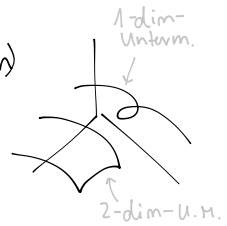


ANALYSIS II

Prof. Dr. BANAGL

SS 2015

1. Metrische u. topologische Räume, Kompaktheit u. Stetigkeit
2. Funktionen mehrerer Veränderlicher, deren Ableitungen, Extrema
3. Implizit def. Fktn, Diffeomorphismen (=glatte Abbildungen)
4. Transformationsregel für Integrale im \mathbb{R}^n (+ Determinanten)
5. Untermannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n , Integration über Untermnfkten (insb. Wegintegrale, Potentiale, Flächenintegrale)
6. Die klassischen Sätze von Green, Gauß u. Stokes.
7. Gewöhnliche Differentialgleichungen (mit nur 1 Variablen)



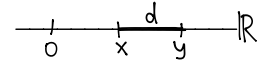
Bsp: $y' = y$ Lsg: $y = e^x$

METRISCHE UND TOPOLOGISCHE RÄUME

Motivation: $X = \mathbb{R}$ $x, y \in \mathbb{R}$. • $d(x, y) := |x - y| \rightsquigarrow d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

- $d(x, x) = 0$
- $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) = |x - y| = |x - z| + |z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$

sehr allgemein, keine üblichen Regeln für + / - ...



Abstrakt: Def: Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) , wobei X eine Menge ist und $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, sd gilt: $\forall x, y, z \in X$

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$
3. Δ -UG: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Metrik

Bem: Diese Axiome implizieren $d \geq 0$.

Bew: $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2 d(x, y) \Rightarrow 2 d(x, y)$ immer größer Null

Def: Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Eine **Norm** auf V ist eine Abb. $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$, sd $\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt **normierter VR**.

Dann ist (V, d) ein metrischer Raum mit $d(x, y) = \|x - y\|$.

Somit ist jeder normierte VR kanonisch ein metrischer Raum.

Bsp: $X = V = \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\langle x, x \rangle = \sum x_i^2$

euklid. inneres Produkt

$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ist eine Norm auf \mathbb{R}^n .

$\|x+y\| = (\sum (x_i+y_i)^2)^{1/2} \leq (\sum x_i^2)^{1/2} + (\sum y_i^2)^{1/2} = \|x\| + \|y\| \Rightarrow \mathbb{R}^n$ ist kanon. ein metr. R.
Minkowski (Anat)

$d(x, y) = (\sum (x_i - y_i)^2)^{1/2}$

All diese Überlegungen lassen sich übertragen auf bel. Euklid. VR $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

- Sei X eine Menge. $\mathcal{B}(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$.
 $f \in \mathcal{B}(X): \|f\|_\infty := \sup \{|f(x)| \mid x \in X\} < \infty$
 $\| \cdot \|$ ist eine Norm auf $\mathcal{B}(X)$ "Supremumsnorm". Insb. ist $\mathcal{B}(X)$ ein metr. Raum.

UMGEBUNGEN UND OFFENE MENGEN

Sei (X, d) ein metr. R, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $x \in X$.

Def: **Offene Kugel** $B_r(x) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$ $B =$ engl "ball"

Def: Eine Teilmenge $U \subset X$ ist eine **Umgebung** von $x \in U$ wenn $\exists \varepsilon > 0$ sd $B_\varepsilon(x) \subset U$.

$U \subset X$ ist **offen in X** , wenn $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U$



Bsp: $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist o in \mathbb{R}

- $(a, b]$ ist nicht offen in \mathbb{R}
- $(a, b) \times (c, d)$ ist offen in \mathbb{R}
- $B_r(x)$ sind selbst offen: $y \in B_r(x) \Rightarrow d(x, y) < r$. $\varepsilon := r - d(x, y) > 0$

Beh: $\bigcup_{z \in U} B_\varepsilon(z) \subset B_r(x)$. Bew: $d(z, y) < \varepsilon$. $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + d(y, x) = r$.

Prop: Sei (X, d) ein metr. Raum. Dann gilt:

- \emptyset, X sind offen in X
- U, V offen in $X \Rightarrow U \cap V$ offen in X
- $\{U_i\}_{i \in I}$ bel. Familie von offenen Mengen. Dann ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen in X .

