

Übungen zur Linearen Algebra 1 — Blatt 2

Prof. Dr. B. H. Matzat

Wintersemester 2013/14

Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß

Abgabe: bis Do, 07.11.2013, 9.15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

6. Aufgabe: (4 Punkte) Für $m \in \mathbb{Z}$ definiere man $m\mathbb{Z}$ als die Menge aller ganzzahligen Vielfachen von m .

(a) Man zeige, dass $m\mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist.

(b) Man definiere auf der Menge $M := \{m\mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ eine Relation $R \subset M \times M$ durch

$$(m_1\mathbb{Z}, m_2\mathbb{Z}) \in R : \iff m_1\mathbb{Z} < m_2\mathbb{Z}.$$

Man zeige, dass R eine Ordnung auf M definiert.

(c) Man zeige, dass die Ordnung R keine Totalordnung ist.

7. Aufgabe: (4 Punkte) In der Vorlesung haben Sie den Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ als Quotientenmenge konstruiert. Zeigen Sie nun, dass auf \mathbb{Z} durch die Relation

$$\overline{(m, r)} \leq \overline{(n, s)} : \iff m + s \leq n + r$$

eine Totalordnung definiert wird und beweisen Sie, dass diese für $\overline{(m, r)} \leq \overline{(n, s)}$ folgende zusätzliche Eigenschaften erfüllt:

(a) $\forall \overline{(l, q)} \in \mathbb{Z} : \overline{(l, q)} + \overline{(m, r)} \leq \overline{(l, q)} + \overline{(n, s)}$.

(b) $\forall \overline{(0, 0)} \leq \overline{(l, q)} \in \mathbb{Z} : \overline{(l, q)} \cdot \overline{(m, r)} \leq \overline{(l, q)} \cdot \overline{(n, s)}$.

8. Aufgabe: (4 Punkte) Man zeige:

(a) Ist $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist f gegeben durch

$$f = a \operatorname{id}_{\mathbb{Z}} \text{ mit } f(1) = a.$$

(b) Ist $f : (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist f gegeben durch

$$f = a \operatorname{id}_{\mathbb{Q}} \text{ mit } f(1) = a.$$

(c) Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, d.h. ihre einzigen Teiler sind 1 und p . Zeigen Sie, dass

$$p \mid \binom{p}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq k \leq p-1.$$

(Hier ist der Binomialkoeffizient definiert als: $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$ mit $n, k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$.)

(d) Zeigen Sie, dass $f : x \mapsto x^p$ ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{F}_p, +)$ ist.

(Sie dürfen folgende Formel verwenden: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.)

9. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Sind f und $g \in S_n$ Permutationen und hat f die Darstellung

$$f = (a_{1,1}, a_{1,2} \dots)(a_{2,1}, a_{2,2}, \dots) \dots (a_{m,1}, a_{m,2}, \dots)$$

als Produkt von elementfremden Zyklen, so hat $gf g^{-1}$ die Darstellung

$$gf g^{-1} = (g(a_{1,1}), g(a_{1,2}) \dots)(g(a_{2,1}), g(a_{2,2}), \dots) \dots (g(a_{m,1}), g(a_{m,2}), \dots).$$

Bitte wenden

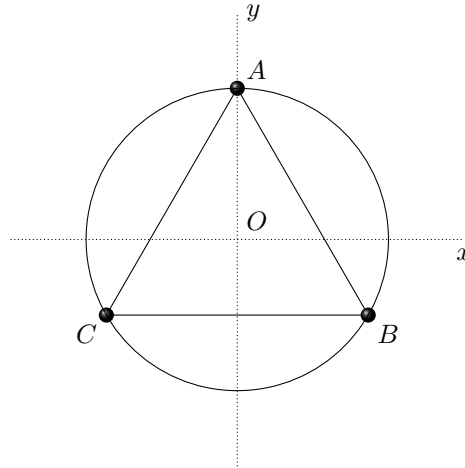
(b) Die symmetrische Gruppe S_n wird von den beiden Elementen

$$f = (1, 2) \quad \text{und} \quad g = (1, 2, \dots, n)$$

erzeugt, d.h. jedes Element p aus S_n kann man als Produkt diverser f und g schreiben ($p = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ mit $x_i \in \{f, g\}$ und $n \in \mathbb{N}$ variabel).

10. Aufgabe: (4 Punkte)(Alternative zu Aufgabe 9)

Man betrachte die identischen Atome A , B und C in der xy -Ebene. Hierbei seien die Atome so ausgerichtet, dass ihre Verbindungslinien ein gleichseitiges Dreieck bilden, dessen Schwerpunkt im



Ursprung O der xy -Ebene liegt.

- Welche Drehungen und Spiegelungen in der xy -Ebene bilden die Atome auf sich ab?
- Zeigen Sie, dass diese Drehungen und Spiegelungen eine Gruppe D bilden.
- Zeigen Sie, dass es einen bijektiven Gruppenhomomorphismus $f : D \rightarrow S_3$ gibt. Welche Permutationen der S_3 beschreiben die Drehungen und welche die Spiegelungen?
- Zeigen Sie, dass D von einer Drehung r und einer Spiegelung s erzeugt wird. Hierbei kann man r und s so wählen, dass

$$f(r) = (1, 2, 3) \quad \text{und} \quad f(s) = (2, 3).$$