Übungen zur Linearen Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat
Dr. Dörte Beigel
Philipp Siehr

Blatt 11
Abgabetermin: Freitag, 23.01.2015, 11 Uhr

Aufgabe 11.1 (**Spuroperator II** - *4 Punkte*)
Auf Blatt 10 haben wir bereits einige Eigenschaften des Spuroperators gezeigt. Wir betrachten nun den Spezialfall $K = \mathbb{R}$. Sei folgende Abbildung definiert:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} &\to \mathbb{R}, \\ (A, B) &\mapsto \langle A, B \rangle = \operatorname{spur}(A^\top B). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Bemerkung: Dieses Skalarprodukt nennt man *Frobenius*-Skalarprodukt.

Aufgabe 11.2 (**Skalarprodukt und Norm** - *2 Punkte*)
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt mit zugehöriger Norm $| \cdot |$.

a) Zeigen Sie die Parallelogramm-Identität:

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

b) Sei $x \perp y$. Zeigen Sie den Satz des Pythagoras:

$$|x|^2 + |y|^2 = |x - y|^2.$$

Bitte wenden

Aufgabe 11.3 (**Normen** - *3 Punkte*)

a) Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Ausdrücken um Normen im $\mathbb{R}^n$ handelt:

$$|x|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|,$$
$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

b) Zeichnen Sie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} S_1^2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x|_1 = 1\}, \\ S_2^2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x|_2 = 1\}, \qquad |x|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2, \\ S_\infty^2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x|_\infty = 1\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11.4 (**Orthonormalbasis** - *4 Punkte*)
Betrachten Sie folgendes Skalarprodukt im Raum $\mathbb{P}_n$:

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

a) Zeigen Sie, dass dies tatsächlich ein Skalarprodukt ist.

b) Sei $V = \langle 1, t, t^2 \rangle = \mathbb{P}_2$.
Bilden Sie eine Orthonormalbasis bezüglich diesem Skalarprodukt.

Hinweis: Zum Abschluss des Semesters verbindet diese Aufgabe die Grundvorlesungen Lineare Algebra und Analysis. Verwenden Sie bei der Lösung die Erkenntnisse der Analysis.
Insbesondere gilt für ungerade, stetige Funktionen: $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe 11.5 (**Orthogonales Komplement** - *3* Punkte*)
Sei $V = \mathbb{R}^5$ und $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ mit

$$\begin{aligned} w_1 &= (-1, 0, -1, 0, 1)^\top \\ w_2 &= (-1, 0, -5, 0, 1)^\top \\ w_3 &= (0, 4, 5, 0, 1)^\top \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Basis des zu W orthogonalen Unterraumes $U = W^\perp$.
Hinweis: Dies ist ein Zusatzaufgabe. Es gibt eine alternative Lösung, die ohne Basisergänzung und Schmidt-Verfahren auskommt.