Bew: 1. \emptyset : Niets zu prüfen. \checkmark enthält ja keinen Punkt X : zB $B_1(x)$.
 2. U, V offen. $x \in U \cap V$. U offen $\Rightarrow \exists \varepsilon_u > 0 : B_{\varepsilon_u}(x) \subset U$.
 V offen $\Rightarrow \exists \varepsilon_v > 0 : B_{\varepsilon_v}(x) \subset V$.
 $\varepsilon := \min(\varepsilon_u, \varepsilon_v) > 0$
 $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_u}(x) \cap B_{\varepsilon_v}(x) \subset U \cap V$.

3. $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in I : x \in U_{i_0}$. U_{i_0} offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$

HAUSDORFF: Def: Sei X eine Menge und \mathcal{T} eine Menge von Teilmengen von X . \mathcal{T} heißt **Topologie** auf

- X , wenn gilt:
- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
 - $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$
 - $\{U_i\}_{i \in I}, U_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

(X, \mathcal{T}) heißt **Topologischer Raum**. Eine Menge X hat viele Topologien!

17/04/15 Die Elemente von \mathcal{T} nennen wir die **offenen Mengen**.

Def: Eine Teilmenge $A \subset X$ ist **abgeschlossen**, wenn $X - A$ in X offen ist.

Bsp 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. $\mathcal{T}_d := \{\text{metrisch offenen Mengen}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ ist top. Raum.

"metrische Topologie"

(Bem: NICHT jeder top. Raum ist metrisierbar!)

2. Sei X eine bel. Menge. $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ Potenzmenge $\Rightarrow (X, \mathcal{P}(X) = \mathcal{T})$ ist top. Raum

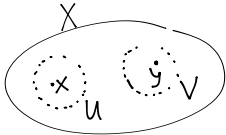
\mathcal{T} heißt "diskrete Topologie". In dieser Top. sind $\forall x$ alle Punkte $\{x\}, x \in X$ offen (und gleichzeitig auch abgeschlossen!)

3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$: $(a, b) \in \mathcal{T}_d$, $[a, b] \notin \mathcal{T}_d$, $(a, b] \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

4 Fälle: Menge kann offen, abg., beides oder keins sein!

Def: (X, \mathcal{T}) heißt **Hausdorffraum**, wenn $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U, V \subset X$ offen in $X, x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

"Trennungsaxiome" es gibt versch. Trennungsaxiome, aber das hier ist das wichtigste



$\mathcal{T} := \emptyset$ und X = minimal \rightarrow Hausdorffaxiom nicht erfüllt da 2 versch. Pkte immer in X liegen \Rightarrow kann man nicht trennen

Prop: Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffraum.

Bew: $x, y \in X, x \neq y, \varepsilon := \frac{1}{2}d(x, y) > 0, U := B_\varepsilon(x), V := B_\varepsilon(y) \Rightarrow U \cap V = \emptyset, U, V$ offen

UNTERRÄUME: 1. (X, d) ein metr. Raum, $Y \subset X$ Teilmenge. $d_Y: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}, d_Y(y, y') := d(y, y')$

$\Rightarrow (Y, d_Y)$ ist ein metr. Raum, d_Y nennen wir **induzierte Metrik**.

2. (X, \mathcal{T}) top. Raum, $Y \subset X$ Teilmenge. $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \text{ offen in } X\}$.

$\Rightarrow \mathcal{T}_Y$ ist eine Topologie auf Y . "induzierte T.". (Y, \mathcal{T}_Y) ist ein top. Raum.

Warnung: $\forall c \subset Y \subset X$. "V offen" muss präzisiert werden! Worin offen?

Bsp: $Y = (a, b] \subset X = \mathbb{R}, V = (c, b], a < c < b \Rightarrow V$ ist nicht offen in \mathbb{R} , aber in Y schon, denn

$(c, b] = (c, b+1) \cap (a, b]$. Notation: $V \text{ offen in } Y$.

Def: X top. Raum, $Y \subset X$ Teilmenge.

- $\overset{\circ}{Y} := \bigcup \{U \subset Y \mid U \overset{\circ}{\subseteq} X\} \Rightarrow \overset{\circ}{Y}$ ist offen in X . $\overset{\circ}{Y} \subset Y$. $\overset{\circ}{Y}$ ist die größte offene Menge, die in Y enthalten ist. $\overset{\circ}{Y}$ heißt Inneres von Y .
- $\bar{Y} := \bigcap \{A \supset Y \mid A \overset{\circ}{\subseteq} X\} \Rightarrow \bar{Y}$ ist abgeschlossen in X , $\bar{Y} \supset Y$. \bar{Y} ist die kleinste abg. Menge, die Y enthält. \bar{Y} heißt abgeschlossene Hülle von Y .

Def: Sei $Y \subset X$ eine Teilmenge. Y heißt dicht in X , wenn $\bar{Y} = X$.

Bsp: 1. $(a, b) \subset \mathbb{R}$. $(a, b) = [a, b]$. $[a, b] = (a, b)$.

2. $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Q}$ liegt also dicht in \mathbb{R} .

KONVERGENZ IN METRISCHEN RÄUMEN

Sei (X, d) ein metr. Raum

Def: Eine Folge $(x_n) \subset X$ konvergiert gegen $a \in X$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, a) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Mit anderen Worten: $x_n \rightarrow a \Leftrightarrow d(x_n, a) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

Bsp: * $X = \mathbb{R}^n$. $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$, $x_k \rightarrow a \in \mathbb{R}^n$. $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$ Koord. $a = (a_1, \dots, a_n)$.

$j=1 \dots n$: $|x_{kj} - a_j|^2 \leq \sum_{j=1}^n (x_{kj} - a_j)^2$, also $|x_{kj} - a_j| \leq \|x_k - a\|$.

$\Rightarrow x_k \rightarrow a \Leftrightarrow \forall j: x_{kj} \rightarrow a_j \quad (k \rightarrow \infty)$.

} Koordinatenweise betrachten!

Bem: Der Grenzwert a ist eindeutig durch (x_n) bestimmt.

SATZ: Sei (X, d) ein metr. Raum, $A \subset X$ Teilmenge. $A \overset{\circ}{\subseteq} X \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset A$ mit $x_n \rightarrow x \in X$ gilt: $x \in A$.

Bew: \Rightarrow) Sei A abg., $(x_n) \subset A$, $x_n \rightarrow x \in X$. $\exists x \in A$. Widerspruchsbeweis: Ang. $x \in X \setminus A$. $X \setminus A$ off. X .

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$. Widerspr. zu $x_n \rightarrow x$ $x_n \in A$.

\Leftarrow) $\exists x \in X \setminus A$. Widerspruchsbeweis: Ang., $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$.

$\Rightarrow \forall k=1, 2, 3, \dots : B_{\frac{\varepsilon}{k}}(x) \cap A \neq \emptyset$. $\exists x_k \in B_{\frac{\varepsilon}{k}}(x) \cap A$. $\Rightarrow x_k \rightarrow x$. $(x_k) \subset A$.

Voraussetzung $\Rightarrow x \in A$. Widerspr! \blacksquare

CAUCHYFOLGEN UND VOLLSTÄNDIGKEIT

Def: Sei (X, d) ein metr. Raum, $(x_k) \subset X$ eine Folge. (x_k) heißt Cauchyfolge, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N$:
 $d(x_k, x_l) < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N$.

Sei (x_k) konvergent, $x_k \rightarrow x$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N : d(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N$. $d(x_k, x_l) \leq d(x_k, x) + d(x, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall k, l \geq N$.

$\Rightarrow (x_k)$ ist eine Cauchyfolge. konv. Folge \Rightarrow Cauchyfolge.

in \mathbb{R}^n konv. jede Cauchyfolge.

Ans I: Für $X = \mathbb{R}$ gilt auch die Umkehrung. \rightsquigarrow Frage: Gilt die Umkehrung auch in allg. metr. Räumen?

Bsp: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mit der induzierten Metrik. $X = (\mathbb{Q}, d_a)$. Wähle $(x_k) \subset \mathbb{Q}$ so, dass $x_k \xrightarrow{\text{in } \mathbb{R}} \sqrt{2}$
 $\Rightarrow (x_k)$ ist eine Cauchyfolge in \mathbb{Q} , die in \mathbb{Q} nicht konvergiert \Rightarrow Antwort: i.A. Nein.

Def: Ein metr. Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Bsp: \mathbb{Q} nicht vollständig.

\mathbb{R}^n ist vollständig f.n. * \leftarrow siehe Bsp

DURCHMESSER (X, d) $A \subset X$ muss nicht abg. sein!

$$\text{diam}(A) := \sup \{d(a, a') \mid a, a' \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

A beschränkt $\Rightarrow \text{diam}(A) < \infty$ (d.h. $\in \mathbb{R}$)

SATZ: * (**Schachtelungsprinzip**) Sei (X, d) ein vollst. metr. Raum, $A_i \subset X$, $A_i \neq \emptyset$, A_i abg. in X $\forall i$,

$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ *absteigende Ketten*

Wenn $\text{diam}(A_i) \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$, dann $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{a\}$ $a \in X$.
Durchmesser geht $\rightarrow 0 \Rightarrow$ Durchmesser d. Mengen enthält genau 1 Punkt.

22/04/15 Def: Ein vollständiger, normierter VR heißt **Banachraum**.

Bsp: Der Euklid VR $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

* Bew: 1. Zunächst: $\bigcap A_i \neq \emptyset$. Wähle $a_i \in A_i$ $\forall i = 0, 1, 2, \dots$. Wenn $k, l \geq N$, dann $d(a_k, a_l) \leq \text{diam}(A_N) \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} 0$
 $\Rightarrow (a_k)$ ist eine Cauchyfolge. Da X vollst. ist, konv. diese Cauchyfolge, $a_k \in A_N$
 $a_k \rightarrow a \in X$. $(a_k)_{k \geq 0} \subset A_0$ & A_0 abgeschlossen $\Rightarrow a \in A_0$.

$$\left. \begin{array}{l} (a_k)_{k \geq 1} \subset A_1 \text{ \& } A_1 \text{ abg.} \Rightarrow a \in A_1 \\ \text{\& } \vdots \end{array} \right\} \Rightarrow a \in A_i \quad \forall i \Rightarrow a \in \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

2. Eindeutigkeit: Wenn $a, a' \in \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$, dann $d(a, a') \leq \text{diam}(A_i) \xrightarrow{\rightarrow 0 \forall i} 0 \Rightarrow a = a'$. \blacksquare

STETIGKEIT

Aus Ans 1 wissen wir: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Leftrightarrow \forall U \stackrel{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$ gilt: $f^{-1}(U) \stackrel{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$

Def: Seien X, Y top. Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abb.: f ist stetig $\Leftrightarrow \forall U \stackrel{\text{offen}}{\subset} Y$ ist $f^{-1}(U) \stackrel{\text{offen}}{\subset} X$.

Stetigkeit in einem Punkt $x \in X$ kann wie folgt definiert werden:

Def: $f: X \rightarrow Y, x \in X$. Wir sagen: f ist stetig in x (x fest), wenn \forall Umgebungen $V \subset Y$ von $f(x) \exists$ Umgebung $U \subset X$ von x mit $f(U) \subset V$. (f stetig $\Leftrightarrow f$ stetig in $x \quad \forall x \in X$.)

Es gilt: f stetig $\Leftrightarrow \forall A \stackrel{\text{abg.}}{\subset} Y$ ist $f^{-1}(A) \stackrel{\text{abg.}}{\subset} X$.

Spezialfall: metr. Räume:

SATZ: Seien X, Y metr. Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine Abb. Dann gilt: f stetig $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subset X: x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Bew: " \Rightarrow " Sei f stetig, $x_n \rightarrow x, \varepsilon > 0$. $V := B_\varepsilon(f(x))$. f stetig in $x \Rightarrow \exists$ Umg. $U \subset X$ von x mit $f(U) \subset B_\varepsilon(f(x))$.
 $x_n \rightarrow x \Rightarrow \exists N: x_n \in U, n \geq N. \Rightarrow f(x_n) \in f(U) \subset B_\varepsilon(f(x)). \Rightarrow d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

" \Leftarrow " \exists : f ist stetig. Sei $A \subseteq Y$. $\text{Urbild von } A$ \exists : $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X . Sei $(x_n) \subset f^{-1}(A)$ eine Folge mit $x_n \rightarrow x$.
 \exists : $x \in f^{-1}(A)$, d.h. $f(x) \in A$: $f(x_n) \in A$ das wissen wir Voraus. $\Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$. Folge liegt ganz in A und sie konv $\Rightarrow x$ muss auch in A liegen da A abg. $\Rightarrow f(x) \in A$. \blacksquare

Bem: " \Rightarrow " gilt in bel. top. Räumen X, Y , " \Leftarrow " gilt nicht unbedingt, wenn X nicht metrisierbar ist.

Prop 1: Seien X, Y, Z top. Räume. $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z$ Abb. f, g stetig $\rightarrow g \circ f: X \rightarrow Z$ stetig.

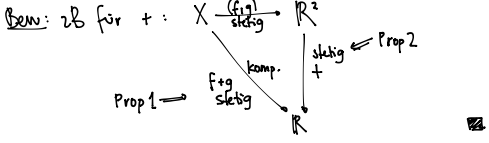
Bew: Sei U offen Z . g stetig $\Rightarrow g^{-1}(U)$ offen Y $\xrightarrow{f \text{ stetig}}$ $f^{-1}(g^{-1}(U))$ offen X .
 $\underbrace{f^{-1}(g^{-1}(U))}_{(g \circ f)^{-1}(U)}$ [abstrakter aber einfacher.] \blacksquare

Prop 2:

Stetigkeit von algebraischen Operationen: $\begin{matrix} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y \\ \text{quot: } \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x}{y} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} + \\ \text{quot} \end{matrix}} \right\} \text{ alle stetig.}$

Bew: zB für $+$ (für alle anderen Analog): $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2, (x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Konvergenz in \mathbb{R}^n kann man koordinatenweise verstehen.
 $\Rightarrow x_n \rightarrow x \wedge y_n \rightarrow y \xrightarrow{\text{Ansatz}} x_n + y_n \rightarrow x + y \quad \blacksquare$

Korollar: X, Y metr. Räume. $f, g: X \rightarrow Y$. f, g stetig $\Rightarrow f+g$ stetig / $f \cdot g$ stetig / $\frac{f}{g}$ stetig wenn $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$



Def: Eine Bijektion $f: X \rightarrow Y$ zw. top. Räumen heißt **Homöomorphismus**, wenn f und die Umkehrabb. f^{-1} beide stetig sind.

Dann sagen wir auch: X u. Y sind homöomorph. Notation: $X \cong Y$.

Bem: Ein Homöom. $f: X \rightarrow Y$ induziert eine Bijektion $T_x \rightarrow T_y$

Bsp: 1. $f = \text{id}: \mathbb{R}_d \rightarrow \mathbb{R}$ Bij. f stetig aber f^{-1} nicht stetig. \Rightarrow Die Forderung " f^{-1} stetig" in der Def. eines Homöom. ist nicht redundant!

2. $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. $f: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\frac{f(x)}{\|f(x)\|}} B_1(0)$

Es gilt: $f \circ f = \text{id} = f \circ f^{-1} \Rightarrow f$ ist Homöom.
 $B_1(0) \in \mathbb{R}^n$. $n=1: (-1, 1) \in \mathbb{R}$.

GLEICHMÄßIGE KONVERGENZ

Def.: Sei X eine bel. Menge u. Y ein metr. Raum. Funktionenfolge $f_n: X \rightarrow Y$. Wir sagen f_n **konv. gleichmäßig** gegen $f: X \rightarrow Y$ ($f_n \xrightarrow{g.m.} f$), wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ mit $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \forall n \geq N, \forall x \in X$.
gleiches $N \forall x$

SATZ: Seien X, Y metr. Räume. $f_n \xrightarrow{g.m.} f$ & f_n stetig $\forall n \Rightarrow f$ stetig.

24/04/15 SATZ: X top. Raum, Y metr. Raum. $f_n: X \rightarrow Y$ stetig $\forall n$ mit $f_n \xrightarrow{g.m.} f: X \rightarrow Y$. $\Rightarrow f$ stetig.

