Übungen zur Linearen Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat
Dr. Dörte Beigel
Philipp Siehr

Blatt 10
Abgabetermin: Freitag, 16.01.2015, 11 Uhr

Auf diesem Zettel befinden sich zunächst reguläre Aufgaben, die am 16.01.2015 abgegeben werden. Anschließend finden Sie einige Zusatzaufgaben zur Vertiefung und Klausurvorbereitung. Diese Aufgaben werden nicht von den Tutoren korrigiert. Die Lösungen dieser Aufgaben stehen ab Januar auf der Übungsseite. Schreiben Sie Ihren Tutoren rechtzeitig Emails, sofern Sie Schwierigkeiten mit den Lösungen haben.
Die letzten beiden Aufgaben werden in den Plenarübungen im Januar besprochen.

Aufgabe 10.1 (**Eigenwert und Eigenvektor** - *4 Punkte*)
Ein Eigenpaar (v, λ) zum Endomorphismus φ besteht aus einem Eigenwert λ und einem Eigenvektor $v \neq 0$, so dass gilt

$$\varphi(v) = \lambda v,$$

dass also die Anwendung des Endomorphismus auf diesen Vektor einer einfachen Skalarmultiplikation entspricht.
Sei nun $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus des K-Vektorraums V mit $\dim V = n$. Ferner gebe es n Eigenpaare $(v_i \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$, so dass die Eigenvektoren v_i linear unabhängig sind. Zeigen Sie: es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Matrix $A_{\varphi,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die Gestalt

$$A_{\varphi,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

hat.
Definition: Solche Endomorphismen heißen diagonalisierbar und werden im zweiten Semester eine wichtige Rolle spielen. Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen diagonalisierbar, wenn der zugehörige Endomorphismus $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ diagonalisierbar ist.

Bitte wenden

Aufgabe 10.2 (**Lineare Gleichungssysteme** - *4 Punkte*)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie folgendes Gleichungssystem der Form $Ax = b$ über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 4 \\ -b \end{pmatrix}$$

Beantworten Sie folgende Fragen:

- Für welche Werte von a und b besitzt dieses Gleichungssystem keine, eine oder unendlich viele Lösungen?
- Wie lautet jeweils die Lösungsmenge ?
- Wann ist A invertierbar und was ist dann A^{-1}?

Aufgabe 10.3 (**Basiswechsel** - *4 Punkte*)
Sei $V = \{p \in \mathbb{R}[t] : \deg(p) \leqslant 2\}$ der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad $\leqslant 2$. Seien mit $X = (1, t, t^2)$ und $Y = (t^2+1, t^2, t^2+t+1)$ zwei Basen gegeben. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ eine lineare Abbildung mit der folgenden Darstellungsmatrix (bzgl. X) definiert:

$$A_{f,X,X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $A_{f,Y,X}$, $A_{f,X,Y}$ und $A_{f,Y,Y}$.

Aufgabe 10.4 (**Dualraum** - *4 Punkte*)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$ Linearformen auf V. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

i) $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ sind linear abhängig in V^*.

ii) Es gibt ein $v \in V \setminus \{0\}$, so dass $\varphi_1(v) = \ldots = \varphi_n(v) = 0$.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung: $\psi : V \to K^n, \quad v \mapsto (\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v))^\top$.

Frohe Feiertage wünscht euer LA1-Team!

Zusatzaufgaben
Bitte geben Sie diese Aufgaben nicht ab.

Aufgabe 10.5 (**Spuroperator I**)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist der Spuroperator wiefolgt definiert:

$$\operatorname{spur} : K^{n\times n} \to K, \qquad A \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Mit der üblichen Notation für Matrizen $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.
Zeigen Sie:

a) Die spur ist eine lineare Abbildung.

b) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times m}$ gilt: $\operatorname{spur}(AB) = \operatorname{spur}(BA)$.

c) Sind $A \in K^{n\times n}$ und $B \in K^{n\times n}$ ähnlich, so gilt $\operatorname{spur}(A) = \operatorname{spur}(B)$.

d) Aus $\operatorname{char}(K) = 0$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in K^{n\times n}$, dass $AB - BA \neq E_n$. Wobei E_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix ist.

e) Finden Sie ein Gegenbeispiel für diese Aussage, wenn $\operatorname{char}(K) > 0$.

f) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Bemerkung: In einem Ring oder Körper ist die Charakteristik die kleinste natürliche Zahl $n > 0$, sodass

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = 0.$$

Ist dies für kein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, dann wird die Charakteristik auf 0 gesetzt.
Beispiele: $\operatorname{char}(\mathbb{F}_p) = p$ und $\operatorname{char}(\mathbb{R}) = 0$.

