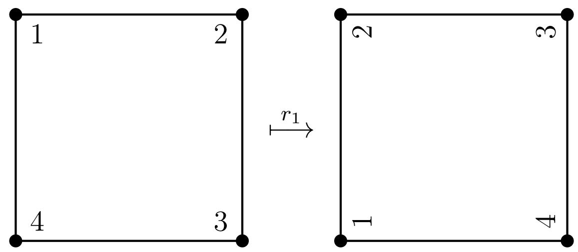
Übungen zur Linearen Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat
Dr. Dörte Beigel
Philipp Siehr

Blatt 3
Abgabetermin: Freitag, 07.11.2014, 11 Uhr

Aufgabe 3.1 (**Symmetriegruppe des Quadrats** - *6 Punkte*)
In dieser Aufgabe betrachten wir die Symmetriegruppe für ein Quadrat. Die Symmetriegruppe beschreibt alle Drehungen und Spiegelungen, die ein Quadrat in ein solches überführt. Diese Transformationen werden durch Permutationen der Eckpunkte festgelegt.



(a) Quadrat (b) Drehung um 90°

a) Bestimmen Sie alle acht Permutationen.
Beispiel: Die Drehung um 90° um den Mittelpunkt, im mathematisch positiven Umlaufsinn, ist gegeben durch

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass diese Permutationen mit der Verknüpfung $\circ$ eine Untergruppe der S_4 ist. Diese wird mit D_4 bezeichnet.

c) Handelt es sich dabei um eine abelsche Gruppe?

d) Geben Sie eine weitere Untergruppe D' der S_4 an, die eine echte Untergruppe von D_4 ist und mehr als ein Element besitzt.

Bitte wenden

Aufgabe 3.2 (**Gruppen** - *5 Punkte*)
Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathrm{Bij}(M) = \{f : M \to M, f \text{ bijektiv}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Bij}(M)$ bezüglich der Komposition

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Bij}(M) \times \mathrm{Bij}(M) &\to \mathrm{Bij}(M) \\ (f, g) &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

eine Gruppe bildet. Dabei ist $f \circ g : M \to M,\ x \mapsto (f \circ g)(x) := f(g(x))$.

Aufgabe 3.3 (**Die Gruppe** $\mathbb{Z}_m$ - *6 Punkte*)
Auf der Menge $\mathbb{Z}_m = \{0, \ldots, m-1\}$ sei die Verknüpfung $\oplus$ definiert durch die Vorschrift

$$x \oplus y = \mathrm{mod}_m(x + y),$$

wobei „+" die gewöhnliche Addition ganzer Zahlen bedeutet.

a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\oplus$ eine innere Verknüpfung von M ist, also

$$\oplus : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m.$$

b) Zeigen Sie, dass für beliebiges $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\mathrm{mod}_m(x + \mathrm{mod}_m(y)) = \mathrm{mod}_m(x + y).$$

c) Verifizieren Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}_m$ mit der Verknüpfung $\oplus$ eine abelsche Gruppe ist.