Übungen zur Linearen Algebra 1 — Blatt 3

Prof. Dr. B. H. Matzat Wintersemester 2013/14
Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß
Abgabe: bis Do, 14.11.2013, 9.15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

---

11. Aufgabe: (4 Punkte) Auf den kartesischen Produkten $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ wird auf folgende Weise eine Addition und Multiplikation erklärt:

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d), \\ (a,b) \cdot (c,d) &:= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Mit diesen Verknüpfungen wird $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ein Integritätsbereich.

(b) Außerdem wird $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ein Körper.

Bemerkung: Man bezeichnet $(0,1)$ mit i und schreibt $a + bi$ für (a,b). $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ wird auch mit $\mathbb{Z}[i]$ bezeichnet und heißt Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +, \cdot) =: \mathbb{Q}[i]$ heißt Körper der Gaußschen Zahlen.

12. Aufgabe: (4 Punkte) In dieser Aufgabe rechnen wir in dem endlichen Körper $\mathbb{F}_{17}$. Zu $z \in \mathbb{Z}$ bedeutet $\bar{z}$ die Restklasse von z modulo 17.

(a) Was ist das Inverse von $\bar{2}$? Gesucht ist also $x \in \mathbb{Z}$ mit $\bar{x} \cdot \bar{2} = \bar{1}$. Wie kann man x (außer durch Ausprobieren) systematisch finden?

(b) Kann man in $\mathbb{F}_{17}$ aus $\overline{-1}$ eine Wurzel ziehen, d.h. gibt es $x \in \mathbb{Z}$ mit $\bar{x}^2 = \overline{-1}$?

(c) Wie oft muß man $\bar{3}$ mit sich selbst multiplizieren, bis man das Ergebnis $\bar{1}$ erhält? Gesucht ist also das kleinste $n \in \mathbb{N}^*$ mit $\bar{3}^n = \bar{1}$.

(d) Schließen Sie aus dem Ergebnis von (c): Für jedes $\bar{z} \in \mathbb{F}_{17}$ gilt $\bar{z}^{17} = \bar{z}$.

13. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) Gegeben sei die folgende lineare Rekursion:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass es zu jedem Paar $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine Folge $f_{a,b} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ mit $f_{a,b}(0) = a$ und $f_{a,b}(1) = b$ gibt, welche die obige lineare Rekursion erfüllt. Eine solche Folge heißt Lösung der linearen Rekursion. Beweisen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{Z}$ zudem gilt:

$$x\, f_{a,b} + y\, f_{c,d} = f_{xa+yc, xb+yd}.$$

(b) Es bezeichne $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ die Lösung $f_{0,1}$ in (a). Zeigen Sie, dass man zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(f(n+1), f(n))$ mit dem Euklidischen Algorithmus genau $n-1$ Divisionen mit Rest benötigt.

(c) Folgern Sie mit (b), dass für die Berechnung von $\mathrm{ggT}(a,b)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $0 < b \leq f(n)$ höchstens $n-1$ Divisionen mit Rest benötigt werden.

(d) Zeigen Sie durch vollständige Induktion die Gültigkeit von

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(A^n - B^n) \text{ mit } A = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ B = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

und schließen Sie daraus, dass $f(n)$ die zu $\frac{1}{\sqrt{5}}A^n$ nächstgelegene ganze Zahl ist.

Bitte wenden

14. Aufgabe: (4 Punkte) Geben Sie zu folgenden Teilmengen des Vektorraums $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ der reellen Funktionen bzw. $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ der reellen Folgen an, ob sie Untervektorräume sind, und begründen Sie dies:

(a) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$,

$\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$,

(b) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ ist $f(n) = 0\}$,

$\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ ist $f(n) \neq 0\}$,

(c) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}\}$,

$\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid f(n+2) = 2f(n) + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}\}$,

(d) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid$ die Abbildung $g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) - f(x-1)$ liegt in $U\}$, wobei $U \leq \mathbb{R}^\mathbb{R}$ ein vorgegebener Unterraum ist.

15. Aufgabe: (4 Punkte)(Alternative zu Aufgabe 14)
Man betrachte die Untermenge der zweimal differenzierbaren reellen Funktionen, welche Lösungen folgender Differenzialgleichungen sind. Welche davon sind Vektorräume?

(a) $x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = 0$ (Oszillatorschaltung)

(b) $x'' + 2\lambda\left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right)x' + \omega^2 x = 0$ (Van-der-Pol-Oszillator)

(c) $m\,l\,\theta'' = -m\,g\sin\theta$ (Mathematisches Pendel)

(d) $m\,l\,\theta'' = -m\,g\,\theta$ (Pendel mit kleiner Amplitude)

(Sie dürfen annehmen, dass jeweils mindestens eine von Null verschiedene Lösung existiert.)
Die in den Differenzialgleichungen verwendeten Variablen und Parameter haben folgende Bedeutung:

1. ω = Periode
2. x_0 = Amplitude
3. λ = Reibungskoeffizient
4. m = Masse
5. l = Länge
6. g = Schwerkraft
7. θ = Winkel.