Aufgabe 10.6 (**Basiswechsel**)
Betrachte $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit den Basen:

$$\mathcal{A} = \{(1, -1, 2)^\top, (2, 3, 7)^\top, (2, 3, 6)^\top\},$$
$$\mathcal{B} = \{(1, 2, 2)^\top, (-1, 3, 3)^\top, (-2, 7, 6)^\top\}.$$

a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $A_{\mathrm{id},\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2 \cdot (1, -1, 2)^\top + 9 \cdot (2, 3, 7)^\top - 8 \cdot (2, 3, 6)^\top$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 10.7 (**Lineare Abbildungen**)
Im folgenden seien die Räume $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit der Standardbasis $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1,\ldots,n}$. Bestimmen Sie die Matrizen $A_{f,\mathcal{E},\mathcal{E}}$ für folgende Endomorphismen:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: Rotation um 90 Grad in mathematisch negativer Richtung.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: Spiegelung an der Achse $x = 0$.

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: Rotation um 180 Grad um die Achse, die von $(0, 0, 1)$ erzeugt wird.

Aufgabe 10.8 (**Vektorraum der Folgen**)
Betrachte den reellen Vektorraum reeller Folgen und die Menge:

$$F = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}.$$

a) Zeigen Sie, dass F ein Untervektorraum des Folgenraumes ist. Bestimmen Sie eine Basis.

b) Finden Sie eine weitere Basis mit Elementen der Form $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Erklären Sie, wie man mit b) direkt das n-te Folgenglied bestimmen kann? Geben Sie diese Formel für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ explizit an.

Bemerkung: Der Folgenraum ist ein unendlich dimensionaler Vektorraum. F ist ein endlich dimensionaler Unterraum.

Aufgabe 10.9 (**Interpolation**)
Finden Sie ein Polynom $p(x)$ vom Grad 4 (also $p \in \mathbb{P}_4$), dass die folgenden Werte annimmt:

$x =$	-2	-1	0	1	2
$p(x) =$	-27	-3	1	3	-3

Aufgabe 10.10 (**Dimensionsformel**)
Sei V ein K-Vektorraum und $U, W \subset V$ Untervektorräume. Die Dimensionsformel für Untervektorräume lautet:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W). \tag{10.1}$$

Sei $K = \mathbb{R}$,$V = \mathbb{R}^4$ und

$$U = \langle (1, 0, 1, 2)^\top, (0, 1, 1, 1)^\top \rangle,$$
$$W = \langle (1, 1, 4, 0)^\top, (2, -3, -1, 1)^\top, (3, 1, 0, 0)^\top \rangle.$$

Bestimmen Sie Basen von $U + W$ und $U \cap W$ und verifizieren Sie anhand dieser die Dimensionsformel.
Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung der Basen den *Zassenhaus-Algorithmus* (siehe nächste Seite). Die Rechnung verläuft mit ganzen Zahlen.

Zassenhaus-Algorithmus zur Bestimmung einer Basis von $U+W$ und $U\cap W$.
Seien U, W Untervektorräume von V und $\dim(V)=n$. Sei $(u_1,\dots,u_k)$ eine Basis von U und $(w_1,\dots,w_l)$ eine Basis von V.

1. Schreibe die Basisvektoren als Zeilenvektoren in die Matrix $\mathbf{Z}\in K^{(k+l)\times 2n}$.

$$\mathbf{Z}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} & u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{k,1} & \cdots & u_{k,n} & u_{k,1} & \cdots & u_{k,n} \\ \hline w_{1,1} & \cdots & w_{1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{l,1} & \cdots & w_{l,n} & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

2. Bringe die Matrix $\mathbf{Z}$ auf Zeilenstufenform:

$$\mathbf{Z}'=\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & * \\ \hline 0 & \mathbf{B} \end{array}\right)$$

3. Die Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$ bilden eine Basis von $U+W$. Die Zeilenvektoren von $\mathbf{B}$ bilden eine Basis von $U\cap W$.

