

Übungen zur Linearen Algebra 1 — Blatt 1

Prof. Dr. B. H. Matzat

Wintersemester 2013/14

Dr. V. Nicolas und Dr. M. Seiß

Abgabe: bis Do, 31.10.2013, 9.15 Uhr, in den Briefkästen im Foyer des Math. Instituts (INF 288)

1. Aufgabe: (4 Punkte) Man beweise für Mengen M und N :

- (a) $f \in \text{Abb}(M, N)$ ist genau dann injektiv, wenn es ein $g \in \text{Abb}(N, M)$ mit $g \circ f = \text{id}_M$ gibt.
- (b) $f \in \text{Abb}(M, N)$ ist genau dann surjektiv, wenn es ein $g \in \text{Abb}(N, M)$ mit $f \circ g = \text{id}_N$ gibt.
- (c) Verifizieren Sie folgende Aussage aus der Vorlesung: Die Menge $\text{Bij}(M, M)$ aller bijektiven Selbstabbildungen von M ist eine Gruppe.
- (d) Sind $\text{Abb}(M, M)$, $\text{Inj}(M, M)$ und $\text{Surj}(M, M)$ auch Gruppen? Was ist mit $\text{Bij}(M, N)$?

(Es bezeichnet $\text{Inj}(M, M)$ und $\text{Surj}(M, M)$ die Menge aller injektiven und surjektiven Abbildungen von M .)

2. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei S_4 die symmetrische Gruppe zum Index 4. Die alternierende Gruppe A_4 zum Index 4 ist definiert durch

$$A_4 := \{\pi \in S_4 \mid \text{sign}(\pi) = 1\}.$$

- (a) Bestimmen Sie alle Elemente der A_4 und geben Sie diese als Produkt von Zyklen an.
- (b) Bestimmen Sie alle Untergruppen der A_4 .
- (c) Welche der Untergruppen sind isomorph?

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei M eine Menge. Auf ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ definiere man eine Relation $R \subset \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$ durch

$$(M_1, M_2) \in R : \iff \exists \text{ eine bijektive Abbildung } f : M_1 \rightarrow M_2.$$

- (a) Man zeige, dass R eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(M)$ definiert.
- (b) Es sei nun $M := \{a, b, c, d\}$. Geben Sie alle Äquivalenzklassen an.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei M eine Menge. Für $N \subseteq M$ sei die Abbildung $\chi_N : M \rightarrow \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\chi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in N \\ 0 & \text{wenn } x \notin N \end{cases}$$

- (a) Es seien $N_1, N_2 \subseteq M$. Man zeige, dass $\chi_{N_1} = \chi_{N_2} \iff N_1 = N_2$.
- (b) Für $N_1, N_2 \subseteq M$ definiere man den Operator Δ durch

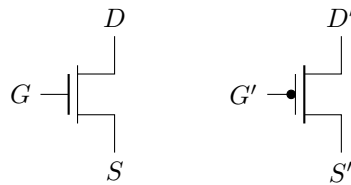
$$N_1 \Delta N_2 := (N_1 \setminus N_2) \cup (N_2 \setminus N_1).$$

Man zeige, dass $\chi_{N_1 \Delta N_2} = \chi_{N_1} + \chi_{N_2} - 2\chi_{N_1} \chi_{N_2}$.

- (c) Es seien $N_1, N_2, N_3 \subseteq M$. Man zeige, dass $(N_1 \Delta N_2) \Delta N_3 = N_1 \Delta (N_2 \Delta N_3)$.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\chi_{(N_1 \Delta N_2) \Delta N_3} = \chi_{N_1 \Delta (N_2 \Delta N_3)}$.)
- (d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(M)$ mit der Verknüpfung Δ zu einer Gruppe $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ wird.

Bitte wenden

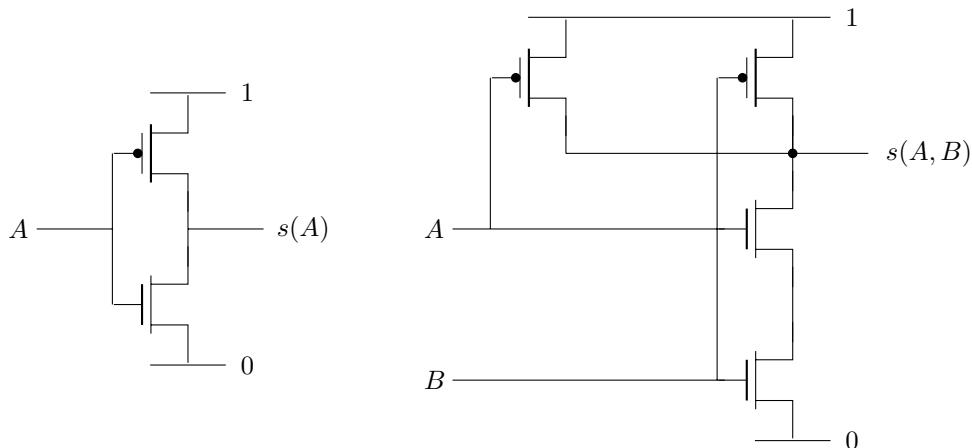
5. Aufgabe: (4 Punkte) (Alternative zu Aufgabe 4)
 Das Verhalten der beiden idealen Transistoren G und G'



sei gegeben durch:

- (a) Wenn an G' eine Spannung anliegt (bzw. wenn an G keine Spannung anliegt), so ist der Stromfluss von D' nach S' (bzw. von D nach S) unterbrochen.
- (b) Wenn an G' keine Spannung anliegt (bzw. wenn an G eine Spannung anliegt), so ist der Stromfluss von D' nach S' (bzw. von D nach S) nicht unterbrochen.

Es seien nun folgende Schaltkreise gegeben:



(Sich kreuzende Linien sind nur miteinander verbunden, wenn sie mit einem Punkt markiert sind.)

- (a) Erstellen Sie die Wahrheitstafeln für $s(A)$ und $s(A, B)$. Welche logischen Operatoren erkennen Sie?
- (b) Geben Sie einen Schaltkreis an, der die logische Operation NOR darstellt.

Nur zur Erinnerung (A und B Aussagen):

- (a) XOR: $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$.
- (b) NAND: $\neg(A \wedge B)$.
- (c) NOR: $\neg(A \vee B)$.