Mengen: Abbildung injektiv: Urbild zu jedem $y \in Y$ höchstens 1 Element: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Abbildung surjektiv: Bild von X unter f ist die Menge Y: $f(X)=Y$
Endliche Mengen: $f: M \to N$ $m>n \to f$ nicht injektiv, $n>m \to f$ nicht surjektiv
~~f~~ surjektiv $\to f^{-1}(y)$ nicht leer, f injektiv $\to f^{-1}(y)$ genau ein Element
Komposition: $g \circ f(x) = g(f(x)) = h(x)$, f injektiv falls Abb injektiv, g surjektiv falls s.

Gruppen: $\boxed{a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c,\ a \circ e = e \circ a = a,\ b \circ a = e}$ Gruppenaxiome
Eindeutigkeit: $e = e' \circ e = e'$ | $b' = e \circ b' = (b \circ a) \circ b' = b \circ (a \circ b') = b \circ e = b$

Untergruppe: $\boxed{f, g \in H \to f \circ g \in H,\ e \in H, e \text{ neutrales Element von } G, \forall f \in H \text{ ist auch Inverse in } H}$

Gruppenhomo: $\boxed{\varphi(a \circledast b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)}$ Achtung: Rechenoperatoren!!
$\operatorname{Kern} \varphi = \varphi^{-1}(\{e\})$, $\ker \varphi$ ist Untergruppe: $\varphi(a \circledast b) = \varphi(a) \circ \varphi(b) = e_H \circ e_H = e_H$

Körper: $\boxed{(K,+) \text{ abelsche Gruppe},\ (K \setminus \{0\}, \cdot) \text{ abelsche Gruppe, Distributivgesetz}}$

VR: $\boxed{(V,+) \text{ abelsche Gruppe},\ 1 \cdot v = v,\ (\alpha \cdot \lambda) \cdot v = \alpha \cdot (\lambda \cdot v),\ \alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v,\ (\alpha + \lambda) \cdot v = \alpha \cdot v + \lambda \cdot v}$

UVR: $\boxed{U \neq \emptyset: \text{einfach } 0 \in U,\ u, v \in U \Rightarrow u + v \in U,\ u \in U \text{ und } \alpha \in K \Rightarrow \alpha \cdot u \in U}$
Schnitt von UVRen ist wieder UVR, Vereinigung nicht.

EZB: Vektoren, die VR erzeugen, müssen nicht l.u sein, können auch zusätzliche Vektoren beinhalten

Lineare Unabhängigkeit: → schau bei Lineare Abbildungen
$\boxed{\sum \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0}$, Matrix → Zeilenstufenform, lassen sich nicht als Vielfache voneinander schreiben. Sei $[v_1 \dots v_n]$ l.u dann auch jede Teilmenge darin

Basis: $\boxed{v_i \text{ ist EZB und } v_i \text{ sind l.u}}$ (in $\mathbb{R}^3$ 3 Vektoren l.u, da dim=3)
Falls EZB gegeben → entferne l.a Vektoren bis nur noch l.u Vektoren
In endlich erzeugten VR haben die Basen dieselbe Länge / Dimension
Basisergänzung: $v_1 \dots v_n$ l.u und $w_1 \dots w_n$ EZB, dann kann man l.u Vektoren von $w_1 \dots w_n$ und sie zu $v_1 \dots v_n$ dazufügen, so dass $v_1 \dots v_n$ Basis

Dimensionsformeln: $U \subset V$: $\dim U \leq \dim V$, $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$ $\quad \dim(V/U) + \dim U = \dim V$
$U, W \subset V$: $\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap V)$
falls: $U + V = U \oplus V$: $\dim U + \dim W = \dim(U+W)$
falls: f Lineare Abbildung: $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$

Direkte Summe: $\boxed{U \cap V = \{0\} \text{ und } U + V = W}$ $U \oplus V = W$

Lineare Abbildung: $f: V \to W$ l.A falls: $\boxed{f(u) + f(v) = f(u+v) \wedge \alpha \cdot f(u) = f(\alpha u)}$
→ $\underline{\ker f} = \{v \in V \mid f(x) = 0\} \wedge \underline{\operatorname{im} f} = \{w \in W \mid \exists v \in V\ f(x) = w\}$ UVR von V
f injektiv $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$; [sind $v_1 \dots v_n$ linear abhängig so sind auch $f(v_1) \dots f(v_n)$ linear abhängig, sind $f(v_1) \dots f(v_n)$ linear unabhängig, so auch $v_1 \dots v_n$, andere Umkehrungen gelten falls f injektiv].
! Immer Linearität ausnutzen: $f(v) = f(\sum \alpha_i v_i) = \sum f(\alpha_i v_i) = \sum \alpha_i f(v_i)$!

