ANALYSIS II

Prof. Dr. BANAGL

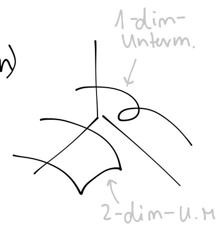
SS 2015

15/04/15

Themen

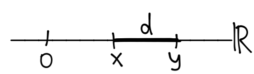
1. Metrische u. topologische Räume, Kompaktheit u. Stetigkeit
2. Funktionen mehrerer Veränderlicher, deren Ableitungen, Extrema
3. Implizit def. Fkten, Diffeomorphismen (=glatte Abbildungen)
4. Transformationsregel für Integrale im $\mathbb{R}^n$ (+ Determinanten)
5. Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$, Integration über Untermfkten (insb. Wegintegrale, Potentiale, Flächenintegrale)
6. Die klassischen Sätze von Green, Gauß u. Stokes.
7. Gewöhnliche Differenzialgleichungen (mit nur 1 Variablen)

   Bsp: $y' = y$ Lsg: $y = e^x$



METRISCHE UND TOPOLOGISCHE RÄUME

Motivation: $X = \mathbb{R}$ $x, y \in \mathbb{R}$.
- $d(x,y) := |x-y| \rightsquigarrow d: X \times X \to \mathbb{R}$
- $d(x,x) = 0$
- $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \le |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$



sehr allgemein, keine üblichen Regeln für + / − ...

Abstrakt: <u>Def:</u> Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X,d), wobei X eine Menge ist und $\underbrace{d: X \times X \to \mathbb{R}}_{\text{Metrik}}$, sd gilt: $\forall x,y,z \in X$
1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$
3. Δ-UG: $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

<u>Bem:</u> Diese Axiome implizieren $d \ge 0$.

<u>Bew:</u> $0 = d(x,x) \le d(x,y) + d(y,x) = 2\, d(x,y) \Rightarrow 2d(x,y)$ immer größer Null

<u>Def:</u> Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine **Norm** auf V ist eine Abb. $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$, sd $\forall x,y \in V$, $\lambda \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$:
1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt **normierter VR**.

Dann ist (V,d) ein metrischer Raum mit $d(x,y) = \|x-y\|$.

Somit ist jeder normierte VR kanonisch ein metrischer Raum.

Bsp: • $X = V = \mathbb{R}^n$, $\underbrace{(\mathbb{R}^n, \langle .,. \rangle)}_{\text{euklid. inneres Produkt}}$. $\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $\quad \underbrace{\langle x,x \rangle}_{\geq 0} = \sum x_i^2$

$\|x\| := \sqrt{\langle x,x \rangle}$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

$\|x+y\| = \left(\sum (x_i+y_i)^2\right)^{1/2} \underset{\text{Minkowski (AnaI)}}{\leq} \left(\sum x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum y_i^2\right)^{1/2} = \|x\| + \|y\| \Rightarrow \mathbb{R}^n$ ist kanon. ein metr. R.

$d(x,y) = \left(\sum (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$

All diese Überlegungen lassen sich übertragen auf bel. Euklid. VR $(V, \langle .,. \rangle)$. $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$.

- Sei X eine Menge. $\mathcal{B}(X) := \{ f: X \to \mathbb{R} \mid f$ beschränkt$\}$. (ist ein $\mathbb{R}$-VR)

  $f \in \mathcal{B}(X)$: $\|f\|_\infty := \sup\{ |f(x)| \mid x \in X \} < \infty$

  $\|.\|$ ist eine Norm auf $\mathcal{B}(X)$ "Supremumsnorm". Insb. ist $\mathcal{B}(X)$ ein metr. Raum.

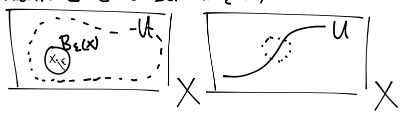
UMGEBUNGEN UND OFFENE MENGEN

Sei (X,d) ein metr. R, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $x \in X$.

Def: **Offene Kugel** $B_r(x) = \{ y \in X \mid d(y,x) < r \}$ $\quad B$ = engl "ball"

Def: Eine Teilmenge $U \subset X$ ist eine **Umgebung von $x \in U$** wenn $\exists\, \varepsilon > 0$ sd $B_\varepsilon(x) \subset U$.

$U \subset X$ ist **offen in X**, wenn $\forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U$



Bsp: • $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ist o in $\mathbb{R}$

- $(a,b]$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$
- $(a,b) \times (c,d)$ ist offen in $\mathbb{R}$
- $B_r(x)$ sind selbst offen: $y \in B_r(x) \Rightarrow d(x,y) < r$. $\varepsilon := r - d(x,y) > 0$

  Beh: $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$. $\quad$ Bew: $z \in$; $d(z,y) < \varepsilon$. $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon + d(y,x) = r$.

Prop: Sei (X,d) ein metr. Raum. Dann gilt:

1. $\emptyset, X$ sind offen in X
2. U, V offen in $X \Rightarrow U \cap V$ offen in X
3. $\{U_i\}_{i \in I}$ bel. Familie von offenen Mengen. Dann ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen in X.

Bew: 1. $\emptyset$: Nichts zu prüfen. ✓ enthält ja keinen Punkt $\quad X$: zB $B_1(x)$.

2. U, V offen. $x \in U \cap V$. U offen $\Rightarrow \exists \varepsilon_u > 0 : B_{\varepsilon_u}(x) \subset U$.

   V offen $\Rightarrow \exists \varepsilon_v > 0 : B_{\varepsilon_v}(x) \subset V$. $\quad \Big\}\ B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_u}(x) \cap B_{\varepsilon_v}(x) \subset U \cap V$.

   $\varepsilon := \min(\varepsilon_u, \varepsilon_v) > 0$

3. $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in I : x \in U_{i_0}$. U_{i_0} offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$

HAUSDORFF: <u>Def</u>: Sei X eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilmengen von X. $\mathcal{T}$ heißt **Topologie** auf X, wenn gilt:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$
3. $\{U_i\}_{i \in I}, U_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

$(X, \mathcal{T})$ heißt **Topologischer Raum**. Eine Menge X hat viele Topologien!

17/04/15 Die Elemente von $\mathcal{T}$ nennen wir die **offenen Mengen**.

<u>Def</u>: Eine Teilmenge $A \subset X$ ist **abgeschlossen**, wenn $X - A$ in X offen ist.

<u>Bsp</u> 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. $\mathcal{T}_d := \{\text{metrisch offenen Mengen}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ ist top. Raum.

"metrische Topologie"

(<u>Bem</u>: NICHT jeder top. Raum ist metrisierbar!)

2. Sei X eine bel. Menge. $\mathcal{T} := P(X)$ Potenzmenge $\Rightarrow (X, P(X) = \mathcal{T})$ ist top. Raum

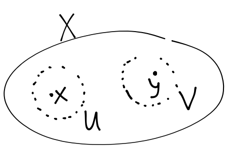
$\mathcal{T}$ heißt **"diskrete Topologie"**. In dieser Top. sind zB alle Punkte $\{x\}, x \in X$ offen (und gleichzeitig auch abgeschlossen!)

3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$: $(a,b) \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}$ $\quad [a,b] \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbb{R}$ $\quad (a,b] \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

4 Fälle: Menge kann offen, abg., beides oder keins sein!

<u>Def</u>: $(X, \mathcal{T})$ heißt **Hausdorffraum**, wenn $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U, V \subset X$ offen in X, $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

"Trennungsaxiom" es gibt versch. Trennungsaxiome, aber das hier ist das wichtigste



[$\mathcal{T} := \emptyset$ und X = minimal $\rightarrow$ Hausdorffaxiom nicht erfüllt da 2 versch. Pkte immer in X liegen $\Rightarrow$ kann man nicht trennen]

<u>Prop</u>: **Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffraum.** 2 disjunkte Kugeln mit sehr kleinem Radius

<u>Bew</u>: $x, y \in X$, $x \neq y$. $\varepsilon := \frac{1}{2} d(x,y) > 0$, $U := B_\varepsilon(x)$, $V := B_\varepsilon(y)$. $\Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$, U, V offen

UNTERRÄUME: 1. (X, d) ein metr. Raum, $Y \subset X$ Teilmenge. $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$, $d_Y(y, y') := d_Y(y', y)$ $\quad y, y' \in Y$

$\Rightarrow (Y, d_Y)$ ist ein metr. Raum, d_Y nennen wir **induzierte Metrik**.

2. $(X, \mathcal{T})$ top. Raum, $Y \subset X$ Teilmenge. $\mathcal{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \underset{\text{offen}}{\subset} X \}$.

$\Rightarrow \mathcal{T}_Y$ ist eine Topologie auf Y. **"induzierte T."** $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ist ein top. Raum.

<u>Warnung</u>: $V \subset Y \subset X$. "V offen" muss präzisiert werden! Worin offen?

<u>Bsp</u>: $Y = (a,b] \subset X = \mathbb{R}$. $V = (c, b]$, $a < c < b$ $\Rightarrow V$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$, aber in Y schon, denn

$(c, b] = (c, b+1) \cap (a, b]$. Notation: $V \underset{\text{offen}}{\subset} Y$.

Def: X top. Raum, $Y \subset X$ Teilmenge.

- $\mathring{Y} := \bigcup \{U \subset Y \mid U \text{ offen } X\}$ $\Rightarrow$ $\mathring{Y}$ ist offen in X. $\mathring{Y} \subset Y$. $\mathring{Y}$ ist die größte offene Menge, die in Y enthalten ist. $\mathring{Y}$ heißt **Inneres** von Y.
- $\bar{Y} := \bigcap \{A \supset Y \mid A \overset{\subset}{\text{abg.}} X\}$. $\Rightarrow$ $\bar{Y}$ ist abgeschlossen in X, $\bar{Y} \supset Y$. $\bar{Y}$ ist die kleinste abg. Menge, die Y enthält. $\bar{Y}$ heißt **abgeschlossene Hülle** von Y.

Def: Sei $Y \subset X$ eine Teilmenge. Y heißt **dicht** in X, wenn $\bar{Y} = X$.

Bsp: 1. $(a,b) \subset \mathbb{R}$. $\overline{(a,b)} = [a,b]$. $\mathring{[a,b]} = (a,b)$.

2. $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ liegt also dicht in $\mathbb{R}$.

KONVERGENZ IN METRISCHEN RÄUMEN

Sei (X,d) ein metr. Raum

Def: Eine Folge $(x_n) \subset X$ **konvergiert gegen $a \in X$**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, a) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Mit anderen Worten: $x_n \longrightarrow a \iff d(x_n, a) \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$

Bsp: * $X = \mathbb{R}^n$. $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$, $x_k \longrightarrow a \in \mathbb{R}^n$. $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$ Koord. $a = (a_1, \dots, a_n)$.

$j = 1 \dots n$: $\quad |x_{kj} - a_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} (x_{kj} - a_j)^2$, also $|x_{kj} - a_j| \leq \| x_k - a \|$.

$\Rightarrow$: $x_k \to a \iff \forall j$: $x_{kj} \longrightarrow a_j \quad (k \to \infty)$.

Koordinatenweise betrachten!

Bem: Der Grenzwert a ist <u>eindeutig</u> durch (x_n) bestimmt.

SATZ: Sei (X,d) ein metr. Raum, $A \subset X$ Teilmenge. $A \overset{\subset}{\text{abg.}} X \iff \forall (x_n) \subset A$ mit $x_n \longrightarrow x \in X$ gilt: $x \in A$.

Bew: $\Rightarrow$) Sei A abg., $(x_n) \subset A$, $x_n \longrightarrow x \in X$. zz: $x \in A$. Widerspruchsbeweis: Ang. $x \in X \setminus A$. $X \setminus A \overset{\subset}{\text{offen}} X$.

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$. Widerspr. zu $x_n \longrightarrow x \quad x_n \in A$.

$\Leftarrow$) zz: $X \setminus A$ offen. Sei $x \in X \setminus A$. Widerspruchsbeweis: Ang., $\nexists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$.

$\Rightarrow \forall k = 1,2,3 \dots$: $B_{\frac{1}{k}}(x) \cap A \neq \emptyset$. $\exists x_k \in B_{1/k}(x) \cap A$. $\Rightarrow x_k \longrightarrow x$. $(x_k) \subset A$.

Vorraussetzung $\Rightarrow x \in A$. Widerspr! ∎

CAUCHYFOLGEN UND VOLLSTÄNDIGKEIT

Def: Sei (X,d) ein metr. Raum, $(x_k) \subset X$ eine Folge. (x_k) heißt **Cauchyfolge**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$: $d(x_k, x_l) < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N$.

Sei (x_k) konvergent, $x_k \longrightarrow x$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N : d(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N$. $d(x_k, x_l) \leq d(x_k, x) + d(x, x_l)$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \forall k, l \geq N$

$\Rightarrow (x_k)$ ist eine Cauchyfolge. **konv. Folge $\Rightarrow$ Cauchyfolge.**

in $\mathbb{R}^n$ konv. jede Cauchyfolge.

Ana I: Für $X=\mathbb{R}$ gilt auch die Umkehrung. $\rightsquigarrow$ **Frage:** Gilt die Umkehrung auch in allg. metr. Räumen?

Bsp: $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ mit der induzierten Metrik. $X=(\mathbb{Q},d_{\mathbb{Q}})$. Wähle $(x_k)\subset\mathbb{Q}$ so, dass $x_k \xrightarrow{\text{in } \mathbb{R}} \sqrt{2}$

$\Rightarrow (x_k)$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergiert $\Rightarrow$ **Antwort:** i. A. Nein.

Def: Ein metr. Raum (X,d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Bsp: $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.

$\mathbb{R}^n$ ist vollständig $\forall n$. * $\Leftarrow$ siehe Bsp

DURCHMESSER

(X,d) $A\subset X$ muss nicht abg. sein!

$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(a,a') \mid a,a'\in A\} \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

A beschränkt $\Rightarrow \operatorname{diam}(A)<\infty$ (d.h $\in\mathbb{R}$)

SATZ: * (**Schachtelungsprinzip**) Sei (X,d) ein vollst. metr. Raum, $A_i\subset X$, $A_i\neq\emptyset$, A_i abg. in X $\forall i$,

$A_0\supset A_1\supset A_2\supset A_3\supset\ldots$ absteigende Ketten

Wenn $\operatorname{diam}(A_i)\longrightarrow 0$ für $i\to\infty$, dann $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i=\{a\}$ $a\in X$.

Durchmesser geht $\longrightarrow 0$ $\Rightarrow$ Durchschnitt d. Mengen enthält genau 1 Punkt.

22/04/15

Def: Ein vollständiger, normierter VR heißt **Banachraum**.

Bsp: Der Euklid VR $(\mathbb{R}^n,\|.\|)$ ist ein Banachraum.

* **Bew:** 1. Zunächst: $\bigcap A_i\neq\emptyset$. Wähle $a_i\in A_i$ $\forall i=0,1,2\ldots$ Wenn $k,l\geq N$, dann $d(\underbrace{a_k,a_l}_{\in A_N})\leq\operatorname{diam}(A_N)\longrightarrow 0$ $(N\to\infty)$

$\Rightarrow (a_k)$ ist eine Cauchyfolge. Da X vollst. ist, konv. diese Cauchyfolge,

$a_k\longrightarrow a\in X$. $(a_k)_{k\geq 0}\subset A_0$ & A_0 abgeschlossen $\Rightarrow a\in A_0$.

$(a_k)_{k\geq 1}\subset A_1$ & A_1 abg. $\Rightarrow a\in A_1$

⋮ etc ⋮ etc.

$\Big\}\Rightarrow a\in A_i$ $\forall i$ $\Rightarrow a\in\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i$

2. Eindeutigkeit: Wenn $a,a'\in\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i$, dann $d(a,a')\leq\underbrace{\operatorname{diam}(A_i)}_{\longrightarrow 0\ \forall i}\Rightarrow d(a,a')=0\Rightarrow a=a'$. ∎

STETIGKEIT

Aus Ana 1 wissen wir: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ stetig $\Leftrightarrow$ $\forall U\underset{\text{offen}}{\subseteq}\mathbb{R}$ gilt: $f^{-1}(U)\underset{\text{offen}}{\subseteq}\mathbb{R}$

Def: Seien X,Y top. Räume und $f:X\longrightarrow Y$ eine Abb: f ist stetig $\Leftrightarrow$ $\forall U$ offen Y ist $f^{-1}(U)$ offen X.

Stetigkeit in einem Punkt $x\in X$ kann wie folgt definiert werden:

Def: $f:X\longrightarrow Y$, $x\in X$. Wir sagen: f ist stetig in x (x fest), wenn $\forall$ Umgebungen $V\subset Y$ von $f(x)$ $\exists$ Umgebung $U\subset X$ von x mit $f(U)\subset V$. (f stetig $\Leftrightarrow$ f stetig in x $\forall x\in X$.)

Es gilt: f stetig $\Leftrightarrow$ $\forall A\underset{\text{abg.}}{\subseteq}Y$ ist $f^{-1}(A)\underset{\text{abg.}}{\subseteq}X$.

Spezialfall: metr. Räume:

SATZ: Seien X, Y metr. Räume, $f: X \to Y$ eine Abb. Dann gilt: f stetig $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subset X : x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.

Bew: „$\Rightarrow$" Sei f stetig, $x_n \to x$, $\varepsilon > 0$. $V := B_\varepsilon(f(x))$. f stetig in $x \Rightarrow \exists$ Umg. $U \subset X$ von x mit $f(U) \subset B_\varepsilon(f(x))$.

$x_n \to x \Rightarrow \exists N: x_n \in U,\ n \geq N. \Rightarrow f(x_n) \in f(U) \subset B_\varepsilon(f(x)). \Rightarrow d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow$ gezeigt dass $f(x_n)$ konv. geg $f(x)$.

