Übungen zur Linearen Algebra 1 — Blatt 4

Prof. Dr. B. H. Matzat — Wintersemester 2013/14
Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß
Abgabe: bis Do, 21.11.2013, 9.15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

---

16. Aufgabe: (4 Punkte) Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ seien Unterräume U_1 und U_2 gegeben durch

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle (1,0,1), (0,1,-1) \rangle = \{a \cdot (1,0,1) + b \cdot (0,1,-1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \\ U_2 &= \langle (1,0,-1), (0,1,1) \rangle = \{a \cdot (1,0,-1) + b \cdot (0,1,1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$. Können Sie sich die verschiedenen Unterräume geometrisch veranschaulichen?

17. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien X, Y und Z Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie:

(a) $X \cap (Y + Z) > (X \cap Y) + (X \cap Z)$,

(b) $X + (Y \cap Z) < (X + Y) \cap (X + Z)$,

(c) $X \cap (Y + (X \cap Z)) = (X \cap Y) + (X \cap Z)$.

Finden Sie für (a) und (b) jeweils ein Beispiel, bei welchem die Inklusion eine echte Inklusion ist.

18. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei V ein Vektorraum und $U < V$ ein Unterraum. Dazu existiert nach der Vorlesung ein Komplement, also ein Unterraum $X < V$ mit $V = U \oplus X$. Außerdem wurde eine lineare Abbildung (kanonische Abbildung)

$$\kappa : V \to V/U, \ v \mapsto \bar{v}$$

in den Faktorraum eingeführt.

(a) Zeigen Sie, daß die Einschränkung

$$\kappa|_X : X \to V/U$$

ein Isomorphismus ist.

(b) Es sei W ein weiterer Vektorraum über demselben Körper wie V und $\phi : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes, daß es dann eine lineare Abbildung $\psi : W \to V$ gibt mit

$$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W.$$

19. Aufgabe: (4 Punkte) Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ seien Unterräume G und U gegeben durch

$$\begin{aligned} G &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = f(-x)\}, \\ U &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = -f(-x)\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $V = G \oplus U$.
Hinweis: Für $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ betrachte man die Funktionen

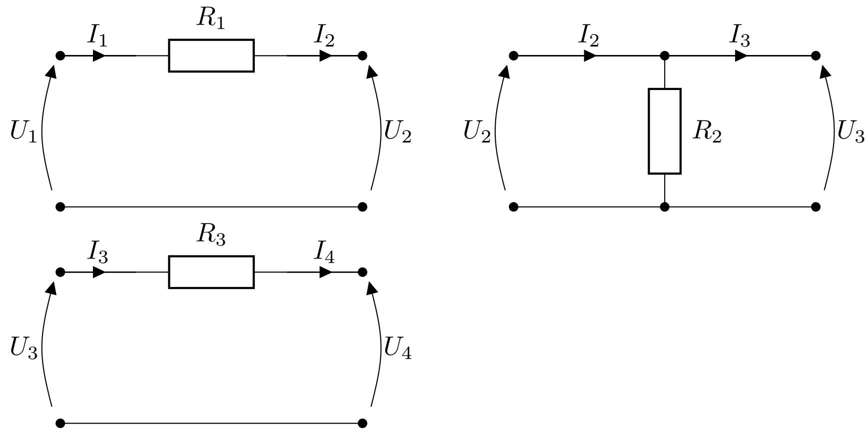
$$f_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ und } f_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

(b) Es sei $\pi : V \to G$ die Projektion längs U. Was ist $\pi(f)$ für die folgenden Abbildungen?

$$x \mapsto x - 1; \quad x \mapsto x^2 + 2x^3; \quad x \mapsto e^x; \quad x \mapsto e^x + e^{-2x}.$$

Bitte wenden

20. Aufgabe: (4 Punkte)(Alternative zu Aufgabe 19) Gegeben seien die folgenden Netzwerke:



(a) Man zeige, dass es lineare Abbildungen $T_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ gibt mit

$$T_i : (U_i, I_i) \mapsto (U_{i+1}, I_{i+1}).$$

(b) Welches Netzwerk entspricht der linearen Abbildung $T_3 \circ T_2 \circ T_1$?

Hier noch eine kleine Übersicht von den in der Mathematik verwendeten griechischen Buchstaben.

Name	**groß**	**klein**
Alpha	A	α
Beta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ϵ
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Theta	Θ	θ
Iota	I	ι
Kappa	K	κ
Lambda	Λ	λ
My	M	μ

Name	**groß**	**klein**
Ny	N	ν
Xi	Ξ	ξ
Omikron	O	o
Pi	Π	π, ϖ
Rho	P	ρ, ϱ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Ypsilon	Υ	υ
Phi	Φ	ϕ, φ
Chi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω