quad v_2 = (2, 0, 3, 1), \quad v_3 = (0, -2, 1, -1)$$

und

$$w_1 = (1, -1, 0, 1), \quad w_2 = (1, 5, -3, 4)$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, daß w_1 und w_2 im von v_1, v_2 und v_3 aufgespannten Unterraum $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ liegen.

(b) Geben Sie, falls möglich, eine Basis von U an, welche die Vektoren w_1 und w_2 enthält. Bilden auch v_1, v_2 und v_3 eine Basis?

22. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $V = \mathbb{F}_2^3$ der dreidimensionale Standardvektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$. Eine lineare Abbildung $\phi : V \to V$ ist gegeben durch

$$\phi((1, 0, 0)) = (1, 1, 1), \quad \phi((0, 1, 0)) = (0, 1, 1), \quad \phi((0, 0, 1)) = (1, 0, 0).$$

(a) Geben Sie Basen von Kern(ϕ) und Bild(ϕ) an und verifizieren Sie an diesem Beispiel die Formel
$$\dim(\mathrm{Bild}(\phi)) + \dim(\mathrm{Kern}(\phi)) = \dim(V).$$

(b) Berechnen Sie das Abbildungsprodukt $\psi := \phi^2 = \phi \circ \phi$. Welche Dimensionen haben Kern(ψ) und Bild(ψ)?

(c) Zeigen Sie, dass Bild(ψ) $<$ Kern(ϕ) und schließen Sie daraus, dass $\phi^3 = 0$.

(d) Überlegen Sie sich, wie die Ergebnisse aus Teil (b) schon aus der Tatsache folgen, daß $\{0\} \neq$ Kern(ϕ) $<$ Bild(ϕ).

23. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien V, W und X Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Die lineare Abbildung f induziert eine lineare Abbildung $h : \mathrm{Hom}(W, X) \to \mathrm{Hom}(V, X)$. Hinweis: Betrachten Sie für $g \in \mathrm{Hom}(W, X)$ das Abbildungsprodukt von g und f.

(b) Ist f surjektiv, so ist h injektiv.

(c) Ist f injektiv, so ist h surjektiv.

24. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\#\mathrm{GL}(\mathbb{F}_p^n) = (p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{n-1})$.

(b) Konstruieren Sie einen Isomorphismus von $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_2^2)$ auf S_3.

Bitte wenden

25. Aufgabe: (4 Punkte)(Alternative zu Aufgabe 24) Es seien $a,\, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$y'' + ay' + by = 0,\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$$

homogene lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Anfangswerten $y_0,\, y_1 \in \mathbb{R}$ bei $x_0 \in \mathbb{R}$. Diese Differenzialgleichung kann man als Schwingungsgleichung interpretieren. Es bezeichne $C^2(\mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2-mal stetig differenzierbaren Abbildungen. Sie dürfen folgende Sätze aus der Analysis verwenden:

- Es existiert eine Lösung $f \in C^2(\mathbb{R})$ des Problems (Existenz).
- Sind $f_1,\, f_2 \in C^2(\mathbb{R})$ Lösungen des Problems, so ist $f_1 = f_2$ (Eindeutigkeit).

(a) Man zeige, dass die Menge $L < C^2(\mathbb{R})$ der Lösungen von $y'' + ay' + by = 0$ ein zwei dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Für $a^2 - 4b > 0$ seien $f_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ und $f_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ mit

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b},\ \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Man zeige, dass $\{f_1, f_2\}$ eine Basis von L ist.

(c) Für $a^2 - 4b = 0$ seien $f_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}$ und $f_2(x) = xe^{-\frac{a}{2}x}$.
Man zeige, dass $\{f_1, f_2\}$ eine Basis von L ist.

(d) Für $a^2 - 4b < 0$ seien $f_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ und $f_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ mit

$$\alpha = -\frac{a}{2},\ \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}.$$

Man zeige, dass $\{f_1, f_2\}$ eine Basis von L ist.

(e) Geben Sie die Lösung von folgenden Differenzialgleichungen an:

- $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
- $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$,
- $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.