„$\Leftarrow$" zz: f ist stetig. Sei $A \underset{\text{abg.}}{\subset} Y$. zz: $\overbrace{f^{-1}(A)}^{\text{Urbild von } A}$ abgeschlossen in X. Sei $(x_n) \subset f^{-1}(A)$ eine Folge mit $x_n \to x$.

zz: $x \in f^{-1}(A)$, d.h. $f(x) \in A$.: $f(x_n) \in A$ das wissen wir Voraus. $\Rightarrow f(x_n) \to f(x)$. Folge liegt ganz in A und sie konv $\Rightarrow$ x muss auch in A liegen da A abg. $\Rightarrow f(x) \in A$. ■

Bem: „$\Rightarrow$" gilt in bel. top. Räumen X, Y, „$\Leftarrow$" gilt nicht unbedingt, wenn X nicht metrisierbar ist.

Prop 1: Seien X, Y, Z top. Räume. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Abb: f, g stetig $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ stetig.

Bew: Sei $U \underset{\text{offen}}{\subset} Z$. g stetig $\Rightarrow \underbrace{g^{-1}(U)}_{:=U'} \underset{\text{offen}}{\subset} Y \overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f^{-1}(U') \underset{\text{offen}}{\subset} X$.

$$\underbrace{f^{-1}(U')}_{f^{-1}(g^{-1}(U))} = \underbrace{f^{-1}(g^{-1}(U))}_{(g \circ f)^{-1}(U)}$$

[abstrakter aber einfacher.] ■

Prop 2:

Stetigkeit von algebraischen Operationen: $\pm, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x \pm y$

quot: $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - 0) \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{x}{y}$

alle stetig.

Bew: zB für $+$ (für alle anderen Analog): $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$, $(x_n, y_n) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ kann man koordinatenweise verstehen.

$\Rightarrow x_n \to x \ \& \ y_n \to y \overset{\text{Ana 1}}{\Longrightarrow} x_n + y_n \to x + y$ ■

Korollar: X, Y metr. Räume. $f, g: X \to Y$. f, g stetig $\Rightarrow f+g$ stetig / $f \cdot g$ stetig / $\frac{f}{g}$ stetig wenn $g(x) \neq 0 \ \forall x \in X$

Bew: zB für $+$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(f{,}g)", "\text{stetig}"'] \arrow[dr, "\text{komp.}", "f+g \text{ stetig}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\text{stetig}", "+"'] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

stetig $\Leftarrow$ Prop 2

Prop 1 $\Longrightarrow$ $f+g$ stetig ■

Def: Eine Bijektion $f: X \to Y$ zw. top. Räumen heißt **Homöomorphismus**, wenn f und die Umkehrabb. f^{-1} beide stetig sind.
Dann sagen wir auch: X u. Y sind homöomorph. Notation: $X \cong Y$.

Bem: Ein Homöom. $f: X \to Y$ induziert eine Bijektion $\mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_Y$

Bsp: 1. $f = \mathrm{id} : \mathbb{R}_d \to \mathbb{R}$ Bij ✓. f stetig aber f^{-1} nicht stetig. $\Rightarrow$ Die Forderung "f^{-1} stetig" in der Def. eines Homöom. ist nicht redundant!

zweifellos Bij. — $\mathbb{R}$ mit diskreter Topologie.

2. $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. $f: \mathbb{R}^n \to B_1(0)$, $f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ st., $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-\|y\|}$

Es gilt: $f^{-1} \circ f = \mathrm{id} = f \circ f^{-1} \Rightarrow f$ ist Homöom.
$B_1(0) \cong \mathbb{R}^n$. $n=1$: $(-1,1) \cong \mathbb{R}$.

GLEICHMÄßIGE KONVERGENZ

<u>Def</u>: Sei X eine bel. Menge u. Y ein metr. Raum. Funktionenfolge $f_n : X \to Y$. Wir sagen f_n **konv. gleichmäßig** gegen $f : X \to Y$ ($f_n \xrightarrow{glm} f$), wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \underbrace{N(\varepsilon)}_{\text{gleiches } N\ \forall x}$ mit $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\ \forall n \geq N,\ \underline{\forall x \in X}$.

<u>SATZ</u>: Seien X, Y metr. Räume. $f_n \xrightarrow{glm} f$ & f_n stetig $\forall n \Rightarrow f$ stetig.

$\boxed{24/04/15}$ <u>SATZ</u>: X top. Raum, Y metr. Raum. $f_n : X \to Y$ stetig $\forall n$ mit $f_n \xrightarrow{glm} f : X \to Y$. $\Rightarrow f$ stetig.

<u>Bew</u>: Dies ist eine Verallgemeinerung des Entsprechenden Satzes aus Ana I. Ersetze dort Ausdrücke der Form $|f_n(x) - f(x)|$ durch $d(f_n(x), f(x))$

STETIGKEIT VON LINEAREN ABBILDUNGEN

<u>SATZ</u>: V, W normierte Vektorräume und $A : V \to W$ eine lineare Abb. Dann gilt:

A stetig $\Leftrightarrow \exists$ Konstante $C \geq 0$ $: \|Ax\| \leq C \|x\|\ \ \forall x \in V$. [Bei Lin Abb kann man Klammern weglas.

Norm in V Norm in W

<u>Bew</u>: „$\Rightarrow$" Sei A stetig. $\varepsilon := 1$. Stetigkeit in $0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < 1$. Setze $C := \frac{2}{\delta}$. Sei $x \in V - \{0\}$.
$y := \frac{x}{C\|x\|}$. $\Rightarrow \|y\| = \frac{1}{C} = \frac{\delta}{2} < \delta$. $\Rightarrow \|Ay\| < 1$. $\|A(\underbrace{\tfrac{x}{C\|x\|}}_{\text{skalar}})\| \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{C \cdot \|x\|}$ ∎

„$\Leftarrow$" $\|A(x) - A(x')\| \leq C \cdot \underbrace{\|x - x'\|}_{<\delta\ \Rightarrow\ C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.}$ $\Rightarrow$ Stetigkeit klar, denn zu geg. $\varepsilon\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C}$ ∎

<u>Def</u>: Sei $A : V \to W$ linear & stetig. $\|A\| := \sup \underbrace{\{\|Ax\| \mid \|x\| \leq 1\}}_{\text{beschränkt } \subset \mathbb{R}} \in \mathbb{R}$. $\quad \|Ax\| \leq C \cdot \|x\| \leq C$.
"Operatornorm". Es gilt: $\|A(\frac{x}{\|x\|})\| = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\| \leq \|A\|\ \ \forall x \in V - \{0\}$. $\Rightarrow$ **$\|A(x)\| \leq \|A\| \cdot \|x\|\ \ \forall x \in V$.**

KOMPAKTHEIT

<u>Def</u>: Sei X ein top. Raum. Eine **offene Überdeckung** von X ist eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \subset X$, sd $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

hier raus genommen

<u>Def</u>: X heißt **kompakt**, wenn <u>jede</u> offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X eine <u>endliche</u> Teilüberdeckung besitzt, d.h. $\exists \underbrace{i_1, i_2, i_3, \ldots i_k}_{\text{endlich}} \in I$ mit $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup U_{i_3} \cup \ldots \cup U_{i_k}$.

<u>Bem</u>: In der Def. von Kompaktheit nehmen wir <u>nicht</u> an, dass X ein Hausdorffraum sein muss!

SATZ: $Q := [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]\times\ldots\times[a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n$ (Quader) Q ist kompakt.

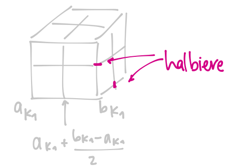
vollst. $\Rightarrow$ Schachtelungsprinzip ✓

Bew: Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Q. Widerspruchsbeweis: Ang. $\nexists$ endl. Teilüberdeckung. Induktiv konstruieren wir abgeschlossenen Teilquader $Q := Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \ldots$ sd: 1. $\forall k$: $\nexists$ endl. Teilüd von Q_k

2. $\operatorname{diam}(Q_{k+1}) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(Q_k)$

Sei Q_k mit 1. & 2. schon konstruiert. Wir konstruieren Q_{k+1}: $Q_k = [a_{k1},b_{k1}]\times\ldots\times[a_{kn},b_{kn}]$.

Wir erhalten 2^n Teilquader von Q_k: $Q_k^{(1)},\ldots Q_k^{(2^n)} \subset Q_k$.



$\exists j$ sd $Q_k^{(j)}$ nicht durch endl. viele U_i überdeckt werden kann.

Setze $Q_{k+1} := Q_k^{(j)}$. $\Rightarrow Q_{k+1}$ erfüllt 1. & 2.

$\operatorname{diam}(Q_k) \overset{2.}{=} \frac{1}{2}\operatorname{diam}(Q) \longrightarrow 0$ für $k\to\infty$. Schachtelungsprinzip $\Rightarrow \bigcap_{k=0}^{\infty} Q_k = \underbrace{\{a\}}_{\text{genau 1 Pkt}}$.

$\exists i_0\in I: a\in U_{i_0}$. U_{i_0} offen $\Rightarrow \exists \varepsilon>0: B_\varepsilon(a)\subset U_{i_0}$

$\exists k_0: Q_{k_0}\subset B_\varepsilon(a)\subset U_{i_0}$. Widerspruch! zu 1. Urspr. Ann: Jeder Quader kann nicht durch endl. viele Teil. überdeckt werden! Jetzt: Ein Q kann sogar von EINEM überdeckt werden! ↯ ■

Satz 1: Sei X ein metr. Raum, $K\subset X$, K kompakt. Dann ist K beschränkt.

Bew: Wenn $K=\emptyset$, trivialerweise richtig. Sei $K\neq\emptyset$. Wähle $x_0\in K$. $K\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x_0)$ offene Überdeckung. Aha! Jetzt weiß ich: ☺

K komp $\Rightarrow \exists n_1,\ldots,n_k: K\subset B_{n_1}(x_0)\cup\ldots\cup B_{n_k}(x_0)$. Sei $N:=\max\{n_1,\ldots,n_k\} \Rightarrow K\subset B_N(x_0)$. $\Rightarrow$ dist. von je 2 Pkten in K nie größer als N. $\Rightarrow$ beschr. ■

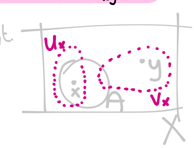
Satz 2: Sei X top. Raum, kompakt, $A \underset{\text{abg.}}{\subset} X$. Dann ist A kompakt.

Bew: Sei $A\subset\bigcup_{i\in I} U_i$, $U_i \underset{\text{offen}}{\subset} X$, eine offene Überd. von A. $X-A \underset{\text{offen}}{\subset} X \Rightarrow \{U_i\}_{i\in I}\cup\{X-A\}$ ist eine offene Überd. von X.

X komp $\Rightarrow \exists$ endl. Teilüberd. $X = U_{i_1}\cup\ldots\cup U_{i_k}\cup(X-A)$. $\Rightarrow A\subset U_{i_1}\cup\ldots\cup U_{i_k} \Rightarrow A$ kompakt. ■ Kompkt. vererbt sich

Satz 3: Sei X ein Hausdorffraum (zB ein metr. Raum). Sei $A\subset X$ ein Teilraum, A kompakt. Dann ist $A \underset{\text{abg.}}{\subset} X$. (top. R. mit Hdaxiom)

Bew: Wir zeigen $X-A \underset{\text{offen}}{\subset} X$. Jeder Pkt aus Komplem. hat offene Umg. die noch in Kompl. drinliegt



Sei $y\in X-A$. $\forall x\in A$: $\exists$ offene Umg. U_x von x, V_x von y: $U_x\cap V_x=\emptyset$.

$A\subset\bigcup_{x\in A} U_x$ offene Überd. A kompakt $\Rightarrow \exists x_1,\ldots x_k\in A: A\subset U_{x_1}\cup\ldots\cup U_{x_k}$.

Setze $V := V_{x_1}\cap\ldots\cap V_{x_k}$. end. Durchschn. von offenen Mengen $\Rightarrow$ wieder offen $\Rightarrow V \underset{\text{offen}}{\subset} X$.

Es gilt: $V\cap A=\emptyset$, also $V\subset X-A$, $y\in V$. ■

Satz 4: (Heine-Borel). Sei $A\subset\mathbb{R}^n$. A kompakt $\Leftrightarrow$ A abgeschlossen & beschränkt.

metr. Raum + Hausd. axiom beides erfüllt ✓

Bew: „$\Rightarrow$" Sei A komp. Satz 1 $\Rightarrow$ A beschr. Satz 3 $\Rightarrow$ A abgeschlossen.

„$\Leftarrow$" Sei A abg. & beschr.

$\hookrightarrow \exists$ abg. Quader Q: $A \underset{\text{abg.}}{\subset} Q$. Satz 2 (mit $X=Q$) $\Rightarrow$ A kompakt. ■

29/04/15 **Satz 1** Seien X,Y top. Räume, $f: X \to Y$ eine stetige Abb., $K \subset X$. Dann: K kompakt $\Rightarrow f(K)$ kompakt.

"Stetigkeit erhält Kompaktheit"

Bew: Sei $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. $(U_i \underset{\text{offen}}{\subseteq} Y) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(U_i)}_{\text{Urbilder offen in } X \text{ da } f \text{ stetig}}$.

K komp. $\Rightarrow \exists\, i_1, i_2, \dots, i_r : K \subset f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_r})$. $\Rightarrow f(K) \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$ ■

Satz 2 (Allg. Extremalsatz) Sei X ein komp. top. Raum und $f: X \to \mathbb{R}$ eine stetige Fkt. Dann nimmt f auf X ein Minimum und ein Maximum an.

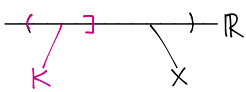
Bew: Satz 1 $\Rightarrow f(X) \overset{\subset \mathbb{R}}{}$ ist kompakt. Heine-Borel $\Rightarrow f(X)$ ist abg. & beschränkt.

$f(X)$ beschränkt $\Rightarrow \exists\, m := \inf f(X) \in \mathbb{R}$, $\exists M := \sup f(X) \in \mathbb{R}$.

$f(X)$ abg. $\Rightarrow m, M \in f(X)$ d.h. $\exists\, x_m, x_M \in X$ sd $m = f(x_m)$, $M = f(x_M)$. ■

Bem zum Satz v. Heine-Borel: H-B gilt NICHT, wenn man $\mathbb{R}^n$ durch einen bel. metr. Raum ersetzt!

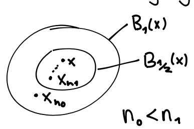
zB:



K abg. in X, beschränkt, aber sicher nicht kompakt.

Satz (Bolzano-Weierstraß) Sei X ein kompakter metr. Raum. Dann hat jede Folge (x_n) in X eine konv. Teilfolge.

Bew: Widerspruchsbeweis: Ang. (x_n) besitzt keine konv. Teilfolge. Sei $\overset{x \text{ festhalten}}{x \in X}$. Enthielte jede offene Umg. von x unendl. viele Folgenglieder, dann könnte man eine Teilfolge konstruieren, die gegen x konvergiert:



$\Rightarrow \exists$ offene Umgebung $U_x \subset X$ von x, die nur endl. viele Folgenglieder enthält.

Wir betrachten die offene Überd.: $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ (x variiert). X komp. $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2, \dots, x_r \in X$: $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_r}$ (endlich).

$\Rightarrow$ Widerspruch. $\Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow (x_n)$ besitzt konv. Teilfolge ✓ ■

Bem: Die Umkehrung gilt auch.

GLEICHMÄßIGE STETIGKEIT

Def. Seien X,Y metr. Räume und $f: X \to Y$ eine Abb. f heißt **gleichmäßig stetig**, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \underbrace{\delta(\varepsilon)}_{\text{unabh. von irg. Pkt}} > 0$:
$d(x,x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon \quad \forall x, x' \in X$.

Satz: Ist X komp. und $f: X \to Y$ stetig, dann ist f glm. stetig.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. $x \in X$. f stetig in $x \Rightarrow \exists\, \delta = \delta(x) > 0$ sd: $x' \in B_{\delta(x)}(x) \Rightarrow f(x') \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$.

$\rightsquigarrow$ offene Überdeck. $X = \bigcup_{x \in X} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)$. X komp. $\Rightarrow \exists$ endl. Teilüberd.: $X = B_{\frac{\delta(x_1)}{2}}(x_1) \cup \dots \cup B_{\frac{\delta(x_r)}{2}}(x_r)$

Setze $\delta := \min\{\frac{\delta(x_1)}{2}, \dots, \frac{\delta(x_r)}{2}\} > 0$. Dann überprüft man mit Hilfe d. Δ-UG, dass $d(x,x') < \delta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

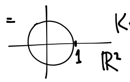
PARTIELLE DIFFERENZIERBARKEIT

- Kurven in $\mathbb{R}^n$

Def: Eine **Kurve** in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abb. $f: I \to \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

$t \in I \quad f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ Fktn $f_i : I \to \mathbb{R} \quad (i=1,\dots n)$

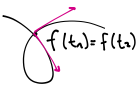
Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\underbrace{\cos t}_{f_1(t)}, \underbrace{\sin t}_{f_2(t)})$ Bild f =



Kreis

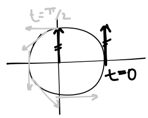
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$. Bild g = Bild f, aber als Kurven ist $g \neq f$! ("Reparametrisierung")

Def: Die Kurve f heißt **differenzierbar**, wenn alle Komponenten $f_i : I \to \mathbb{R}$ diff'bar sind. Sei f nun eine diff'bare Kurve. Dann heißt $(f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$ **Tangentialvektor** an f für Parameterwert $t \in I$.



Kurve muss nicht inj. sein! Vektoren an gleichem Pkt sind trotz unterschiedlich!

Bsp: $f(t) = (\cos t, \sin t) \quad f'(t) = (-\sin t, \cos t)$



Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und f eine Funktion $f: U \to \mathbb{R}$. Notation: $e_i := (0, \dots 0, \underset{\text{i-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ $\{e_1, \dots e_n\}$ Standartbasis von $\mathbb{R}^n$.