Aufgabe 10.11 (Kurzfragen)

a) Sei $A \Rightarrow B$ und $\neg C \Rightarrow \neg B$. Welche Aussagen sind richtig?

a) $B \Rightarrow A$	b) $\neg B \Rightarrow \neg A$	c) $\neg A \Rightarrow \neg B$	d) $\neg B \Rightarrow A$
e) $A \Rightarrow \neg C$	f) $\neg C \Rightarrow A$	g) $\neg C \Rightarrow \neg A$	h) $(A \wedge B) \Rightarrow C$

b) Was bedeutet injektiv, surjektiv und bijektiv für eine Abbildung $f : X \to Y$. Wann gilt für f: injektiv $\Leftrightarrow$ surjektiv $\Leftrightarrow$ bijektiv?

c) Beweisen oder widerlegen Sie: Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $[a, b]$ injektiv, genau dann wenn sie dort streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist.

d) n Vektoren sind linear abhängig, wenn

- ○ einer ein Vielfaches eines anderen ist.
- ○ einer der Vektoren der Nullvektor ist.
- ○ die Summe der Vektoren den Nullvektor ergibt.

e) Sind u, v, w beliebige Vektoren, so sind die Vektoren $u - v, v - w$ und $w - u$

- ○ linear unabhängig.
- ○ linear abhängig.
- ○ nichts von alledem.

f) Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Ausdrücke sind wohl definiert?

- ○ AB
- ○ BA
- ○ $A + B$
- ○ CD
- ○ DC
- ○ C^2
- ○ D^2
- ○ $BA + C$

g) Der Kern einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ ist

- $\varphi^{-1}(\{0\})$
- $\varphi(\{0\})$
- $\varphi(V)$
- $\{v \in V | \varphi(v) = 0\}$

h) Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Welche der folgenden Ungleichungen sind richtig?

- $\dim(\mathrm{im}\varphi) \leq \dim V$
- $\dim(\mathrm{im}\varphi) \leq \dim W$
- $\dim(\ker \varphi) \leq \dim V$
- $\dim(\ker \varphi) \leq \dim W$

i) Welcher Ausdruck ist wahr?

- Die Vereinigung zweier Untervektorräume ist ein Untervektorraum.
- Die Summe zweier Untervektorräume ist ein Untervektorraum.
- Der Schnitt zweier Untervektorräume ist ein Untervektorraum.

j) Für den Rang einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ gilt

- $\mathrm{rg}(\varphi) \leq \dim(W)$
- $\mathrm{rg}(\varphi) \leq \dim(V)$
- $\mathrm{rg}(\varphi) \leq \dim(\ker\varphi)$
- $\mathrm{rg}(\varphi) \leq \dim(\mathrm{im}\varphi)$

k) Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Mit den in der Vorlesung eingeführten Verknüpfungen ist $\mathrm{End}(V)$

- ein Vektorraum,
- ein Körper,
- ein Ring,
- eine Gruppe.

Geben Sie jeweils die Verküpfung an.

Aufgabe 10.12
Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Zu jeder natürlichen Zahl n existiert eine Gruppe mit n Elementen.

b) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_4)$ eine linear abhängige Familie in V. Dann gibt es $a_2, a_3, a_4 \in K$ mit $v_1 = a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4$.

c) Seien (v_1, v_2, v_3) im K-Vektorraum V paarweise linear unabhängig. Dann gilt (v_1, v_2, v_3) sind linear unabhängig.

d) Jede injektive Abbildung ist surjektiv.

e) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann ist die Darstellungsmatrix der Identität bzgl. Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ stets die Einheitsmatrix.

f) Es gibt unendlich viele $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = 2$.

g) Sei V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ bijektiv und besitze den Eigenwert $c \in K$. Dann ist $c \neq 0$ und φ^{-1} besitzt den Eigenwert c^{-1}.
(Hinweis: Eigenvektoren sind immer ungleich 0.)