Äquivalenzrelation / Klasse: $\boxed{a \sim a,\ a \sim b \Rightarrow b \sim a,\ a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c}$ Äquivalenzrelation
Äquivalenzklasse: $[a] = \{b \in M \mid a \sim b\}$ Quotientenklasse: $\varphi: M \to M/\sim$ $a \mapsto [a]$

Ring: [R abelsche Gruppe mit +, Multiplikation assoziativ, beide Operatoren distributiv]

Lösbarkeit von Gleichungssystemen: → Lösungsraum: $M_{A,b} = \{x \in K^n \mid Ax = b\}$
[genau eine Lösung: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid b) = n$
unendlich viele Lösungen: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid b) < n$
keine Lösung: $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(A \mid b)$]

Rang: → alle Zeilen ungleich der Nullzeile
Spaltenrang: Dimension des EZB der Spaltenvektoren, analoges gilt für Zeilenrang

Invertierbare Matrix: $\boxed{\text{Matrix invertierbar} \Leftrightarrow Ax=b \text{ hat genau eine Lösung} \Leftrightarrow \text{Vektoren linear unabhängig} \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A|b)=n}$ Gauß Jordan Verfahren

Bsp: $A\left(\begin{matrix}2&0\\3&4\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{matrix}\right)$ inverse Matrix

Einheitsgruppe: $GL(n,K)$

$AB=BA=E$ (Einheitsmatrix

Basiswechsel: Darstellungsmatrix: Identische Matrix, Darstellungsmatrix bestimmen, so gehts:

$A_{id,x,y}$: Schreibe x Vektoren als Linearkombi von y Vektoren, also:

$x_1 = a \cdot y_1 + b \cdot y_2 + c\, y_3$ 0 = neuer Vektor, was auch geht.

als Matrix schreiben und dann in Einheitsmatrix überführen

$\boxed{A_{f,x,x} = (A_{id,x,y})^{-1} \cdot A_{f,y,y} \cdot A_{id,x,y}}$

Dualraum: Der VR $Hom(V,K)$ ist der Raum der Linearform = Dualraum V^* von V

duale Basis bestimmen: Basis von V invertieren, Zeilen der invertierten Matrix sind Vektoren der dualen Basis $\dim V = \dim V^*$

Transponierte Matrix: $B=A^T$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$ $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ $\left(\sum a_{jk} \cdot b_{ki} = \sum b_{ki} \cdot a_{jk} = \sum b'_{ik} a'_{kj}\right)$

Bilinearform: $\boxed{\Phi(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha \cdot \Phi(x_1,y) + \Phi(x_2,y) \text{ und umgekehrt}}$

nicht entartet: $(\forall y \in V: \Phi(x,y)=0)\ x=0$ // $y=0$ $\rightarrow$ genau wenn A invertierbar

positiv semidefinit: $\Phi(x,x) \geq 0$ positiv definit: $\Phi(x,x) > 0$

Skalarprodukt: symmetrisch positiv definite Bilinearform

Schwarzsche Ungleichung: $\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle$

Norm: $|\cdot| : V \to \mathbb{R}$ $x \mapsto |x|$ mit den Eigenschaften:

$\boxed{|\alpha v| = |\alpha||v|,\ |u+v| \leq |u|+|v|,\ |v| \geq 0 \wedge |v|=0 \Rightarrow v=0}$

Skalarprodukt und Norm: $|v| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$

orthogonal / orthonormal: orthogonal: $\langle u,v\rangle = 0$ orthonormal: $\langle u,v\rangle=0$ und $\langle u,u\rangle = 1$

falls $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Skalarprodukt so ist jedes Orthogonalsystem M l. u.

Gram Schmidt: $\boxed{\begin{array}{l}\text{ges: Basis } (v_1,v_2) \text{ ONB bestimmen: } (w_1,w_2) \\ w_1 = v_1 \cdot \frac{1}{|v_1|} \quad \tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1 \quad w_2 = \tilde{w}_2 \cdot \frac{1}{|\tilde{w}_2|}\end{array}}$ $\sqrt{x^2+x_2^2}$

orthogonales Komplement: zu $U \subset V$: $\boxed{U^\perp = \{v \in V \mid \langle v,w\rangle = 0\ \forall w \in U\}}$ einfach gegebenes einsetzen und umformen sodass es geht $V = W \oplus W^\perp$ $(W^\perp)^\perp = W$

Ist die Bilinearform Φ symmetrisch, so gilt: $A = A^T$

Adjungierte Matrix A^*: A konjugieren: (alle Einträge einer komplexen Matrix konjugieren:

$z = a + b \cdot i \Rightarrow$ konjugiert $\bar{z} = a - b \cdot i$) und danach transponieren

$A^* = \bar{A}^T$

Basiswechsel: $[A_{\Phi,y} = A^T_{y,x} \cdot A_{\Phi,x} \cdot A_{y,x}]$ $S^T \cdot A_{\langle\cdot,\cdot\rangle,x}\ S = E$ S^T inverse zu S

adjungierte + selbstadjungierte Abbildung:

adjungierte Abbildung φ^*: $\boxed{\Phi(\varphi(x),y) = \Phi(x, \varphi^*(y))}$,

X ONB: $A_{\varphi^*,x,x} = A^T_{\varphi,x,x}$ $\to$ Endomorphismus

selbstadjungierte Abbildung: $\varphi^* = \varphi$ / $A^* = A$ $\boxed{\Phi(\varphi(x),y) = \Phi(x,\varphi(y))}$

Isometrien: $\varphi^* = \varphi^{-1}$ / $A^* = A^{-1}$ Isometrien bilden Untergruppe der Automorphismen

$\hookrightarrow$ bilden Untergruppe $O(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$ orthogonale Gruppe

1) $\forall x \in V$: $\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ 2. φ Isomorphismus mit φ^* ist φ^{-1}

3. $|\varphi(x)| = |x|$ / φ ist isometrie $\Leftrightarrow A^*_{\varphi,x,x} = A^{-1}_{\varphi,x,x}$

Spektralsatz: Ist $A \in \mathbb{C}$ hermitesch positiv definit, dann $\exists$ ONB von Eigenvektoren und alle Eigenwerte λ_i von A sind reell und positiv

Eigenvektoren / Eigenwerte: $Ax = \alpha \cdot x$ x = Eigenvektor, α = Eigenwert