Def: Sei $x \in U$. f heißt **partiell differenzierbar** in die i-te Koordinatenrichtung im Punkt x, wenn der Grenzwert

$$(\partial_i f)(x) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (f(x + te_i) - f(x)) \text{ existiert.} \quad \partial_i f = \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

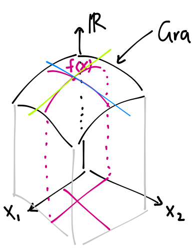
"i-te Partielle Abl."

Berechnung von part. Abl. $\quad x = (x_1, \dots, x_n) \in U$

Setze $f_i(t) := f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$. $\quad f_i'(x_i) = \left(\frac{d}{dt} f_i\right)(x_i) = \lim_{t \to 0} (f_i(x_i + t) - f_i(x_i)) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (f(x + te_i) - f(x))$
$= (\partial_i f)(x)$.

$\Rightarrow$ die üblichen Rechenregeln (Ketten-, Produkt-, etc) gelten also analog auch für partielle Ableitungen.

Geom. Interp.: $n=2$



Graph von f

$\nwarrow$ Steigung $= \partial_1 f$

$\nwarrow$ $\partial_2 f$

06/05/15 **Def**: $U \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$. f ist **partiell differenzierbar** auf U, wenn $(\partial_i f)(x)$ existieren, $\forall x \in U \ \forall i = 1 \dots n$.

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x \neq 0. \\ 0 & \text{für } x = 0. * \end{cases}$ **Beh**: f ist part. diffbar auf $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

▸ $\partial_1 f = \frac{d}{dx_1}\left(\frac{x_1 \cdot c}{x_1^2 + c^2}\right) = \frac{c\,(x_1^2+c^2) - x_1\, c\,(2x_1)}{(x_1^2+c^2)^2} = \frac{c^3 + cx_1^2 - 2cx_1^2}{(\quad)^2} = \frac{c^3 - cx_1^2}{(x_1^2+c^2)} = \frac{x_2^3 - x_2 x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$ existiert!

$\frac{d}{dx_2}$ ebenso

Für $x=0$: $(\partial_1 f)(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(\underbrace{f(t,0)}_{0} - \underbrace{f(0,0)}_{=0\,*}\big) = 0$ existiert ✓ Analog auch für 2te Ableitung $\partial_2 f = 0$

$\Rightarrow$ Fkt part. diffbar auf gesamter Ebene

▸ $a_k := \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}^2$, $k = 1, 2, \dots$

$f(a_k) = \frac{1/k^2}{2/k^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0)$. $\Rightarrow$ Obwohl $a_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$ & $f(a_k) \not\to f(0)$ $\Rightarrow$ f ist nicht stetig im Punkt $x = 0$!

▸ **partielle Diffbarkeit $\not\Rightarrow$ Stetigkeit** nur Stetig in jeweils 1 Richtung (1 Achse)

VEKTORFELDER

Def: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein **Vektorfeld** ist eine Abb. $V: U \to \mathbb{R}^n$!

$V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$. Wir sagen V ist part. diffbar, wenn alle V_i, $i = 1 \dots n$ partiell diffbar sind. ($V_i: U \to \mathbb{R}$)

Def: Sei $f: U \to \mathbb{R}$ part. diffbar, $U \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$. **Gradient** von f: $\text{grad}(f) = \overset{\text{nabla}}{\nabla} f := (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f)$. $V = \nabla f$ ist ein Vektorfeld auf U.

Bsp: $f = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. $\nabla f = (2x_1, 2x_2, \dots 2x_n) = 2(x_1, x_2, \dots x_n)$ nacheinander nach x_1 dann x_2 etc ableiten, der Rest wird 0 da x_1 nur 1mal vorhanden etc

Def: Sei V ein Vektorfeld. $\overset{\text{divergent}}{\text{div}}(V) := \sum_{i=1}^n \partial_i V_i$, $\text{div}(V): U \to \mathbb{R}$ **"Divergenz"**

Bsp: $V = (x_1, \dots, x_n)$ $\text{div}(V) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i}}_{1+1+1+1+\dots\ (n\text{-mal})} = n$.

$\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1$ $\frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 1$ ...

Formal: $\nabla = (\partial_1, \dots \partial_n)$, $\text{div}(V) = \langle \nabla, V \rangle = \nabla \cdot V$

Grob:
$$\begin{tikzcd} \text{part. diffbare Funktionen } f: U \to \mathbb{R} \arrow[r, bend left, "\nabla"] & \text{part. diffbare Vektorfelder } V: U \to \mathbb{R}^n \arrow[l, bend left, "\text{div}"] \end{tikzcd}$$

HÖHERE PARTIELLE ABLEITUNGEN

Wir sagen $f: U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$) ist **zweimal partiell diffbar**, wenn $\forall i = 1, \dots n$ $\partial_i f: U \to \mathbb{R}$ existieren u. partiell diffb. sind.

$\rightsquigarrow \partial_j(\partial_i f): U \to \mathbb{R}$.

Schreibweise: $\partial_j \partial_i f = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$. Induktiv: f k-mal partiell diffbar.

Satz (Schwarz): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar auf U. Dann gilt $\forall i,j \ \forall a \in U$:

$$\partial_j(\partial_i f)(a) = \partial_i(\partial_j f)(a).$$

Bew: $i \neq j$: $g(x,y) := f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, n)$. U offen $\Rightarrow$ g def. auf $(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \times (a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ klein.

$\underbrace{G_y}_{\text{fest}}(x) := g(x,y) - g(x, a_j)$.

Mittelwertsatz angewendet auf $G_y(x)$: $\exists \xi$ zw. x und a_i, sd $(x - a_i)\, G_y'(\xi) = G_y(x) - G_y(a_i)$.

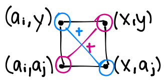
$G_y'(\xi) = \partial_1 g(\xi, y) - \partial_1 g(\xi, a_j)$.

wenn $y \to a_j$ dann auch $\eta \to a_j$

Mittelwertsatz angewendet auf $y \mapsto \partial_1 g(\xi, y)$. $\exists \eta$ zw. y u. a_j, sd $(y - a_j)\, \partial_2 \partial_1 g(\xi, \eta) = \partial_1 g(\xi, y) - \partial_1 g(\xi, a_j)$.

$(x - a_i) \cdot (y - a_j)\, \partial_2 \partial_1 g(\xi, \eta) = (x - a_i) \cdot (\partial_1 g(\xi, y) - \partial_1 g(\xi, a_j)) = (x - a_i) \cdot G_y'(\xi) = G_y(x) - G_y(a_i)$

$= g(x,y) - g(x, a_j) - g(a_i, y) + g(a_i, a_j)$.



$\Rightarrow \quad \dfrac{\;-\;}{(x - a_i) \cdot (y - a_j)} = \partial_2 \partial_1 g(\xi, \eta)$

Durch Vertauschen der Rollen von x und y erhält man $\hat{\xi}$ zw x und a_i, $\hat{\eta}$ zw y und a_j mit

$(x - a_i) \cdot (y - a_j)\, \partial_1 \partial_2 g(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = g(x,y) - g(x, a_j) - g(a_i, y) + g(a_i, a_j)$.

Für $(x - a_i)(y - a_i) \neq 0$: $\partial_2 \partial_1 g(\xi, \eta) = \partial_1 \partial_2 g(\hat{\xi}, \hat{\eta})$. $(x,y) \longmapsto (a_i, a_j)$: $\Rightarrow (\xi, \eta) \longrightarrow (a_i, a_j)$ und $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \longrightarrow (a_i, a_j)$.

Da $\partial_1 \partial_2 g$, $\partial_2 \partial_1 g$ stetig $\Rightarrow$ $\underbrace{\partial_2 \partial_1 g(a_i, a_j)}_{(\partial_j \partial_i f)(a)} = \underbrace{\partial_1 \partial_2 g(a_i, a_j)}_{(\partial_i \partial_j f)(a)}$ $\blacksquare$

Anwendung: Sei $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^3$. Frage: Wann hat ein Vektorfeld $V: U \to \mathbb{R}^3$ (st. part. diffbar) ein sog. Potential?

d.h. $\exists ?\ f: U \to \mathbb{R}$ (2-mal st. part. diffbar) mit $V = \nabla f$. Bilde Gradient d. Fkt und erhalte zug. Vektorfeld.

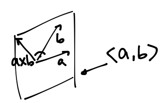
Zunächst: Kreuzprodukt $a, b \in \mathbb{R}^3$. $a \times b$ "$:=$" $\det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = e_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$

Vgl Vlad ÜG Entw.satz !! ☺

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$

Man rechnet nach: $a \times b = -(b \times a)$. $\underbrace{(a \times b)}_{\text{Normalen-Vektor}} \perp \underbrace{\langle a, b \rangle}_{\text{UVR}}$

$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - \underbrace{\langle a, b \rangle}_{\text{inneres Produkt}}^2$ ⚠



Def: **Rotation** (engl. "curl") eines Vektorfeldes $V: U \to \mathbb{R}^3$ $(a = \nabla, b = V)$

rot V "$:=$" $\nabla \times V = (\partial_2 V_3 - \partial_3 V_2,\ \partial_3 V_1 - \partial_1 V_3,\ \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1)$

Ist $V = \nabla f = (\underbrace{\partial_1 f}_{V_1}, \underbrace{\partial_2 f}_{V_2}, \underbrace{\partial_3 f}_{V_3})$ dann rot V = rot $(\nabla f) = (\underbrace{\partial_2 \partial_3 f - \partial_3 \partial_2 f}_{=0 \text{ (Schwarz)}},\ \underbrace{\partial_3 \partial_1 f - \partial_1 \partial_3 f}_{=0},\ \underbrace{\partial_1 \partial_2 f - \partial_2 \partial_1 f}_{=0})$

Wenn V ein Potential f hat, dann rot$(V) = 0$. (Notw. Bed. für die Existenz eines Potentials) Pot. ex NUR wenn rot$(v) = 0$!!!

$\boxed{08/05/15}$ rot $\circ\, \nabla = 0$ $\quad \boxed{f} \underset{\text{div}}{\overset{\nabla}{\rightleftarrows}} \boxed{V}$

Laplace-Operator $\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f)$ $\quad f: U \to \mathbb{R}$, $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$

$= \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \dots + \partial_n^2 f$

Def: f heißt **harmonisch**, wenn $\Delta f = 0$ auf U.

TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT

Motivation: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$. $A:=f'(x)\in\mathbb{R}$. $r(\xi):=\overbrace{f(x+\xi)}^{f \text{ in der Nähe von } x}-f(x)-A\cdot\xi$. $f(x+\xi)=f(x)+A\cdot\xi+\overbrace{r(\xi)}^{\text{Rest}}$.

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{r(\xi)}{\xi}=\lim\left(\frac{f(x+\xi)-f(\xi)}{\xi}-A\right)=f'(x)-A=0. \Rightarrow \frac{r(\xi)}{\xi}\longrightarrow 0 \text{ für } \xi\to 0.$$

Def: Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f:U\to\mathbb{R}^m$ eine Abb. und $x\in U$. Wir sagen: f ist im Pkt x **total differenzierbar** (oder kurz "differenzierbar"), wenn eine lineare Abb. $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ existiert, sd $f(x+\xi)=f(x)+A\cdot\xi+r(\xi)$ mit $\frac{r(\xi)}{\|\xi\|}=0$ für $\xi\to 0$.

Bem: $f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_m\end{pmatrix}$, $r=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_m\end{pmatrix}$. In den Standardbasen von $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m$ ist A eine $(m\times n)$-Matrix $A=(a_{ij})$. $\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix}$

$A\cdot\xi=(a_{ij})\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix}$

Satz: $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f:U\to\mathbb{R}^m$, $x\in U$. Sei f total diffbar in x. Dann gilt:

1. f ist stetig in x
2. f_i ist partiell diffbar in x $\forall i$ und $a_{ij}=((\partial_j f_i)(x))$, $A=(a_{ij})$. Matrix ist eindeutig! ($\Rightarrow$ gibt keine 2.)

Bew: 1. $\lim_{\xi\to 0}f(x+\xi)=\lim_{\xi\to 0}(f(x)+\underbrace{A\cdot\xi}_{\to 0}+\underbrace{r(\xi)}_{\to 0})$. Da A stetig gilt: $A\xi\xrightarrow{\xi\to 0}A\cdot 0=0$

da sogar $\frac{r(\xi)}{\xi}\to 0$, was viel stärker ist $\left(\frac{r(\xi)}{\|\xi\|}\cdot\|\xi\|\right)$

2. $f_i(x+\xi)=f_i(x)+\sum_j a_{ij}\cdot\xi_j+r_i(\xi)$. $\xi=h\cdot e_j$. $f_i(x+he_j)=f_i(x)+a_{ij}\underbrace{\xi_j}_{=h}+r_i(he_j)$.

$$(\partial_j f_i)(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f_i(x+he_j)-f_i(x)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(a_{ij}h+r_i(he_j)\right)=\lim\left(a_{ij}+\underbrace{\frac{r_i(he_j)}{h}}_{\to 0}\right)=a_{ij}. \blacksquare$$

lim ex. u. = Matrixeintrag in i-te Zeile / j-te Spalte

Bem: Die Matrix $A=(a_{ij})=(\partial_j f_i(x))$ heißt **Funktionalmatrix / Jacobimatrix / Differential** von f im Pkt x.

Schreibweisen: $(Df)(x):=J_f(x):=\frac{\partial(f_1,\dots f_m)}{\partial(x_1,\dots x_n)}:=(\partial_j f_i)(x)$

Satz: (Hinreichende Bed. für totale Diffbarkeit) U offen $\mathbb{R}^n$, $f:U\to\mathbb{R}$, f sei part. diffbar. Sei $x\in U$.

$\partial_i f$ stetig in x $\Longrightarrow$ f (total) diffbar in x

MWS: $\exists t_2\in[0,1]$:
$f(x^{(2)})-f(x^{(1)})=\xi_2\cdot(\partial_2 f)(x^{(1)}+t_2\xi_2 e_2)$

Bew: $x^{(0)}:=x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $x^{(1)}=\begin{pmatrix}x_1+\xi_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $x^{(2)}=\begin{pmatrix}x_1+\xi_1\\x_2+\xi_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $\dots$, $x^{(n)}=\begin{pmatrix}x_1+\xi_1\\\vdots\\\vdots\\x_n+\xi_n\end{pmatrix}=x+\xi$.

Mittelwertsatz: $\exists t_1\in[0,1]$:
$f(x^{(1)})-f(x^{(0)})=\xi_1\cdot(\partial_1 f)(x^{(0)}+t_1\xi_1 e_1)$

Teleskopsumme:

$$f(x+\xi)-f(x)=\underbrace{f(x^{(n)})-f(x^{(n-1)})}+f(x^{(n-1)})-\dots+\underbrace{(f(x^{(2)})-f(x^{(1)}))}+\underbrace{(f(x^{(1)})-f(x^{(0)}))}$$

$$=\xi_n(\partial_n f)(x^{(n-1)}+t_n\xi_n e_n)+\dots \quad \xi_2(\partial_2 f)(x^{(1)}+t_2\xi_2 e_2)+\xi_1\cdot(\partial_1 f)(x^{(0)}+t_1\xi_1 e_1)$$

$a_i=(\partial_i f)(x)$

$$=\sum_{i=1}^n(\partial_i f)(x^{(i-1)}+t_i\xi_i e_i)\cdot\xi_i=\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i\xi_i}_{A\xi}+\underbrace{\sum_{i=1}^n\Big(\overbrace{(\partial_i f)(x^{(i-1)}+t_i\xi_i e_i)}^{\to a_i}-a_i\Big)\cdot\xi_i}_{:=r(\xi)}$$

$\partial_i f$ stetig in x $\forall i\Rightarrow\xi\to 0: x^{(i-1)}+t_i\xi_i e_i\to x$. $(\partial_i f)(x^{(i-1)}+t_i\xi_i e_i)\longrightarrow(\partial_i f)(x)=a_i$

$$\frac{r(\xi)}{\|\xi\|}\le\sum_{i=1}^n\underbrace{\frac{|\xi_i|}{\|\xi\|}}_{\le 1}\underbrace{\left|(\partial_i f)(x^{(i-1)}+t_i\xi_i e_i)-a_i\right|}_{\to 0}\longrightarrow 0. \blacksquare$$

Zusammenfassend: stetig part. diffbar $\Longrightarrow$ (total) diffbar $\Longrightarrow$ part. diffbar
(total) diffbar $\Longrightarrow$ stetig

alle Abl. sind st.

Umkehrungen nicht richtig!

DIE ALLGEMEINE KETTENREGEL

Satz: Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $V\subset\mathbb{R}^m$ offen, $U\xrightarrow{f}V\xrightarrow{g}\mathbb{R}^k$. Ist f in $x\in U$ total diffbar und g in $y=f(x)$ total diffb., dann ist $g\circ f$ in x diffbar und es gilt: $D(g\circ f)(x) = \overbrace{(Dg)(y)}^{=:B}\cdot\overbrace{(Df)(x)}^{=:A}$

übl. Matrixmultipl.

Bew: z.z.: $D(g\circ f)(x) = B\cdot A$. $f(x+\xi)=f(x)+A\cdot\xi+r_f(\xi)$, $\frac{r_f(\xi)}{\|\xi\|}\to 0$, $\xi\to 0$. vgl Landau: $r_f(\xi)=o(\|\xi\|)$.

$*$ $\exists\,\delta>0$: $\frac{\|r_f(\xi)\|}{\|\xi\|}\le 1$ für $\|\xi\|<\delta$.

