Übungen zur Linearen Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat
Dr. Dörte Beigel
Philipp Siehr

Blatt 8
Abgabetermin: Freitag, 12.12.2014, 11 Uhr

Aufgabe 8.1 (**Lineare Abbildungen** - *4 Punkte*)
Seien die folgenden Abbildungen gegeben:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \quad & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \\ & x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \varphi_2 : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ & x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(v_1)$, $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(v_2)$ und $(\varphi_2 \circ \varphi_1)(v_3)$ für:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = 0 \in \mathbb{R}^4.$$

b) Untersuchen Sie in welchen Fällen $\varphi_i \circ \varphi_j$ für $i, j \in \{1, 2\}$ eine wohldefinierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.

c) Untersuchen Sie die linearen Abbildungen aus b) auf Surjektivität.

Aufgabe 8.2 (**Projektoren** - *4 Punkte*)
Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
Eine Abbildung mit dieser Eigenschaft heißt *Projektor*.

a) Ist φ ein Projektor so gilt:

$$V = \ker(\varphi) \oplus \operatorname{im}(\varphi).$$

b) Sind U, W endlich dimensionale Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$, dann gibt es genau einen Projektor $\varphi : V \to V$ mit

$$U = \ker(\varphi) \quad \text{und} \quad W = \operatorname{im}(\varphi).$$

Hinweis: In Aufgabenteil a) ist V nicht notwendigerweise endlich dimensional.

Bitte wenden

Aufgabe 8.3 (**Lineare Abbildung** - *2 Punkte*)
Sei $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\; z \mapsto \overline{z}$. Zeigen Sie:

a) Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, so ist φ eine lineare Abbildung.

b) Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum, so ist φ keine lineare Abbildung.

Aufgabe 8.4 (**Quotientenraum I** - *4 Punkte*)
Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ mit $v \sim w \Leftrightarrow v - w \in U$ eine Äquivalenzrelation auf V ist.

Sei nun $[v]$ die Äquivalenzklasse von v und die Menge aller Äquivalenzklassen mit $V/U = \{[v] : v \in V\}$ bezeichnet.

b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von v, indem Sie folgende Eigenschaft beweisen: $[v] = v + U := \{v + u : u \in U\}$.

c) Zeichnen Sie für $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $U = \langle(2,3)\rangle$ die Äquivalenzklasse von $(-2,-2)$ und $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Und beschreiben Sie in wenigen Worten, wie sich aus U und v die Äquivalenzklasse ergibt.

Aufgabe 8.5 (**Quotientenraum II - Zusatzaufgabe** - *4* Punkte*)
Sei $K, V, U, \sim, V/U$ wie in Aufgabe 8.4 definiert. Zeigen Sie:

a) Die Addition

$$+ :\; V/U \times V/U \to V/U, \qquad [v] + [w] = [v + w],$$

und skalare Multiplikation

$$\cdot :\; K \times V/U \to V/U, \qquad \lambda \cdot [v] = [\lambda v],$$

sind wohldefiniert.

b) V/U bildet mit der Addition und skalaren Multiplikation aus a) einen K-Vektorraum.

Man nennt V/U *Quotientenraum* von V nach U.

Hinweis: Das Literaturstudium ist ein wesentlicher Teil Ihrer Ausbildung. Sofern Sie die Aufgaben zum Themengebiet Quotientenraum nicht eigenständig lösen, sondern das Kapitel in „Lineare Algebra“ von Bosch nachlesen, sollten Sie alle Zwischenschritte ausarbeiten und verstanden haben.