$g(y+\eta)=g(y)+B\cdot\eta+r_g(\eta)$, $\frac{r_g(\eta)}{\|\eta\|}\to 0$ für $\eta\to 0$. $\eta := f(x+\xi)-f(x)$.

$$g(f(x+\xi)) = g(f(x)+\eta) = g(y+\eta) = g(y)+B\eta+r_g(\eta) = g(f(x))+B(A\xi+r_f(\xi))+r_g(A\xi+r_f(\xi))$$
$$= \underbrace{g(f(x))}_{\text{gefällt uns}} + \underbrace{(BA)\xi}_{\text{gefällt uns sehr gut}} + \underbrace{\underbrace{Br_f(\xi)}_{1.} + \underbrace{r_g(A\xi+r_f(\xi))}_{2.}}_{\text{hässlicher Rest}}$$

$\Rightarrow$ z.z. bleibt: $\frac{r_{g\circ f}(\xi)}{\|\xi\|}\to 0$ für $\xi\to 0$

1. $\frac{\|Br_f(\xi)\|}{\|\xi\|}\le \|B\|\cdot\underbrace{\frac{\|r_f(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{\to 0}\longrightarrow 0$

2. $r_g(\eta)=\|\eta\|\cdot R(\eta)$, wobei $R(\eta)=0$, wenn $\eta\to 0$. $\Rightarrow r_g(A\xi+r_f(\xi)) = \|A\xi+r_f(\xi)\|\cdot R(A\xi+r_f(\xi))$
$\le \|A\xi\|+\|r_f(\xi)\|$
$\le \|A\|\cdot\|\xi\| + \|\xi\|$ für $\|\xi\|$ klein genug.

$$\frac{\|r_g(A\xi+r_f(\xi))\|}{\|\xi\|}\le \frac{1}{\cancel{\|\xi\|}}\cdot(\|A\|+1)\cdot\cancel{\|\xi\|}\cdot R(A\xi+r_f(\xi)) = (\|A\|+1)\cdot \overbrace{R(\underbrace{\underbrace{A\xi}_{\to 0}+\underbrace{r_f(\xi)}_{\to 0}}_{\to 0})}^{\to 0}\longrightarrow 0 \quad\blacksquare$$

13/05/15

$$\begin{tikzcd} U\subset\mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & V\subset\mathbb{R}^m \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

Kettenregel: $D(g\circ f)(x) = (Dg)(f(x))\cdot(Df)(x)$

Bsp: ①
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^1 \arrow[r, "\gamma", "\text{Kurve}"'] \arrow[dr, "f\circ\gamma"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$f\circ\gamma:\underset{\ni t}{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$. $(f\circ\gamma)'(t) = (Df)(\gamma(t))\cdot(D\gamma(t)) = \overbrace{(\partial_1 f \,..\, \partial_m f)}^{1\times m}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \vdots\\ \gamma_m'(t)\end{pmatrix}}^{m\times 1}$
$= \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(\gamma(t))\cdot\gamma_i'(t)$
$= \langle(\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$

②
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\gamma\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\gamma"] \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

$D(\gamma\circ f)(x) = (D\gamma)(f(x))\cdot(Df)(x) = \begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \vdots\\ \gamma_n'(t)\end{pmatrix}\cdot(\partial_1 f(x)\,\dots\,\partial_n f(x)) = \overbrace{\begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\partial_1 f(x) & \cdots & \gamma_1'(t)\partial_n f(x)\\ \vdots & & \\ \gamma_k'(t)\partial_1 f(x) & \cdots & \gamma_k'(t)\partial_n f(x)\end{pmatrix}}^{k\times n}$

ALLGEMEINE RICHTUNGSABLEITUNGEN

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ eine diffbare Fkt, $x \in U$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, ein Richtungsvektor.

<u>Def</u>: Die **Richtungsableitung** von f im Pkt x in Richtung v ist der Grenzwert $\underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(x+tv) - f(x)\right)}_{=:(\partial_v f)(x)}$ $= \left(\frac{d}{dt} f(x+tv)\right)\Big|_{t=0}$

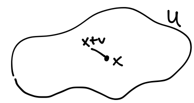
Spezialfall: $v = e_i \Rightarrow \partial_{e_i} = \partial_i$.

<u>Satz</u>: f diffbar $\Rightarrow \partial_v f$ existiert und es gilt $(\partial_v f)(x) = \langle (\nabla f)(x), v \rangle$.

<u>Bew</u>: $\gamma(t) = x + t \cdot v \qquad \gamma'(t) = v$

$$\frac{d}{dt} f(x+tv) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \overset{\text{Bsp1}}{=} \langle (\nabla f)(x), \gamma'(t) \rangle = \langle (\nabla f)(x), v \rangle \quad \blacksquare$$

TAYLOR ENTWICKLUNGEN



U offen $\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig partiell diffbar. Sei $x \in U$ ein Pkt ("Mittelpunkt").
Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, sd die Strecke $\{x + t \cdot v \mid t \in [0,1]\}$ ganz in U liegt.
$g(t) := f(x + t \cdot v)$, $g: [0,1] \to \mathbb{R}$. $g(t)$ ist $(k+1)$-mal st. diffbar (wg Vorr.).
Satz von Taylor (Ana1) mit Mittelpunkt $t=0$ mit Lagrangescher Form d. Restglieds $\Rightarrow \exists \xi \in [0,t]$:

$$g(t) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} g^{(m)}(0) \cdot t^m + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\xi)\, t^{k+1}.$$

Für $t=1$: $f(x+v) = g(1) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} \underline{g^{(m)}(0)} + \frac{1}{(k+1)!} \underline{g^{(k+1)}(\xi)}$ $\quad \xi \in [0,1]$

Wir berechnen die $g^{(m)}(t)$: $g'(t) = \langle (\nabla f)(x + t \cdot v), v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x + t \cdot v) \cdot v_i$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}(\partial_i f)(x + t \cdot v)\right) \cdot v_i \overset{\text{Abl. 2. Ord.}}{=} \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n} (\partial_{i_2} \partial_{i_1} f)(x + t \cdot v) \cdot v_{i_1} \cdot v_{i_2}$$

$\vdots$

Induktiv: $g^{(m)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_m = 1}^{n} (\partial_{i_m} \cdots \partial_{i_1} f)(x + t \cdot v) \cdot v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_m}$

Binomischer Lehrsatz: $\underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)^m}_{} = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) = \sum_{i_1, \dots, i_m = 1}^{2=n} \lambda_{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_m}$ (mit $2 = n$)

$$\sum_{\alpha=0}^{m} \binom{m}{\alpha} \lambda_1^{\alpha} \lambda_2^{m-\alpha} = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m} \frac{m!}{\alpha_1!\, \alpha_2!} \cdot \lambda_1^{\alpha_1} \cdot \lambda_2^{\alpha_2}$$

Verallgemeinerung für bel. n: $\sum_{i_1, \dots, i_m = 1}^{n} \lambda_{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_m} = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)^m = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m} \frac{m!}{\alpha_1!\, \alpha_2! \cdots \alpha_n!} \cdot \lambda_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{\alpha_n}$ **"Multinomischer Lehrsatz"**

<u>Bew</u>: Induktion nach n. $n=2$ ist der binom. Lehrsatz. $(\underbrace{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1})}_{\text{eine Zahl}} + \underbrace{\lambda_n}_{\text{2. Zahl}})^m \overset{\text{binom. Lehrs.}}{=} \sum_{\alpha + \alpha_n = m} \frac{m!}{\alpha!\, \alpha_n!} \underbrace{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1})^{\alpha}}_{\sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} = \alpha} \frac{\cancel{\alpha!}}{\alpha_1! \cdots \alpha_{n-1}!} \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} \cdot \lambda_n^{\alpha_n}$

Multi-Index Notation: $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $\qquad |\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$ $\qquad v^{\alpha} := v_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot v_n^{\alpha_n}$

$\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$ $\qquad \partial^{\alpha} := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$

$$g^{(m)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_m = 1}^{n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_m} f)(x + t \cdot v) \cdot v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_m} \overset{\text{multin. Satz}}{=} \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} (\partial^{\alpha} f)(x + t \cdot v) \cdot v^{\alpha}$$

Wir sehen in ✪ ein: $f(x+v) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{\cancel{m!}} \sum_{|\alpha|=m} \frac{\cancel{m!}}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x) \cdot v^\alpha + \frac{1}{\cancel{(k+1)!}} \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\cancel{(k+1)!}}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x+\xi v) \cdot v^\alpha$

Ordnung von α

$$\boxed{= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \cdot v^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(\partial^\alpha f)(x+\xi_v)}{\alpha!} \cdot v^\alpha}$$

Taylor-Entwicklung von f im Mittelpkt $x \in U$

$\xi \in [0,1]$

Beh: $f(x+v) = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \cdot v^\alpha + \underbrace{o \cdot (\|v\|^k)}_{\text{Restglied} \to 0}$.

$$f(x+v) = \sum_{|\alpha|\le k-1} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \cdot v^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\partial^\alpha f)(x+\xi v)}{\alpha!} \cdot v^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{\left((\partial^\alpha f)(x+\xi v) - (\partial^\alpha f)(x)\right)}_{\to 0 \text{ wenn } v \to 0 \text{ da } \partial^\alpha f \text{ stetig.}} \cdot v^\alpha$$

$$|v^\alpha| = |v_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot v_n^{\alpha_n}| \le \|v\|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \|v\|^{\alpha_n} = \|v\|^{\sum \alpha_i} = \|v\|^{|\alpha|} = \|v\|^k$$

$\frac{|v^\alpha|}{\|v\|^k} \le 1$ für v klein genug

Spezialfälle ① Approximation 1. Ordnung ("lineare Approx.") : $k=1$

inneres Prod.

$$f(x+v) = f(x) + \langle (\nabla f)(x), v \rangle + o \cdot (\|v\|).$$

② Approx. 2. Ordnung ("quadratische Approx."): $k=2$. $f(x+v) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(x)\, v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} (\partial_j \partial_i f)(x)\, v_i v_j + o(\|v\|^2)$

$= f(x) + \langle (\nabla f)(x), v \rangle + \frac{1}{2} \langle v, H(f)\, v \rangle + o(\|v\|^2)$

Fktwert im Mittelpkt

wobei $H(f) = (\partial_i \partial_j f(x))$ eine symm. $n \times n$-Matrix. "Hesse-Matrix von f im Pkt x"

Satz v. Schwarz

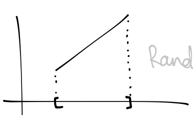
15/05/15

LOKALE EXTREMA

U offen $\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$.

Def: Die Fkt f besitzt im Pkt $x \in U$ ein lokales $\begin{Bmatrix} \text{Max} \\ \text{Min} \end{Bmatrix}$, wenn $\exists$ Umgebung $V \subset U$ von x: $f(x) \begin{Bmatrix} \ge \\ \le \end{Bmatrix} f(y)\ \forall y \in V$.

"lokales Extremum" = relative Extrema



Randpkte gesondert ansehen!

Def: Sei f partiell diffbar. $x \in U$ heißt kritischer Punkt von f, wenn $(\nabla f)(x) = 0$.

SATZ (Notwendige Bedingung für lok. Extrema)

Besitzt f in $x \in U$ ein lok. Extremum, dann ist x ein kritischer Punkt von f.

Bew: Wir setzen $g_i(t) := f(x + t \cdot e_i)$. $\Rightarrow (\partial_i f)(x) = g_i'(0)$. $\to g_i: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ex da U offen, $t=0$ aus Intervall

$\Rightarrow g_i(0) = f(x)$, $\frac{f(x+te_i) - f(x)}{t}$

f habe in x ein lok. Extremum.

$\Rightarrow g_i$ hat in $t=0$ ein lok. Extr.

Ana 1 $\Rightarrow g_i'(0) = 0$. $\Rightarrow (\partial_i f)(x) = 0$. Da i bel gilt es $\forall i \in \{1 \ldots n\} \Rightarrow (\nabla f)(x) = 0$. ∎

Bem: Wir wissen aus Ana 1, dass diese notw. Bed NICHT hinreichend ist! $\Rightarrow$ Wir suchen nach hinr. Bed. ☺

Sei H eine reelle, symmetrische $n\times n$-Matrix (zB die Hesse-Matrix $H=H(f)$.)

<u>Def</u>: 1. H heißt positiv definit, wenn $\langle v,Hv\rangle >0$ ist $\forall v\in\mathbb{R}^n-\{0\}$

2. — " — negativ definit, wenn $-H$ positiv definit ist

3. — " — indefinit, wenn $\exists v,w\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, sd $\langle v,Hv\rangle >0$ und $\underbrace{\langle w,Hw\rangle}_{\text{quadr. Form}} <0$.

gibt Matrizen die keins der 3 sind !!

<u>aus LA</u>:

H symm $\Rightarrow \exists$ Orthonormalbasis $\{v_1,\dots,v_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von H. (Spektralsatz)

$Hv_i=\lambda_i v_i$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$.

Sei $v\in\mathbb{R}^n$. $v=\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $\alpha_i\in\mathbb{R}$. $\langle v,Hv\rangle = \langle \sum\alpha_i v_i, \sum\alpha_j Hv_j\rangle = \sum_{i,j}\alpha_i\alpha_j\langle v_i,\lambda_j v_j\rangle = \sum_{i,j}\alpha_i\alpha_j\lambda_j\delta_{ij} = \sum_i \alpha_i^2\lambda_i$

Es folgt: H pos. def $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte >0.

H neg. def $\Leftrightarrow$ alle EW <0

H indefinit $\Leftrightarrow \exists i,j : \lambda_i>0$, $\lambda_j<0$

<u>aus LA</u>

<u>Prop</u>: H ist pos. def $\Leftrightarrow \det \underbrace{\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1k}\\ \vdots & & \vdots \\ h_{k1} & \cdots & h_{kk}\end{pmatrix}}_{k\times k} >0 \quad \forall k=1\dots n$.

(h_{ij})

$n=2$ $H=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ pos def $\Leftrightarrow$ $a>0$ und $ad-bc>0$.

H neg. def $\Leftrightarrow -H$ pos. def $\Rightarrow -a>0$ und $(-a)(-d)-(-b)(-c)>0$

$\Rightarrow$ $a<0$ und $ad-bc>0$

<u>SATZ</u> <u>(hinreichende Bed. für lok. Extrema)</u>

U offen $\mathbb{R}^n$. $f:U\to\mathbb{R}$ sei 2-mal stetig partiell diffbar. Sei $x\in U$ ein krit. Pkt von f. Dann gilt:

1. $H(f)(x)$ pos. def. $\Rightarrow$ f hat in x ein lok. Minimum — Wert an diesem Pkt $=f(x)$
2. $H(f)(x)$ neg. def. $\Rightarrow$ f hat in x ein lok. Maximum
3. $H(f)(x)$ indefinit $\Rightarrow$ f hat in x <u>kein</u> lok. Extremum

<u>Bew</u>: Wir untersuchen die quadratische Approx. von f im Pkt x: $H=H(f)(x)$

$f(x+v)=f(x)+\frac{1}{2}\langle v,Hv\rangle + r(v)$, mit $r(v)=o(\|v\|^2)$ linearer Term tritt nicht auf da x krit. Pkt

1. Sei H pos. def. $S:=\{v\in\mathbb{R}^n \mid \|v\|=1\}$ Einheitssphäre. S abgeschlossen + beschränkt $\Rightarrow S$ komp.

$v\mapsto\langle v,Hv\rangle$ ist stetig. $\Rightarrow \exists\, \mu:=\min\{\langle v,Hv\rangle \mid v\in S\}>0$.

Sei $v\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ bel. In "Polarkoord.": $v=\lambda\cdot\bar v$, $\bar v\in S$, $\lambda=\|v\|$.

$\langle v,Hv\rangle = \langle\lambda\bar v, H(\lambda\bar v)\rangle = \lambda^2\langle\bar v,H\bar v\rangle \geq \mu\cdot\lambda^2 = \mu\cdot\|v\|^2$.

$f(x+v)\geq f(x)+\frac{\mu}{2}\|v\|^2-|r(v)|$ $\qquad r(v)=o(\|v\|^2)\Rightarrow\exists\delta>0: |r(v)|\leq\frac{\mu}{4}\|v\|^2$

$f(x+v)\geq f(x)+\frac{\mu}{2}\|v\|^2-\frac{\mu}{4}\|v\|^2 = f(x)+\frac{\mu}{4}\|v\|^2 \quad \forall v\in B_\delta(0)$. $\geq f(x)$, $>f(x)$ für $v\neq 0$ ("striktes Minimum")

2. Wende 1. auf $-f$ an.

3.

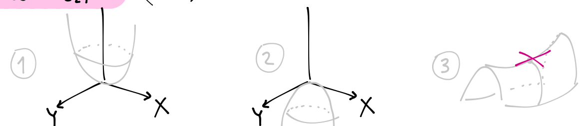
3. Sei H indefinit. $\Rightarrow \exists\, v,w \in S: \langle v, Hv\rangle > 0,\ \langle w, Hw\rangle < 0$. $f(x+t\cdot v) = f(x) + \frac{1}{2}\langle tv, H(tv)\rangle + r(tv) = f(x) + \frac{t^2}{2}\cdot\lambda + r(tv)$

$\exists\, \delta > 0: |r(tv)| \le \frac{\lambda}{4} t^2$. $\Rightarrow f(x+t\cdot v) \ge f(x) + \lambda \frac{t^2}{4} \underset{\substack{\text{für } t\neq 0 \\ |t|<\delta}}{>} f(x)$ kein lok. Max in x.

Ähnlich $f(x+t\cdot w) < f(x)$. $t \neq 0 \Rightarrow$ kein lok. Min in $x \Rightarrow$ kein lok. Extremum ■

Bsp: 1. $f(x,y) = c + x^2 + y^2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $\partial_1 f = 2x$, $\partial_2 f = 2y$. $(\nabla f) = (2x, 2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ ist der einzige krit. P

$H(f) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f & \partial_1\partial_2 f \\ \partial_2\partial_1 f & \partial_2^2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)$ pos. def. $\Rightarrow$ In $(0,0)$ hat f ein lok. Min.



"Sattelfläche"

2. $f = c - x^2 - y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ neg. def. $\Rightarrow$ lok. Max in $(0,0)$

3. $f = c + x^2 - y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indefinit. $\Rightarrow$

4. $f_1 = x^2 + y^3$ hat kein lok. Extremum. $H(f_1)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = H(f_2)(0,0)$ $\Rightarrow$ wenn weder pos/neg/indef $\Rightarrow$ man kann nichts sagen über Fkt!

$\underbrace{f_2 = x^2 + y^4}_{(0,0) \text{ einziger krit. Pkt.}}$ hat lok. Min in $(0,0)$

20/05/15

DER MITTELWERTSATZ

Notation: Sei $A(t)$ eine $m\times n$-Matrix, deren Komponenten stetige Fkten $a_{ij}: [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ sind.

$\int_{t_0}^{t_1} A(t)\,dt := (s_{ij})_{m\times n \text{ Matrix}}$ mit $s_{ij} := \int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(t)\,dt$.

SATZ (Mittelwertsatz) Sei $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar. Sei $x \in U$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, sd $\{x + t\cdot v \mid t \in [0,1]\} \subset U$. Dann gilt $f(x+v) - f(x) = \Big(\underbrace{\int_0^1 (Df)(x+t\cdot v)\,dt}_{m\times n}\Big)\cdot v$

Bew: $f = (f_1, \dots, f_m)$ $\quad g_i(t) = f_i(x+t\cdot v) \in \mathbb{R}$ $\quad g_i'(t) \underset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_j (\partial_j f_i)(x+t\cdot v)\cdot v_j$

$f_i(x+v) - f(x) = g_i(1) - g_i(0) \underset{\text{Fund. satz}}{=} \int_0^1 g_i'(t)\,dt = \int_0^1 \sum_j (\partial_j f_i)(x+t\cdot v)\, v_j\,dt = \sum \Big(\int_0^1 (\partial_j f_i)(x+t\cdot v)\,dt\Big)\cdot v_j$ ■

Vektorwertige Fkt / Kurve:

$v(t): [0,1] \to \mathbb{R}^m$ $\quad w := \int_0^1 v(t)\,dt$ $\quad \|w\|^2 = \langle w, w\rangle = \langle \int_0^1 v(t)\,dt, w\rangle = \int \langle v(t), w\rangle\,dt \le \int_0^1 \|v(t)\|\cdot\|w\|\,dt$

$= \|w\| \cdot \int_0^1 \|v(t)\|\,dt \Rightarrow \|w\| \le \int_0^1 \|v(t)\|\,dt \Rightarrow \left\|\int_0^1 v(t)\,dt\right\| \le \int_0^1 \|v(t)\|\,dt$

Korollar: (gleiche Vor. wie in Mittelw. satz) $M := \sup\{\|Df(x+t\cdot v)\| : t \in [0,1]\}$.

Dann: $\|f(x+v) - f(x)\| \le M \cdot \|v\|$

Bew: $\left\|\int_0^1 (Df)(x+t\cdot v)\cdot v\,dt\right\| \le \int_0^1 \|Df(x+tv)\|\cdot\|v\|\,dt \le \int_0^1 M\cdot\|v\|\,dt = M\cdot\|v\|\cdot\int_0^1 dt = M\cdot\|v\|$ ■

SATZ ÜBER IMPLIZITE FUNKTIONEN

sehr komplizierte Ausdrücke, nicht nur lin. Abb wie in LA

Motivation: Sei $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig par. diffbare Abbildung, $(x,y) \longmapsto F(x,y)$.

Ang. für jedes x $\exists$ genau ein y mit $F(x,y)=0$ man gibt x vor und will nach y lösen

Dann können wir def. $g(x) := y$ dieses eine, eind. y zu festgelegtem x $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Es gilt: $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$F(x, g(x)) = 0$. Wir sagen die Fkt g ist implizit durch die Gleichung $F(x,y)=0$ definiert.

Notation: $\frac{\partial F}{\partial y} := \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)$ – eine $m \times m$ Matrix

Bsp: $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $B: \mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}^m$. $F(x,y) := A(x) - B(y)$. Wir versuchen g explizit zu ermitteln:

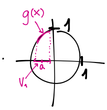
$0 = F(x,y) \Rightarrow By = A(x) \overset{?}{\Longrightarrow} y = B^{-1} \cdot A(x) \Rightarrow g(x) := B^{-1} \cdot A(x)$. Dafür muss aber B invertierbar sein!

$B = \frac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow$ <u>$\frac{\partial F}{\partial y}$ muss invertierbar sein!</u>

Weiteres erwarten wir, dass die Lösbarkeit von $F(x,y)=0$ abhängt vom gewählten Pkt $(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $F(a,b)=0$.

$(g(a) = b)$

Bsp: $F: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Die Lsgmenge $\{(x,y) \mid F(x,y)=0\}$ ist der Einheitskreis $x^2+y^2=1$.



Sei (a,b) ein Pkt auf dem Kreis, $F(a,b)=0$.

Fall 1: $b \neq 0$. Dann $\exists$ offene Umgebung $V_1 = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ um a und genau eine Fkt $g: V_1 \to \mathbb{R}$, sd

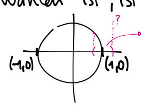
$F(x, g(x)) = 0$ $\forall x \in V$, und $g(a) = b$.

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$. $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 2b$ ist invertierbar, da $b \neq 0$.

Hier ist auch eine explizite Beschreibung von g leicht möglich: $x^2+y^2=1$ $y^2 = 1-x^2$ $y = \pm\sqrt{1-x^2} = g(x)$

Welches Vorzeichen für g zu wählen ist, ist durch das Vorzeichen von b bestimmt.

Fall 2: $b=0 \Rightarrow (a,b) \in \{(1,0), (-1,0)\}$



Egal wie klein V_1 gewählt wird, es $\nexists$ $g: V_1 \to \mathbb{R}$ mit $g(a) = b$ und $F(x, g(x)) = 0$ $\forall x \in V_1$.

$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 2 \cdot 0 = 0$ NICHT INVERTIERBAR!

DER BANACHSCHE FIXPUNKTSATZ

SATZ: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $A \subset V$ eine abg. Teilmenge. Sei $\phi: A \to A$ eine Abb., sd $\exists \lambda \in (0,1)$ mit

$\|\phi(f) - \phi(g)\| \leq \lambda \cdot \|f-g\|$ $\forall f,g \in A$. (ϕ ist also eine Kontraktion) Kontr. sind immer stetig!)

Dann besitzt ϕ genau einen $\underbrace{\text{Fixpunkt } f_0}_{\phi(f_0) = f_0} \in A$. der bewegt sich nicht

Bew: Sei $f^0 \in A$ irgendein Element. Setze $f^{k+1} = \phi(f^k)$, $k \geq 0$. Wir erhalten so eine Folge $(f^k) \subset A$

Beh: (f^k) ist eine Cauchy-Folge. $\|f^{k+1} - f^k\| = \|\phi(f^k) - \phi(f^{k-1})\| \leq \lambda \cdot \|f^k - f^{k-1}\| \leq \lambda^k \cdot \underbrace{\|f^1 - f^0\|}_{:= C}$

Für $l > k$: $\|f^l - f^k\| = \|\sum_{i=k}^{l-1}(f^{i+1} - f^i)\| \le \sum_{i=k}^{l-1}\|f^{i+1} - f^i\| \le \sum_{i=k}^{l-1} \lambda^i \cdot c \le \lambda^k c \sum_0^\infty \lambda^i = \frac{c\lambda^k}{1-\lambda} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Da V vollst. ist, $\exists f_0 = \lim_{k\to\infty} f^k$. A abg $\Rightarrow f_0 \in A$.

f_0 ist ein Fixpunkt: $f_0 = \lim f^{k+1} = \lim \phi(f^k) = \phi(\lim f^k) = \phi(f_0)$. Damit ist die Existenz nachgewiesen.

Eindeutigkeit: Wenn $\phi(f_0) = f_0$ und $\phi(f_1) = f_1$, dann $\|f_0 - f_1\| = \|\phi(f_0) - \phi(f_1)\| \le \lambda \cdot \|f_0 - f_1\| \Rightarrow \|f_0 - f_1\| = 0 \Rightarrow f_0 = f_1$

$\boxed{22/05/15}$ Sei $U \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$. $C_b(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ stetig u. beschränkt}\}$.

Prop: dieser Raum, versehen mit Supremumsnorm, ist Banachraum. $[(C_b(U, \mathbb{R}^m), \|\ \|_\infty)$ ist Banachraum$]$

Bew: Sei $(f_k) \subset C_b(U, \mathbb{R}^m)$ eine CF: $\varepsilon > 0\ \exists N : \|f_k - f_l\|_\infty < \varepsilon \quad \forall k, l \ge N$. $x \in U$: $\|f_k(x) - f_l(x)\|_{\mathbb{R}^m} \le \|f_k - f_l\|_\infty < \varepsilon$

$\Rightarrow (f_k(x)) \subset \mathbb{R}^m$ ist CF. $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ ist vollst. $\Rightarrow \exists f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Wir erhalten so eine Grenzfkt $f : U \to \mathbb{R}^m$.

$\|f - f_k\|_\infty \le \varepsilon \quad \forall k \ge N \ (l \to \infty)$. $\|f\|_\infty \le \|f - f_k\|_\infty + \|f_k\|_\infty \Rightarrow f$ beschränkt. $\|f - f_k\|_\infty \to 0 \Rightarrow f_k \xrightarrow{\text{glm.}} f$

$\xRightarrow{\text{SATZ}}$ f stetig. $\Rightarrow f \in C_b(U, \mathbb{R}^m)$.

SATZ (über implizite Funktionen)

Sei $U_1 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $U_2 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^m$, sei $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell diffbar. Sei $(a,b) \in U_1 \times U_2$ ein Pkt mit $F(a,b) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbar. Dann $\exists$ Umgebung $V_1 \subset U_1$ von a, $\exists$ Umg. $V_2 \subset U_2$ von b, sd $\exists!\ g : V_1 \to V_2$ mit

mxm-Matrix

1. $g(a) = b$ 2. $F(x, g(x)) = 0 \ \forall x \in V$ 3. g ist stetig partiell diffbar.

Bew: Plan: (I) Umformulierung d. Aufgabe $F(x,y) = 0$ zu einem Fixpktproblem

(II) Lösung d. Fixpktproblems mit Hilfe d. Banachschen Fixpktsatzes $\longrightarrow$ wir erhalten g.

(III) zz g ist stetig

(IV) zz g ist st. part. diffbar.

zu (I) Wir können oBdA annehmen, dass $(a,b) = (0,0)$. (sonst betrachte $\tilde{F}(x,y) := F(x+a, y+b)$. $\tilde{F}(0,0) = 0$.)

$B := \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ ist invertierbar. Def $G(x,y) = y - B^{-1}F(x,y)$. $G(0,0) = 0$. $\frac{\partial G}{\partial y} = 1_{m\times m} - B^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}$.

$\frac{\partial G}{\partial y}(0,0) = 1_{m\times m} - B^{-1} \cdot B = 0 \Rightarrow \exists$ Umg. $W_1 \subset U_1$ von $a = 0$, $\exists$ Umg. $W_2 \subset U_2$ von $b = 0$:

$\|\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)\| \le \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in W_1 \times W_2$ (verwendet: F st. part. diffbar)

Sei $r > 0$ so klein, dass $V_2 := \{y : \|y\| \le r\} \subset W_2$. $\exists$ Umg. $V_1 \subset W_1$ von $a = 0$ mit

$\sup_{x \in V_1} \|G(x,0)\| \le \frac{r}{2}$ ($G(0,0) = 0$, G stetig)

$x \in V_1$, $y, y_0 \in V_2$: $\|G(x,y) - G(x,y_0)\| \le \frac{1}{2} \cdot \|y - y_0\|$ (Kor. zum Mittelwertsatz) (*)

Für $y_0 = 0$: $\|G(x,y)\| \le \|G(x,y) - G(x,0)\| + \|G(x,0)\| \le \frac{1}{2}\|y\| + \frac{r}{2} \le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

Wir merken uns: $\|y\| \le r \Rightarrow \|G(x,y)\| \le r$ $(x \in V_1)$ (**)

$\underbrace{G(x,y) = y}$ $\Leftrightarrow y - B^{-1}F(x,y) = y \Leftrightarrow F(x,y) = 0$. Wir haben also die Aufgabe $F(x,y) = 0$ transformiert in ein Fixpktproblem. ■

zu (II) Wir betrachten den Banachraum $(\mathbb{R}^m, \|\ \|)$. $A := V_2 \underset{\text{abg}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$. $\phi : A \longrightarrow A \quad y \longmapsto G(x,y)$

$(**) \Rightarrow \phi(y) \in A$, wenn $y \in A$ $\qquad (*) \Rightarrow \phi$ ist eine Kontraktion. $\|\phi(y) - \phi(y_0)\| \overset{\leq}{\underset{=\lambda}{\tfrac{1}{2}}} \|y - y_0\|$

Banachscher Fixpktsatz $\Rightarrow$ zu $x \in V_1$ $\exists!$ $y_0 \in A$, sd $\phi(y_0) = y_0$, d.h. $G(x,y_0) = y_0$, d.h. $F(x,y_0) = 0$.

Wir definieren $g(x) := y_0$, $g: V_1 \longrightarrow V_2$. ■

zu (III) Wir betrachten den Banachraum $C_b(V_1, \mathbb{R}^m)$. $A := \{ f \in C_b(V_1, \mathbb{R}^m) : \|f\|_\infty \leq r \} \underset{\text{abg}}{\subseteq} C_b(V_1, \mathbb{R}^m)$

Def: $\phi : A \longrightarrow A \quad f \longmapsto \phi(f)$, wobei $\phi(f)(x) := G(x, f(x)) \quad x \in V_1$

$\phi(f)$ stetig, beschr $\Rightarrow \phi(f) \in C_b(V_1, \mathbb{R}^m)$. $\|\phi(f)\|_\infty = \sup_{x \in V_1} \{ \|\phi(f)(x)\|_{\mathbb{R}^m} \} = \sup \{ \|G(x, f(x))\| \} \overset{(**)}{\leq} r$, da $\|f(x)\| \leq r$

$\Rightarrow \phi(f) \in A$. ϕ ist eine Kontraktion: $f, f_0 \in A$. $\|\phi(f) - \phi(f_0)\|_\infty = \sup_{x \in V_1} \{ \|G(x, f(x)) - G(x, f_0(x))\| \}$

$\underset{(*)}{\leq} \frac{1}{2} \sup \{ \|f(x) - f_0(x)\| \} = \frac{1}{2} \|f - f_0\|_\infty$.

Fixpktsatz $\Rightarrow \exists!$ Fixpkt $f_0 \in A$, $\phi(f_0) = f_0$. $\quad f_0(x) = \phi(f_0)(x) = G(x, f_0(x)) \ \forall x \in V_1$.

Eindeutigkeit: $f_0 = g$. $f_0 \in A \subset C_b(V_1, \mathbb{R}^m) \Rightarrow f_0$ stetig. $\Rightarrow g$ stetig. ■

zu (IV) zz: g = diffbar in $x = 0$.

F diffbar $\Rightarrow F(x,y) = F(0,0) + (DF)(0,0) \cdot \binom{x}{y} + r \cdot (x,y)$, $\quad r(x,y) = o(\|(x,y)\|)$

$A := \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$. $(DF)(0,0) = (A \mid B) \quad (A \mid B) \cdot \binom{x}{y} = Ax + By \Rightarrow F(x,y) = Ax + By + r(x,y)$.

$0 = F(x, g(x)) = Ax + Bg(x) + r(x, g(x))$. $Bg(x) = -Ax - r(x, g(x))$. $g(x) = -B^{-1}Ax - \underbrace{B^{-1} r(x, g(x))}_{=: R(x)}$ (2) $\quad (g(0) = 0)$

zz: $R(x) = o(\|x\|)$, $x \longrightarrow 0$. $\frac{\|r(x, g(x))\|}{\|x\|} = \frac{\|(x, g(x))\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|r(x, g(x))\|}{\|(x, g(x))\|} \longrightarrow 0$

$\leq \frac{\|x\| + \|g(x)\|}{\|x\|} \cdot o(1)$

Ang. es gelingt zz $\exists$ Umg. $V_1' \subset V_1$ von 0 $\exists$ Konst. K: $\|g(x)\| \leq K \cdot \|x\|$ (1) $\Leftarrow$ stetigkeit von g

Dann: $\frac{\|r(x, g(x))\|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\| + K \cdot \|x\|}{\|x\|} \cdot o(1) = (1 + K) \cdot o(1) \longrightarrow 0$

Wir zeigen (1): $(2) \Rightarrow \|g(x)\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| + \|B^{-1}\| \cdot \underbrace{\|r(x, g(x))\|}_{\leq \varepsilon \cdot \|(x, g(x))\|}$ $\quad$! g stetig

$\|g(x)\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| + \|B^{-1}\| \cdot \varepsilon (\|x\| + \|g(x)\|)$.

$\|g(x)\| - \|B^{-1}\| \cdot \varepsilon \cdot \|g(x)\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| + \|B^{-1}\| \varepsilon \|x\|$.

Idee: wähle ε so, dass $\|B^{-1}\| \cdot \varepsilon = \frac{1}{2}$ d.h. setze $\varepsilon := \frac{1}{2\|B^{-1}\|}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \|g(x)\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|x\| \cdot (\|A\| + \varepsilon) \quad \Rightarrow \|g(x)\| \leq K \cdot \|x\|$. ■ $\quad$ wir haben (1) gezeigt $\Rightarrow$ diffbar in Pkt 0

27/05/15 $F(x,y)=0 \quad (a,b) \quad F(a,b)=0 \qquad F: U_1\times U_2 \to \mathbb{R}^m,\ U_1 \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n,\ U_2 \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$

$F(x,g(x))=0 \quad \forall x\in V.$

$$\underbrace{\det \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_{\substack{m\times m \\ \text{hat stetige Einträge}}}(a,b)}_{\text{stetig}} \overset{\substack{\text{also} \\ \text{inv.bar}}}{\neq} 0 \quad \Rightarrow \det \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0$$

auf einer kleinen offenen Umg. von (a,b).

Argument d. letzten Vorlesung ist auf dieser Umg. anwendbar und zeigt, dass g auf einer Umg. diffbar ist.

Warum ist g stetig diffbar? Kettenregel: $F(x,g(x))=0.\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x) = 0$

inv. Matrix ex. wie wir oben gesehen haben.

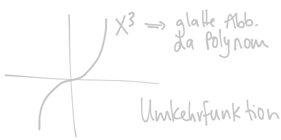
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x)}_{\text{hat stetige Einträge}} \Leftarrow\ = -\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))\right)^{-1}}_{\text{hat stetige Einträge}}\cdot\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))}_{\text{hat stetige Einträge}}$$

DER SATZ ÜBER UMKEHRBARE ABBILDUNGEN

Def: Sei $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, $f: U\to\mathbb{R}^m$. f heißt **C^r-Abbildung** $(r=0,1,2,\dots,\infty)$, wenn f r-mal stetig partiell diffbar ist.

$r=\infty$: $C^\infty \Rightarrow f$ ist **"glatt"**. $\quad r=0: C^0 \Rightarrow$ nur Stetigkeit.

Def: $f: U \overset{\subset\mathbb{R}^n}{\longrightarrow} V$, $V \underset{\text{offen}}{\subseteq}\mathbb{R}^n$, heißt **$C^r$-Diffeomorphismus**, wenn f eine Bijektion ist und f, f^{-1} beide C^r sind.



Bem: Wenn f $\underbrace{\text{Diffeomorphismus}}_{\text{hat nur reguläre Pkte}} \Rightarrow f$ Homöomorphismus.

Def: $f: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$, U offen $\mathbb{R}^n$. $x_0\in U$. x_0 ist ein **regulärer Punkt von f**, wenn $(Df)(x_0)$ vollen Rang hat.

$n\times n \to$ voller Rang $\to$ inv.bar $\to$ $\det\neq 0$

Sei $f: U\to V$ ein (C^1)-Diffeomorphismus. $f^{-1}\circ f = \mathrm{id}$. Kettenregel $\Rightarrow (Df^{-1})(f(x))\cdot(Df)(x) = (Df)(\mathrm{id}) = 1_{n\times n}$

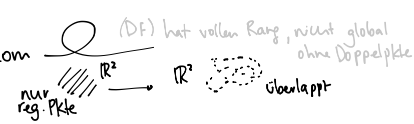
$\Rightarrow (Df)(x)$ invertierbar $\forall x\in U \Rightarrow$ Alle $x\in U$ sind reguläre Pkte eines Diffeom. $f: U\to V$.

SATZ (über umkehrbare Abb.) Sei $U \underset{\text{offen}}{\subseteq}\mathbb{R}^n$, $f: U\to\mathbb{R}^n$ C^1-Abb. Sei $b\in U$. Ist b ein regulärer Punkt von f, dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus um den Pkt b.

d.h. $\exists$ offene Umg $U'\subset U$ von b, sd $f(U') \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ und $f|: U'\to f(U')$ ein C^1-Diffeom. ist.

Bem: Die Umkehrung gilt nicht!

Wenn Abb. lok. Diffeom. an JEDEM Pkt ist $\not\Rightarrow$ Abb ist Diffeom



Bew: $a := f(b)$, $F(x,y) := x - f(y)$, $F: \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$. $F(a,b) = 0$ ✓

$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = -(Df)(b)$ ist invertierbar.

Satz über implizite Fkten $\Rightarrow$ $\exists$ offene Umg. $V_1 \subset \mathbb{R}^n$ von a, $\exists$ Umg $V_2 \subset U$ von b,

$\exists !$ C^1-Abb $g: V_1 \to V_2$ mit $g(a) = b$, $F(x, g(x)) = 0$ $\forall x \in V_1$.

$0 = F(x, g(x)) = x - f(g(x)) \Rightarrow f(g(x)) = x \quad \forall x \in V_1$.

$g(\underbrace{f(y)}_{\in V_1 ?})$ f stetig $\Rightarrow$ $\exists$ offene Umg. $V \subset V_2$ von b mit $f(V) \subset V_1$.

Beh: $f(V) = g^{-1}(V)$.
- $g^{-1}(V) \subset f(V)$ klar: $x \in V_1$, $g(x) \in V$. $x = f(\overbrace{g(x)}^{\in V}) \in f(V)$
- $f(V) \subset g^{-1}(V)$: Folgt aus der Eindeutigkeit: $\forall x \in V_1, \forall y, \bar{y} \in V_2: F(x,y) = 0 = F(x,\bar{y})$ $\Rightarrow y = \bar{y}$ (⊛)

Sei $y \in V$. $x := f(y)$. z.z.: $g(x) \in V$. $F(x,y) = x - f(y) = f(y) - f(y) = 0$.

$F(x, g(x)) = 0$.

(⊛) $\Rightarrow y = g(x) = g(f(y))$.

$U' := f(V) = g^{-1}(V)$ ist offen, da g stetig ist. $V \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} U'$ sind zueinander inverse C^1-Abb.

Bem: Ist f C^r, dann auch die Umkehrabb.!

IMMERSIONEN UND UNTERMANNIGFALTIGKEITEN DES $\mathbb{R}^n$

Def: Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen. Eine C^r-Abb. $(r \geq 1)$ $\varphi: T \to \mathbb{R}^n$ heißt (C^r-) Immersion, wenn $(D\varphi)(t): \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R}^n$ inj. ist $\forall t \in T$.

Bem: $\Rightarrow k \leq n$, Rang $(D\varphi)(t) = k$, $(D\varphi)(t)(e_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t) \in \mathbb{R}^n$. Die Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t)$ sind lin. unabh. $t = t_1 \dots t_k$

Aus LA: $\exists i_1, i_2, \dots i_k$: $\det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots \varphi_{i_k})}{\partial(t_1 \dots t_k)}(t) \neq 0$

Sei $\varphi: T \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, $\bar{t} \in T$. $\varphi_{\leq k} := (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ OBdA $i_1 = 1$, $i_2 = 2, \dots i_k = k$, sd $\det \frac{\partial(\varphi_1, \dots \varphi_k)}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(\bar{t}) \neq 0$.

$\frac{\partial \varphi_{\leq k}}{\partial t}(\bar{t})$ inv., d.h. $\bar{t}$ ein regulärer Punkt von $\varphi_{\leq k}$. Umkehrsatz $\Rightarrow$ $\varphi_{\leq k}$ ist ein lok. Diffeom. um $\bar{t}$.

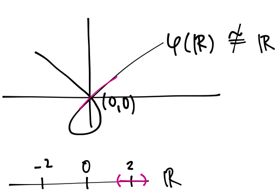
$\bar{t} \in U \subset T \underset{\varphi_{\leq k}^{-1}}{\overset{\varphi_{\leq k} \text{ Diffeom.}}{\rightleftarrows}} V \subset \mathbb{R}^k$ offen

$\varphi = (\varphi_{\leq k}, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n) \Rightarrow \varphi|: U \to \varphi(U)$ eine Bijektion $\Rightarrow$ sogar ein Homöomorphismus.

1 Variable $\Rightarrow$ Kurve

Bsp: $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ ist Immersion: $\varphi'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Kurve ist Immersion!

$\left.\begin{array}{l}\varphi(2) = \\ \varphi(-2) = \end{array}\right\} (0,0)$ Doppelpkt.

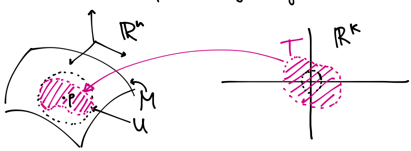


Trotzdem: $\varphi|: (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \xrightarrow{\cong} \varphi(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$

$\boxed{29/05/15}$ $\varphi: \underset{(t_1,\dots,t_k)}{\overset{\subset\mathbb{R}^k}{T}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Immersion $(k\le n)$

Letztes Mal: $\forall\, \bar t \in T\ \exists$ offene Umg. $U\subset T$ von $\bar t$, sd $\varphi|: U \xrightarrow{\cong} \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ Homöo. (Anwendung d. Umkehrsatzes)

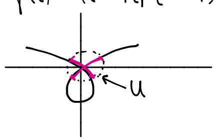
Def: Sei $M\subset\mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Wir nennen M eine **Untermannigfaltigkeit** von $\mathbb{R}^n$ wenn $\forall\, p\in M\ \exists$ offene Umgebung $U\subset\mathbb{R}^n$ von p, und $\exists$ Immersion $\varphi: T \xrightarrow{\text{Homöo.}} \varphi(T) = M\cap U$, $T \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^k$. $\dim M := k$.



$\varphi(0)=p$

Def: (U,φ) heißt **lokale Parameterdarstellung** von M um p, oder **lokale Karte** um p. $(t_1,\dots,t_k)$ heißen **lokale Koordinaten** bei p. $n-k$ ist die **Kodimension** von M. Untermfkten der Kodim 1 heißen auch **Hyperflächen**.

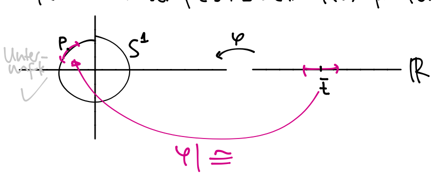
Bsp: ① $\gamma(t) := (t^3-4t,\ t^2-4) \in \mathbb{R}^2$, $\gamma: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ ist eine Immersion. $\underbrace{\gamma(\mathbb{R})}_{\text{Keine Untermfkt}} \subset \mathbb{R}^2$



$\nexists$ offene Teilmenge $\subset \mathbb{R}^1$.

② Kreis: $S^1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} \subset \mathbb{R}^2$. ($k=1$) $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (\cos t, \sin t)$.

$\varphi(\mathbb{R}) = S^1$. Sei $p\in S^1$. $\exists\, \bar t\in\mathbb{R}: \varphi(\bar t)=p$. Für $\varepsilon>0$ klein genug ist $\varphi|: (\bar t-\varepsilon, \bar t+\varepsilon) \longrightarrow \varphi((\bar t-\varepsilon, \bar t+\varepsilon))$ ein Homö.



Alternative lokale Beschreibungen

1. Als Graph: $p\in M$. $\varphi: T \xrightarrow{\cong} M\cap U'$, $U'\subset\mathbb{R}^n$, $\bar t \mapsto p$. $\exists$ offene Umgebung $U\subset T$ von $\bar t$, $V \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^k$:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, bend left, "\varphi_{\le k}\ \text{Diffeo.}"] \arrow[d, "\varphi|"'] & V \subset \mathbb{R}^k \arrow[l, bend left, "\varphi^{-1}_{\le k}"] \arrow[dl] \\ \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

$x := (x_1,\dots,x_k)\in V$. $(\varphi\circ\varphi^{-1}_{\le k})(x) = (x_1,\dots,x_k, \overbrace{g_{k+1}(x),\dots, g_n(x)}^{=:g(x)})$.

$M \underset{p}{\cap} U' = \varphi(U) = (\varphi\circ\varphi^{-1}_{\le k})(V) = \{(x,g(x)) \mid x\in V\} = \text{Graph}(g)$.

Alternative lokale Beschreibungen

2. Als Lösungsmenge eines Gleichungssystems: $f_1(x_1,\dots x_n) := x_{k+1} - g_{k+1}(x_1,\dots x_k)$
$\vdots$
$f_{n-k}(x_1,\dots x_n) := x_n - g_n(x_1,\dots x_k)$

$f_i(x_1,\dots x_n) = 0 \iff x_{k+i} = g_{k+i}(x_1,\dots x_k) \quad \forall i = 1,\dots n-k.$

$M \cap U'' = \{(x, g(x)) \mid x \in V\} = \{x \in U'' \mid f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}.$

$\frac{\partial(f_1,\dots f_{n-k})}{\partial(x_{k+1},\dots x_n)} = 1_{(n-k)\times(n-k)}$. Es folgt, dass: $\boxed{\mathrm{Rg}\,\frac{\partial(f_1,\dots f_{n-k})}{\partial(x_1,\dots x_n)} = n-k.}$ $(*)$

TANGENTIALRÄUME & NORMALENRÄUME

Def: $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M bei $p \in M$ ($M \subset \mathbb{R}^n$ Untermfkt), wenn $v = \gamma'(0)$, wobei $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ C^1, $\gamma(0) = p$. $T_pM :=$ Menge aller Tangentialvektoren an M bei p.

Def: $w \in \mathbb{R}^n$ heißt Normalenvektor auf an p, wenn $w \perp v$, $\forall v \in T_pM$.

$\varphi: T \longrightarrow M \cap U = \varphi(T)$ Imm., $0 \in T$, $\varphi(0) = p$. $V := \mathrm{span}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(0),\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(0)\right\} \Rightarrow \dim V = k.$

M lok. um $p = \{x \mid f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$ mit $(*)$. $W = \mathrm{span}\{(\nabla f_1)(p),\dots,(\nabla f_{n-k})(p)\}$. $(*) \Rightarrow \dim W = n-k.$

Beh: $V \subset T_pM$. $v = \sum \lambda_i \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(0)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. $\gamma(t) := \varphi((\lambda_1,\dots\lambda_k)\cdot t)$ $\gamma'(0) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum \lambda_i \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(0) = v.$

Beh: $W \subset N_pM$. zz: $(\nabla f_i)(p) \perp \gamma'(0)$, $\gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$, $\gamma(0) = p$. $f_i(\gamma(t)) = 0 \ \forall t$

$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_i(\gamma(t)) = \langle (\nabla f_i)(p), \gamma'(0) \rangle.$

Dimensionsargument: $V \perp W$ $\quad \overset{k}{V} \oplus \overset{n-k}{W} = \mathbb{R}^n$ $\quad V \oplus N_pM \supset V \oplus W = \mathbb{R}^n. \Rightarrow W = N_pM.$

$u \in T_pM$. $(\langle u\rangle + V) \oplus W \supset V \oplus W = \mathbb{R}^n. \Rightarrow \dim(\langle u\rangle + V) = k \underset{\dim V = k}{\Rightarrow} u \in V. \Rightarrow V = T_pM.$

$\Rightarrow$ Insb. ist T_pM ein Vektorraum!

Zusammenfassung:

1. T_pM ist ein k-dim VR mit Basis $\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0),\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(0)\right\}$
2. N_pM ist ein $(n-k)$-dim VR mit Basis $\{(\nabla f_1)(p),\dots,(\nabla f_{n-k})(p)\}$

LOK. EXTREMA UNTER NEBENBEDINGUNGEN

SATZ: $U \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $F: U \to \mathbb{R}$ C^1. $M \subset U$ eine k-dim. Untermfk, $p \in M$. (Wir suchen lok. Extrema von $F|_M$)
Hat $F|_M$ in p ein lok. Extremum, dann ist $(\nabla F)(p) \in N_pM$.

Bew: $0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \underbrace{F(\gamma(t))}^{\text{hat lok. Ex. in } p} = \langle (\nabla F)(p), \gamma'(0) \rangle$. $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(0) = p$.

Bem: $(\nabla F)(x) + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i (\nabla f_i)(p) = 0$ $\quad (\nabla F)(p) = (-\lambda_1)(\nabla f_1)(p) + \ldots + (-\lambda_{n-k})(\nabla f_{n-k})(p)$. $\lambda_i \in \mathbb{R}$ Lagrangesche Multiplikatoren.
$f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0$

03/06/15 **Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren:** $F: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, $M \subset U$, $\dim M = k$, $U \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$

$M = \{x \in U \mid f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0\}$ $\quad Rg = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = n-k$

Best. lok. Extr. von $F|_M$: $(*) \begin{cases} (\nabla F)(x) + \lambda_1 \nabla f_1(x) + \ldots + \lambda_{n-k} \nabla f_{n-k}(x) = 0 \\ f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$ Löse nach $(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-k})$

Bei jedem Lösungspunkt x muss dann individuell geprüft werden, ob tatsächlich ein lok. Max/Min vorliegt.
Dazu sind oft Kompaktheitsargumente hilfreich (zB Wenn M kompakt, dann besitzt $F|_M$ ein (globales) Min + Max)

Hilfsfkt: $G(x, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-k}) := F(x) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_{n-k} f_{n-k}(x)$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = (\nabla F)(x) + \lambda_1 \nabla f_1(x) + \ldots + \lambda_{n-k} \nabla f_{n-k}(x)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda_i} = f_i(x) \quad \text{Nebenbed.}$$

$$(*) \iff \nabla G = 0.$$

Bsp: Best. Min + Max der Fkt $F(x,y,z) = 5x + y - 3z$ auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit d. Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lsg: $\left.\begin{array}{l} f_1 = x + y + z \\ f_2 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{array}\right\} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ hat Rg 2 in jedem Pkt $(x,y,z) \in M$

$$G(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 5x + y - 3z + \lambda_1 \cdot (x+y+z) + \lambda_2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial G}{\partial x} = 5 + \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y} = 1 + \lambda_1 + 2y\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial z} = -3 + \lambda_1 + 2z\lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} 3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \underbrace{(x+y+z)}_{=0} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$$

$$4 + 2x\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = -x$$
$$2y\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda_1} = x + y + z = 0$$

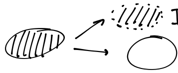
$$\frac{\partial G}{\partial \lambda_2} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 0^2 + (-x)^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wir erhalten genau 2 Lösungspunkte: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

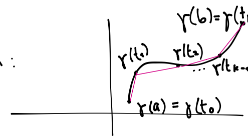
→ Bsp: Beide Punkte erfüllen $\nabla G = 0$. Hier ist M kompakt (da abg. + beschränkt) $\Rightarrow F|_M$ besitzt ein Max + ein Min.

$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\cdot\sqrt{2} \Rightarrow$ Max

$F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4\sqrt{2} \Rightarrow$ Min

Aufgabe Zettel 7:  Inneres / Äußeres

REKTIFIZIERBARE KURVEN UND IHRE BOGENLÄNGE



Sei $\gamma: I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Kurve. Wir versuchen, γ durch Polygonzüge zu approximieren:

Sei $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\}$ eine Partition von I.

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \,\middle|\, P\right\} =: S$$

Def: γ heißt **rektifizierbar**, wenn $S < \infty$, also wenn sup. existiert. In diesem Fall nennen wir S die **(Bogen) Länge** von γ und schreiben $L_I(\gamma) := S$.

Offensichtlich ist die Bogenlänge additiv: $a < c < b$. $L_{[a,b]}(\gamma) = L_{[a,c]}(\gamma) + L_{[c,b]}(\gamma)$

Prop: Ist γ C^1, dann ist γ rektifizierbar.

Bew: $M := \max\{\|\gamma'(t)\| : t \in I\}$. Kor. zum Mittelwertsatz $\Rightarrow \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq M \cdot |t_i - t_{i-1}|$

$\sum \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq M \cdot \sum |t_i - t_{i-1}| = M\cdot(b-a) \quad \forall P \Rightarrow \exists \sup$ ✓ ■

Sei $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve. Längenfkt: $\lambda(t) := L_{[a,t]}(\gamma)$, $\lambda: I \to \mathbb{R}$

Lemma: Ist γ C^1, dann ist λ C^1 und es gilt $\lambda'(t) = \|\gamma'(t)\|$

Bew: $\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| \leq \underbrace{L_{[t,t+h]}(\gamma)}_{=\lambda(t+h)-\lambda(t)} = \sup_P \underbrace{\sum \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}$

$$\sum \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(\tau)\,d\tau\right\| \leq \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'\| = \int_t^{t+h} \|\gamma'\|$$

$$\underbrace{\frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{h}} \leq \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h} \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\gamma'\| \overset{\text{MWS}}{=} \|\gamma'(\tau_h)\| \quad (\tau_h \in [t, t+h])$$

$h \to 0$: $\to \|\gamma'(t)\|$ $\qquad\qquad \|\gamma'(\tau_h)\| \to \|\gamma'(t)\|$

$\Rightarrow \lambda' = \|\gamma'(t)\|$ ■

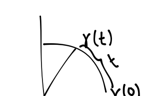
SATZ: γ C^1. Es gilt: $L_I(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(\tau)\|\,d\tau$.

Bew: $L_I(\gamma) = \lambda(b) = \lambda(b) - \lambda(a) = \int_a^b \lambda'(t)\,dt \overset{\text{Lemma}}{=} \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$ ■

Explizit: $L_I(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \ldots + \gamma_n'^2(t)}\,dt$

Bsp: Kreis: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \|\gamma'(t)\| = 1$.

$L_{[0,t]}(\gamma) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\|\,d\tau = \int_0^t 1 = t$.



Ist die Bogenlänge unabhängig von der Wahl der Parametrisierung? Antw: Nicht ohne zusätzl. Bedingungen!

Bsp: $I=[0,1]$ $\gamma_1(t)=t$

$\tilde{I}=[-1,1]$ $\gamma_2(t)=1-t^2$ $\longrightarrow [0,1]\subset\mathbb{R}^{1=n}$ $\Rightarrow \gamma(I)=\gamma[\tilde{I}]=[0,1]$

Aber $L(\gamma_1)=\int_0^1 |\gamma_1'(t)|\,dt = 1$ $\quad L(\gamma_2)=\int_{-1}^1 |\gamma_2'(t)|\,dt = 2$

$\neq$

Def: Eine C^1-Kurve $\tilde{\gamma}:\tilde{I}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ heißt **C^1-Reparametrisierung** von $\gamma: I\longrightarrow\mathbb{R}^n$, wenn $\exists$ C^1-Bijektion $\phi:\tilde{I}\longrightarrow I$ (**Parametertransformat.**), sd $\tilde{\gamma}=\gamma'\circ\phi$. ϕ ist entweder mon. wachsend oder mon. fallend.

$\phi(\tilde{a})=a$, $\phi(\tilde{b})=b$, $\phi'(t)\geq 0$ $\qquad$ $\phi(\tilde{a})=b$, $\phi(\tilde{b})=a$, $\phi'(t)\leq 0$

ϕ ist **orientierungserhaltend** $\qquad$ ϕ ist **orientierungsumkehrend**

Satz: Ist $\tilde{\gamma}$ eine C^1-Reparametrisierung von γ (C^1), dann gilt: $L_{\tilde{I}}(\tilde{\gamma})=L_I(\gamma)$

Bew: $L_I(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} \|\gamma'(\phi(t))\|\cdot\phi'(t)\,dt.$ (*)

Fall 1: ϕ orientierungserhaltend: (*) $= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \underbrace{\|\gamma'(\phi(t))\|\cdot|\phi'(t)|}_{\|(\gamma\circ\phi)'(t)\|=\|\tilde{\gamma}'(t)\|}\,dt = L_{\tilde{I}}(\tilde{\gamma})$

Fall 2: ϕ orientierungsumkehrend: $\int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}}\ldots(-|\phi'(t)|)$ $\quad$ $-$ und $-$ ist $+$ $\Rightarrow$ wieder das selbe ■

05/06/15 Parametrisierung nach der Bogenlänge:

Satz: Sei $\gamma:[a,b]=I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve mit Länge $\ell=L_I(\gamma)$. Ist γ eine Immersion, dann besitzt γ eine C^1-Reparametrisierung $\tilde{\gamma}:[0,\ell]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ nach der Bogenlänge, d.h. $L_{[0,t]}(\tilde{\gamma})=t$, $\forall\, 0\leq t\leq\ell$.

Bew: Wir betrachten die Längenfkt $\lambda: I\longrightarrow\mathbb{R}$ von γ. $\lambda'(t)=\|\gamma'(t)\|>0$. $\Rightarrow\lambda$ ist streng monoton wachsend.
$\Rightarrow\exists$ C^1-Umkehrfunktion $\phi=\lambda^{-1}:[0,\ell]\longrightarrow\mathbb{R}$. $\phi'(t)=\frac{1}{\lambda'(\phi(t))}>0$. $\Rightarrow\phi$ ist eine C^1-Bijektion. $\tilde{\gamma}:=\gamma\circ\phi$
$\|\tilde{\gamma}'(t)\|=\|\gamma'(\phi(t))\circ\phi'(t)\|=\frac{\|\gamma'(\phi(t))\|}{\|\lambda'(\phi(t))\|}=\frac{\|\gamma'(\phi(t))\|}{\|\gamma'(\phi(t))\|}=1$ $\qquad L_{[0,t]}(\tilde{\gamma})=\int_0^t\|\tilde{\gamma}'(\tau)\|d\tau=\int_0^t dt=t$ ■

Def: $\gamma: I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ heißt **stückweise C^r** $(1\leq r\leq\infty)$, wenn eine Partition $a=t_0<t_1<\ldots<t_k=b$, sd $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ C^r ist $\forall i$.

Man prüft leicht nach:

Prop: Ist γ stückweise C^1, dann ist γ rektifizierbar und es gilt $L(\gamma)=\sum_{i=1}^k L_{[t_{i-1},t_i]}(\gamma)=\sum_i\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\gamma'(t)\|dt$
$=\int_{t_0}^{t_k}\|\gamma'(t)\|\,dt.$

($t\mapsto\|\gamma'(t)\|$ ist zwar nicht stetig, aber doch Riemann-integrierbar).

KURVENINTEGRALE

Differential-1-Formen. $V := \mathbb{R}^n$. Dualraum $V^* := \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}) := \{A : V \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R}\}$. Sei $U \subset V$ offen.

<u>Def</u>: Eine **1-Form** auf U ist eine Abb. $\omega : U \to V^*$, $x \mapsto \omega(x) : V \xrightarrow{\text{lin.}} \mathbb{R}$.

<u>Bsp</u>: ① Ist $v : U \to V$ ein Vektorfeld, dann definiert v eine 1-Form durch $\omega(x) := \overbrace{\langle v(x), - \rangle}^{\in V^*}$

! ② Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, dann können wir in ① $v = \nabla f$ verwenden und erhalten

$(df)(x) := \omega(x) := \langle (\nabla f)(x), - \rangle$

$X_k : U \to \mathbb{R}$, $X_k(x_1,\dots,x_n) := x_k$. $\nabla X_k = e_k$. $(dX_k)(x)(\underset{\in V}{v}) = \langle (\nabla X_k)(x), v \rangle = \langle e_k, v \rangle = v_k$.

$dX_k = \langle e_k, - \rangle$.

Für $v = e_j$: $(dX_k)(x)(e_j) = \langle e_k, e_j \rangle = \delta_{kj}$. $\Rightarrow \{dX_1(x), \dots, dX_n(x)\}$ ist die duale Basis von V^* zu der Standartbasis $\{e_1,\dots,e_n\}$ von V.

<u>Bem</u>: In der Literatur schreibt man dx_k für dX_k.

Sei ω eine bel. 1-Form auf U. $x \in U$. $\Rightarrow \exists\, \lambda_1(x),\dots,\lambda_n(x) \in \mathbb{R}$: $\overbrace{\omega(x)}^{\in V^*} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x) \cdot dx_k$.

Wir erhalten Funktionen $\lambda_1,\dots,\lambda_n : U \to \mathbb{R}$.

<u>Def</u>: ω heißt **C^r-1-Form** $(0 \le r \le \infty)$ wenn alle $\lambda_k : U \to \mathbb{R}$ C^r-Fkten sind.

<u>Bsp</u>: ① $v : U \to V$ Vektorfeld. $v(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x) \cdot e_k$. $\omega(x) = \langle v(x), - \rangle = \langle \sum_k v_k(x) \cdot e_k, - \rangle = \sum v_k(x) \cdot \langle e_k, - \rangle$
$= \sum v_k(x)\, dx_k$.

② $f : U \to \mathbb{R}$ Fkt. $v = \nabla f$. $(df)(x) = \sum_{k=1}^{n} (\partial_k f)(x)\, dx_k$. (Differential von f)

! <u>Def</u>: Sei $\omega : U \to V^*$ eine stetige 1-Form und $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve mit $\gamma(I) \subset U$. Das **Kurvenintegral** von ω entlang γ ist

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \overbrace{\underbrace{\omega(\gamma(t))}_{\in V^*}\underbrace{(\gamma'(t))}_{\in V}}^{\in \mathbb{R}}\, dt$$

In Koordinaten: $\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, dx_k\right)(\gamma(t))\,(\gamma'(t))\, dt = \int_a^b \sum_k \lambda_k(\gamma(t))\, dx_k(\gamma'(t))\, dt$

$= \int_a^b \sum_k \lambda_k(\gamma(t)) \cdot \gamma_k'(t)\, dt = \int_a^b \langle \lambda(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\, dt$ wobei $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

<u>Bsp</u>: $\omega : U = \mathbb{R}^2 - \{0\} \to V = \mathbb{R}^2$, $\omega = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ $\quad \lambda_1(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ $\quad \lambda_2(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$

$m \in \mathbb{Z}$. $\gamma_m(t) = (\cos(mt), \sin(mt))$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma_m'(t) = (\overset{x}{-m\sin(mt)}, \overset{y}{m\cos(mt)})$. $\int_{\gamma_m} \omega = \int_0^{2\pi} \left(\lambda_1(\gamma_m(t)) \cdot (\gamma_m)_1'(t) + \lambda_2(\gamma_m(t)) \cdot (\gamma_m)_2'(t)\right) dt$

$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(mt)}{\sin^2(mt) + \cos^2(mt)} \cdot (-m\sin(mt)) + \frac{-\cos(mt)}{\sin^2(mt) + \cos^2(mt)} \cdot m\cos(mt) \right) dt = \int_0^{2\pi} (-m) = -2\pi m$

$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_m} (-\omega) = m$ ← **Windungszahl**

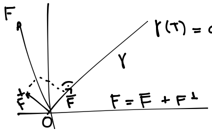
$(-\omega)$ ← **Windungsform**

Bem: In $\int_\gamma \omega$ wird ein Vektorfeld λ entlang von γ integriert. Man kann auch Funktionen $f: U \to \mathbb{R}$ ("Skalarfelder") entlang von γ integrieren, durch $\int_\gamma f \; ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$.
Wenn $f = 1$ konstant, dann $\int_\gamma ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = L(\gamma)$.

man nennt "ds" oft "Bogenelement"

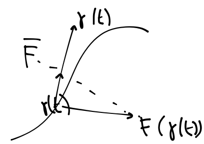
Physikalische Interpretation: $\omega(x) = \sum_{k=1}^n F_k(x) \, dx_k$, $F = (F_1, \dots, F_n)$ Kraftfeld. Ein Massepunkt (mit Masse 1) wird durch die Kraft F entlang von γ bewegt.

zB $\gamma(t) = a \cdot t$, $a = (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$. F konst. Arbeit = (Wegstrecke) $\cdot \|$ Kraftkomponente von F entlang $\gamma \|$



$$\int_\gamma \omega = \int_0^T \langle F, \gamma' \rangle dt = \int_0^T \langle F, a \rangle dt = T \cdot \langle F, a \rangle = T \cdot \langle \tilde{F} + F^\perp, a \rangle = T \cdot \langle \tilde{F}, a \rangle$$
$$= T \langle \frac{\|\tilde{F}\|}{\|a\|} \cdot a, a \rangle = \underbrace{T \|a\|}_{L(\gamma)} \cdot \|\tilde{F}\| = L(\gamma) \cdot \|\tilde{F}\|. \Rightarrow \text{Arbeit} = \int_\gamma \omega$$

gilt auch für bel. γ und bel. F.



$\boxed{10/06/15}$ $\omega = \sum_{i=1}^n \lambda_i dx_i$, $\lambda_i : U \to \mathbb{R}$, λ Vektorfeld

1-Form: $\omega : U \to V^*$. $\gamma : I = [a,b] \xrightarrow{C^1} V = \mathbb{R}^n$ Kurve. $\rightsquigarrow \int_\gamma \omega$

Invarianz des Kurvenintegrals unter Reparametrisierung:

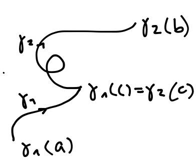
Prop: Sei $\omega : U \to V^*$ eine stetige 1-Form, $\gamma : I \to U$ eine C^1-Kurve und $\tilde{\gamma} : \tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}] \to U$ eine C^1-Reparametrisierung von γ, wobei die Parametertransformation $\phi : \tilde{I} \to I$ orientierungserhaltend sein soll. Dann gilt: $\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_\gamma \omega$.

Bew: $\phi(\tilde{a}) = a$, $\phi(\tilde{b}) = b$.

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \omega(\tilde{\gamma}(t)) \cdot (\tilde{\gamma}'(t)) \, dt \overset{\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi \text{ Kettenregel}}{=} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \omega(\gamma(\phi(t))) (\gamma'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)) \, dt$$
$$\overset{\text{Lin}}{=} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \omega(\gamma(\phi(t))) (\gamma'(\phi(t))) \cdot \phi'(t) \, dt$$
$$\overset{\text{Subst.regel}}{=} \int_a^b \omega(\gamma(\tau)) (\gamma'(\tau)) \, d\tau \overset{\text{Def.}}{=} \int_\gamma \omega$$

Additivität d. Kurvenintegrals

$\gamma_1 : [a,c] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [c,b] \to \mathbb{R}^n$, beide stückweise C^1, $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.

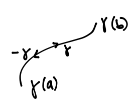


Def: (Konkatenation von γ_1 und γ_2)

$$t \in [a,b] : (\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c,b] \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \gamma_1 + \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, ist stückweise C^1 also insb. stetig

Def: $(-\gamma)(t) := \gamma(a + (b - t))$ $\quad (\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n)$



$-\gamma(a) = \gamma(b)$
$-\gamma(b) = \gamma(a)$

Es gilt: $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$, $\quad \int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$

EXAKTE 1-FORMEN

<u>Def</u>: Eine 1-Form $\omega: U \to V^*$ heißt **exakt**, wenn $\exists$ C^1-Fkt. $f: U \to \mathbb{R}$ mit $\omega = df$. Wir nennen f ein Potential für ω.

<u>Bsp</u>: $n=1$. $U=(a,b)$ offenes Intervall $\subset \mathbb{R}^1$. $\omega: U \xrightarrow{C^0} (\mathbb{R}^1)^*$, $\omega = \lambda_1(x)\,dx$ typische 1-Form

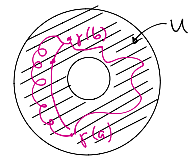
$x_0 \in (a,b)$, $x \in (a,b)$

$f(x) = \int_{x_0}^{x} \lambda_1(t)\,dt \rightsquigarrow f:(a,b) \to \mathbb{R}$.

$f' = \lambda_1 \Rightarrow \omega = \lambda_1 dx = f'\,dx = df$. $\Rightarrow$ Jede st. 1-Form auf einem offenen Intervall ist exakt.

<u>SATZ</u>: Ist ω exakt, dann gilt $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$, wobei f ein Potential für ω ist. Insb. ist $\int_\gamma \omega$ unabhängig vom Verlauf von γ und hängt nur von den Endpunkten $\gamma(a), \gamma(b)$ ab.

<u>Bew</u>: $\omega = df$. $\int_\gamma \omega = \int_\gamma df \overset{\text{Def}}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)\,dt$.



$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)\,dt \overset{\text{Fund. Satz}}{=} (f\circ\gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a)$

<u>Def</u>: Eine Kurve $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **geschlossen**, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$

<u>Korollar</u>: Ist γ geschlossen und ω exakt, dann ist $\int_\gamma \omega = 0$.

<u>Bew</u>: $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$

<u>Bsp</u>: Windungsform: $\omega: U = \mathbb{R}^2 - \{0\} \to (\mathbb{R}^2)^*$, $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$. γ geschlossen. Wir haben ausgerechnet: $\int_\gamma \omega = 2\pi \neq 0 \overset{\text{KOR}}{\Rightarrow} \omega$ ist <u>nicht exakt</u>

Das Vektorfeld $\lambda = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ besitzt kein Potential.

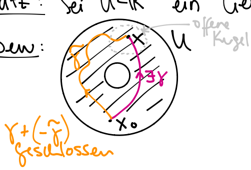
Gilt auch die Umkehrung des Satzes?

<u>Def</u>: $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn $\forall x,y \in U$ $\exists$ $\gamma: [a,b] \to U$ (stückweise C^1) mit $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$

<u>Def</u>: Eine nichtleere, offene, wegzusammenhängende Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ nennt man **Gebiet**.

<u>Satz</u>: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\omega: U \to V^*$ stetig. Dann gilt: ω exakt $\Leftrightarrow \int_\gamma \omega = 0$ $\forall$ geschlossenen, stückw. C^1-Kurven $\gamma: I \to U$

<u>Bew</u>:



$x_0 \in U$. Für $x \in U$: $f(x) := \int_{x_0}^{x} \omega := \int_\gamma \omega$ ist wohldef., da laut Vorauss. $\int_{\gamma \text{ geschl.}} \omega = 0$.

Beh: $f: U \to \mathbb{R}$ ist total differenzierbar.

$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} \omega - \int_{x_0}^{x} \omega = \int_x^{x+h} \omega = \int_\alpha \omega$, wobei $\alpha(t) = x + th$ ist, $t \in [0,1]$.

$\omega = \sum \lambda_i dx_i$, $\lambda_i : U \to \mathbb{R}$ stetig. $\int_\alpha \omega = \int_0^1 \Sigma \lambda_i (x+t \cdot h) \cdot h_i \, dt = \int_0^1 \langle \lambda(x+th), h \rangle dt$

$f(x+h) - f(x) - \langle \lambda(x), h \rangle = \int_0^1 \langle \lambda(x+th) - \lambda(x), h \rangle \, dt$

Wenn $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \|h\| < \delta$, $\|\lambda(x+th) - \lambda(x)\| < \varepsilon$ $\forall t$.

Für $\|h\| < \delta$: $|f(x+h) - f(x) - \langle \lambda(x), h \rangle| \leq \int_0^1 \|\lambda(x+h) - \lambda(x)\| \cdot \|h\| \, dt < \int_0^1 \varepsilon \cdot \|h\| \, dt = \varepsilon \|h\|$

Cauchy Schwarz

$\Rightarrow$ 1. f ist total diffbar

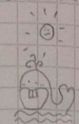
2. $\lambda = \nabla f$ $(\Rightarrow f \; C^1) \overset{\text{Satz}}{\Rightarrow} \omega = \Sigma \lambda_i dx_i = \sum (\partial_i f) \, dx_i = df$. $\Rightarrow \omega$ exakt.

15/06/15

GESCHLOSSENE 1-FORMEN

15/06

ohne Jessie und Pantea



Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n = V$ offen. Eine 1-Form $\omega : U \xrightarrow{C^1} V^*$ heißt **geschlossen**, wenn $\partial_j \lambda_i = \partial_i \lambda_j \quad \forall i,j$. $\quad (\omega = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i dx_i)$

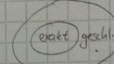
Beispiel: Windungsform: $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, $\omega : \mathbb{R}^2 - 0 \to (\mathbb{R}^2)^*$.

$$\partial_x \lambda_1 = \partial_x \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_y \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \partial_y \lambda_2$$

$\Rightarrow \omega$ ist geschlossen (aber nicht exakt.)

Proposition: Ist ω exakt, dann ist ω geschlossen. (C^1)

Beweis: Sei $\omega = df$, $f : U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$.



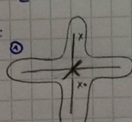
$\Rightarrow \lambda_i = \partial_i f \quad \forall i \Rightarrow \partial_j \lambda_i = \partial_j \partial_i f$

$\qquad\qquad = \partial_i \partial_j f = \partial_i \lambda_j$. (Satz v. Schwarz)

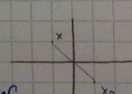
Die Frage, ob eine geschlossene 1-Form exakt ist, hat einen globalen und einen lokalen Aspekt. Wir werden sehen, dass eine geschlossene Form lokal (d.h. auf einer offenen Kugel) immer exakt ist.

Definition: $\underset{\text{offen}}{U \subset \mathbb{R}^n}$ heißt sternförmig, wenn $\exists x_0 \in U$, sodass $\forall x \in U$: $\{ xt + (1-t)x_0 \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1] \} \subset U$.

Beispiel: ①



② $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ nicht sternförmig.



③ offene Kugeln, $\mathbb{R}^n$ sind sternf.

Poincaré Lemma: Sei $\omega : U \xrightarrow{C^1} V^*$ geschlossen. Ist U sternförmig, dann ist ω exakt.

Bevor wir das P.L. beweisen, benötigen wir die Technik des "Differenzierens unter dem Integral."

$Q := \underbrace{[a,b]}_{x} \times \underbrace{[c,d]}_{y} \subset \mathbb{R}^2$. Sei $f: Q \to \mathbb{R}$ stetig. Für $y \in [c,d]$:

$$\phi(y) := \int_a^b f(x,y)\, dx.$$

$$\longrightarrow \phi: [c,d] \to \mathbb{R} \qquad \text{("Parameterintegral")}$$

Proposition: Existiert $\partial_y f$ und ist stetig auf Q, dann ist ϕ stetig differenzierbar und es gilt:

$$\phi'(y) = \int_a^b (\partial_y f)(x,y)\, dx$$

$\left(\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b f(x,y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx \right)$ "Differentieren unter dem Integral"

Beweis:

$$\phi(y+h) - \phi(y) = \int_a^b (f(x,y+h) - f(x,y))\, dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} f(x,y+th)\, dt \right) dx$$

$$\overset{\text{Fundamentalsatz}}{\underset{\text{Kettenregel}}{=}} \int_a^b \int_0^1 (\partial_y f)(x,y+th) \cdot h\, dt\, dx$$

$$\frac{\phi(y+h) - \phi(y)}{h} - \underbrace{\int_a^b (\partial_y f)(x,y)\, dx}_{\int_a^b \left(\int_0^1 (\partial_y f)(x,y)\, dt \right) dx} = \int_a^b \int_0^1 \left((\partial_y f)(x,y+th) - (\partial_y f)(x,y) \right) dt\, dx$$

Sei $\varepsilon > 0$. Q kompakt $\Rightarrow$ $\partial_y f$ gleichmäßig stetig auf Q.

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : |h| < \delta \Rightarrow |(\partial_y f)(x,y+th) - (\partial_y f)(x,y)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b], \forall t \in [0,1]$.

$|(*)| \leq \int_a^b \int_0^1 \varepsilon\, dt\, dx = \varepsilon(b-a)$.

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\phi(y+h) - \phi(y)) = \int_a^b (\partial_y f)(x,y)\, dx$.

Da $\partial_y f$ stetig ist, ist auch $\int_a^b (\partial_y f)(x,y)\, dx$ stetig in y $\Rightarrow \phi'$ stetig.

Notation: $\int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$ (falls existent.)

Ähnlich: $\int_{-\infty}^b$, $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^a + \int_a^{+\infty}$.

Beispiel:

Berechne $\int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx$!

$$F(t) := \left(\int_0^t e^{-x^2/2}\, dx \right)^2 \qquad F'(t) = 2 \cdot \left(\int_0^t e^{-x^2/2}\, dx \right) \cdot e^{-t^2/2}$$

$$= 2e^{-t^2/2} \int_0^t e^{-x^2/2}\, dx$$

$\rightarrow$

Subst. $x = ty$. $\frac{dx}{dy} = t$

$$= 2e^{-t^2/2}\cdot\int_0^1 e^{-t^2y^2/2}\, t\, dy = \int_0^1 \underbrace{e^{-(1+y^2)t^2/2}\, 2t\, dy}_{=\partial_t\left(-2\cdot\frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2}\right)}$$

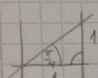
Diff. unter dem Integral!

$$= -2\cdot\frac{d}{dt}\underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2}\, dy}_{=:G(t)}$$

$F'(t) = -2G'(t) \Rightarrow \exists$ konst. C: $F(t) = -2G(t) + C$.

Wir ermitteln C: $t \to 0$ $(t > 0)$. $F(0) = 0$.

$$G(0) = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{atan} y\Big|_{y=0}^{y=1} = \operatorname{atan}(1) - \operatorname{atan}(0) = \frac{\pi}{4}$$



$$0 = -2\cdot\frac{\pi}{4} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^t e^{-x^2/2}\, dx\right)^2 = \frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2}\, dy.$$

$t \to \infty$: $\frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2}$ konvergiert gleichmäßig gegen konst. 0.

Gliedweises Integrieren $\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2}\, dy \xrightarrow{t\to\infty} \int_0^1 0\, dy = 0$.

$$\Rightarrow \left(\int_0^t e^{-x^2/2}\, dx\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}}$$

(Gausches Fehlerintegral $\to$ Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Fourier-Analysis...

Zurück zum Bew. d. Poincaré-Lemmas:

Beweis:

$\omega: U \to V^*$ geschlossen, U sternförmig.

$\omega = \sum \lambda_i\, dx_i$. $x \in U$: (o.B.d.A. sei $x_0 = 0$ das Sternzentrum)

$$f(x) := \int_0^1 \sum_{i=1}^n \lambda_i(\underline{tx})\, x_i\, dt$$

$\hookrightarrow U$ sternförmig!

$$(\partial_j f)(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \partial_j(\lambda_i(tx)\cdot x_i)\, dt.$$

Ketten- & Produktregeln, $\partial_j\lambda_i = \partial_i\lambda_j$

$$= \int_0^1 \partial_t(t\lambda_j(tx))\, dt \overset{\text{Fund.S.}}{=} t\lambda_j(tx)\Big|_{t=0}^{t=1} = \lambda_j(x)$$

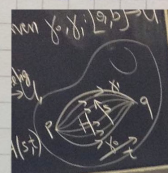
$\Rightarrow df = \omega$

Lokal: geklärt ✓

Globale- Aspekt:

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gegeben seien 2 Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ mit $p := \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$,

$q := \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$



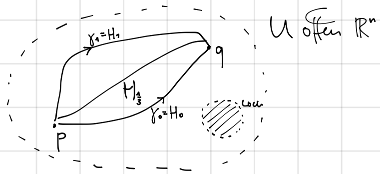
γ_0 ist **homotop** (in U) zu γ_1, wenn

$\exists H : [0,1] \times [a,b] \xrightarrow{\text{stetig}} U$ mit $H(0,t) = \gamma_0(t)$, $H(1,t) = \gamma_1(t)$ $\forall t$,

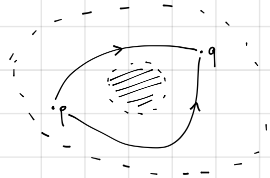
$H(s,a) = p$, $H(s,b) = q$ $\forall s$ $\quad H_s(t) := H(s,t)$

17/06/15

Homotop:



Nicht homotop:



H Homotopie. $H: [0,1] \times [a,b] \xrightarrow{\text{st.}} U$

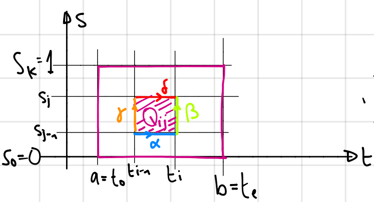
$H_s(t) = H(s,t)$, $H_0 = \gamma_0$, $H_1 = \gamma_1$, $H(s,a) = p \ \forall s$ $H(s,b) = q \ \forall s$

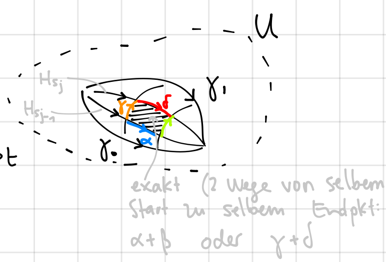
<u>Def:</u> Seien $\gamma_0, \gamma_1: [a,b] \to U$ stückweise C^1. Dann sind γ_0, γ_1 **stückw. C^1-homotop**, wenn $\exists$ "stückweise C^1"-Homotopie $H: [0,1] \times [a,b] \to U$ von γ_0 nach γ_1, dh H_s stückw. C^1 $\forall s$ und $H(\cdot, t)$ stückw. C^1.

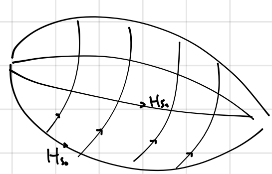
<u>Zur Erinnerung:</u> Das Lebesguesche Zahlenlemma: (Blatt 2?)
Sei (X,d) ein kompakter metr. Raum und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann $\exists \delta > 0: Y \subset X, \operatorname{diam}(Y) < \delta \Rightarrow \exists_i: Y \subset U_i$.

<u>HOMOTOPIESATZ</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen (aber nicht notw. sternförmig!) und $\omega: U \to V^*$ geschlossen. Sind $\gamma_0, \gamma_1: [a,b] \to U$ stückw. C^1-homotop, dann $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

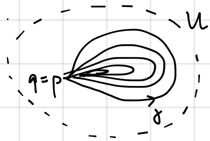
<u>Bew:</u> $U = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon(x)}(x)$ ($\Leftarrow U$ offen). $B_{\varepsilon(x)}(x)$ $\star$-förmig $+ \ \omega$ geschl. $\overset{\text{Poincaré Lemma}}{\Longrightarrow}$ ω ist auf $B_{\varepsilon(x)}(x)$ exakt $\forall x \in U$.
Sei $H: \underbrace{[0,1] \times [a,b]}_{=:Q} \to U$ eine stückw. C^1-Homotopie von γ_0 nach γ_1.
Leb. Zahlenlemma angewendet auf den komp. metr. Raum Q und die offene Überdeckung $\{H^{-1}(B_{\varepsilon(x)}(x))\}_{x \in U}$
$\Rightarrow \exists$ Partition $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$, sd $H(Q_{ij}) \subset B_{\varepsilon(x_{ij})}(x_{ij})$, wobei
$Q_{ij} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ $(\operatorname{diam}(Q_{ij}) < \delta \ \forall i,j)$
$\Rightarrow \omega$ ist auf einer offenen Umg. von $H(Q_{ij})$ exakt. $(\forall i,j) \Rightarrow \int_{\alpha+\beta} \omega = \int_{\gamma+\delta} \omega$ $= \int_\gamma \omega + \int_\delta \omega$ ($= \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega$) ■







Def: Eine geschlossene Kurve $\gamma:[a,b]\to U$ heißt **nullhomotop**, wenn γ homotop zur konstanten Abb. $c:[a,b]\to U$, $c(t)=p=q$ $\forall t$.

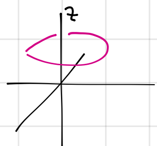


• Kurve lässt sich zu Pkt zusammenziehen
• Loch in Mitte verhindert zusammenziehen $\Rightarrow$ nicht nullhomotop

Bsp: In $\mathbb{R}^n$ ist jede geschlossene Kurve nullhomotop.

Def: U heißt **einfach zusammenhängend**, wenn U wegzusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve in U nullhomotop ist.

Bsp:
- $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend. ✓
- $\mathbb{R}^2-\{0\}$ ist <u>nicht</u> einf. zsh. ↯
- $\mathbb{R}^3-\{0\}$ ist einf. zsh. ✓
- $\mathbb{R}^3-\{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$ <u>nicht</u> einf. zsh. ↯



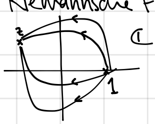
Korollar: Ist $\omega: U\to V^*$ geschl. und ist U einf. zsh., dann ist $\int_\gamma \omega = 0$ $\forall$ geschl. Kurven γ. Insb. ist ω global (auf ganz U) exakt.

Kurvenintegral über konst. Kurve $=0$

$\oint_\gamma \omega$ gescl. Kurve

Bem: Riemannsche Flächen, Überlagerungen. $(\log x)' = \frac{1}{x}$. $z\in\mathbb{C}$: $(\log z)'=\frac{1}{z}$. $\log x := \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

$\log z$ "$:=$" $\int_1^z \frac{du}{u}$ $u\in\mathbb{C}$.



Bsp: $n=3$. $U\subset\mathbb{R}^3$. U sei einf. zus.h. $\omega: U\to(\mathbb{R}^3)^*$, $\omega=\lambda_1 dx_1+\lambda_2 dx_2+\lambda_3 dx_3$. $\lambda:=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$

$\mathrm{rot}(\lambda)=(\partial_2\lambda_3-\partial_3\lambda_2,\ \partial_3\lambda_1-\partial_1\lambda_3,\ \partial_1\lambda_2-\partial_2\lambda_1)=0 \iff \omega$ geschl.

U einf. zus. $+$ $\mathrm{rot}(\lambda)=0 \overset{\text{Kor}}{\Rightarrow} \lambda$ hat ein Potential auf U.

DOPPEL- UND MEHRFACHINTEGRALE

$Q:=[a,b]\times[c,d]$ $\quad f: Q\xrightarrow{\text{stetig}}\mathbb{R}$. $\qquad \phi(y):=\int_a^b f(x,y)\,dx$, $\phi:[c,d]\to\mathbb{R}$

Lemma: ϕ ist stetig.

Bew: Sei $(y_k)\subset[c,d]$ eine konv. Folge, $y_k\to\eta$ $(k\to\infty)$. Zu zeigen: $\phi(y_k)\to\phi(\eta)$. Setze: $f_k(x):=F(x,y_k)$.

Q kompakt $\Rightarrow$ F glm. stetig auf Q. Sei $\varepsilon>0$. $\exists\,\delta>0$: $\|(x,y)-(x',y')\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon$.

$y_k\to\eta \Rightarrow \exists\, N$: $\|y_k-\eta\|<\delta$ $\forall k\geq N$. $\Rightarrow \forall k\geq N$: $|f(x,\eta)-f_k(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in[a,b]$.

$\Rightarrow f_k\to f(\cdot,\eta)$ gleichmäßig. Satz über gliedweises Integrieren $\Rightarrow \int_a^b f_k(x)\,dx \xrightarrow{k\to\infty} \int_a^b f(x,\eta)\,dx$ ∎

$= \phi(\eta)$