Bew.: Dies ist eine Verallgemeinerung des Entsprechenden Satzes aus Ana I. Ersetze dort Ausdrücke der Form $|f_n(x) - f(x)|$ durch $d(f_n(x), f(x))$

STETIGKEIT VON LINEAREN ABBILDUNGEN

SATZ: V, W normierte Vektorräume und $A: V \rightarrow W$ eine lineare Abb. Dann gilt:

A stetig $\Leftrightarrow \exists$ Konstante $C \geq 0: \|Ax\| \leq C \|x\| \quad \forall x \in V$. Norm in V Norm in W [Bei Lin Abb kann man Klammern weglass.]

Bew.: " \Rightarrow " Sei A stetig. $\varepsilon := 1$. Stetigkeit in $0 \Rightarrow \exists \delta > 0: \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < 1$. Setze $C := \frac{2}{\delta}$. Sei $x \in V - \{0\}$.
 $y = \frac{x}{C\|x\|} \Rightarrow \|y\| = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\|x\|} < \delta \Rightarrow \|Ay\| < 1$. $\|A \left(\frac{x}{C\|x\|} \right)\| \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{C\|x\|} \leq 1$ \square

" \Leftarrow " $\|A(x) - A(x')\| \leq C \|x - x'\| \Rightarrow$ Stetigkeit klar, denn zu geg. $\varepsilon \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C} \square$
 $\delta > 0 \Rightarrow C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$

Def.: Sei $A: V \rightarrow W$ linear & stetig. $\|A\| := \sup \{ \|Ax\| \mid \|x\| \leq 1 \} \in \mathbb{R}$. $\|Ax\| \leq C \cdot \|x\| \leq C$.
beschränkt $< \mathbb{R}$

"Operatornorm" Es gilt: $\|A \left(\frac{x}{\|x\|} \right)\| = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\| \leq \|A\| \quad \forall x \in V - \{0\} \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in V$.

KOMPAKTHEIT

Def.: Sei X ein top. Raum. Eine **offene Überdeckung** von X ist eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \subset X$, sd $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Def.: X heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. $\exists i_1, i_2, i_3, \dots, i_k \in I$ mit $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup U_{i_3} \cup \dots \cup U_{i_k}$.
endlich

Bem.: In der Def. von Kompaktheit nehmen wir nicht an, dass X ein Hausdorffraum sein muss!

Satz 7: $Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ Q ist kompakt.
← Quader vollst. ⇒ Schachtelungsprinzip ✓

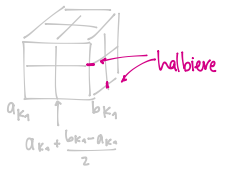
Bew: Sei $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von Q . Widerspruchsbeweis: Ang. \nexists endl. Teilüberdeckung. Induktiv konstruieren wir abgeschlossenen Teilquader $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \dots$ sd: 1. $\forall k: \nexists$ endl. Teilüd von Q_k 2. $\text{diam}(Q_{k+1}) = \frac{1}{2} \text{diam}(Q_k)$

Sei Q_k mit 1. & 2. schon konstruiert. Wir konstruieren $Q_{k+1}: Q_k = [a_{k1}, b_{k1}] \times \dots \times [a_{kn}, b_{kn}]$.

Wir erhalten 2^n Teilquader von $Q_k: Q_k^{(1)}, \dots, Q_k^{(2^n)} \subset Q_k$.

$\exists j$ sd $Q_k^{(j)}$ nicht durch endl. viele U_i überdeckt werden kann.

Setze $Q_{k+1} := Q_k^{(j)}$. $\Rightarrow Q_{k+1}$ erfüllt 1. & 2.



$\text{diam}(Q_k) \stackrel{2}{\leq} \frac{1}{2} \text{diam}(Q) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Schachtelungsprinzip $\Rightarrow \bigcap_{k=0}^{\infty} Q_k = \{a\}$.
genau 1 Pkt

$\exists i_0 \in I: a \in U_{i_0}$. U_{i_0} offen $\Rightarrow \exists \epsilon > 0: B_\epsilon(a) \subset U_{i_0}$

$\exists k_0: Q_{k_0} \subset B_\epsilon(a) \subset U_{i_0}$. Widerspruch!
Urspr. Ann: Jeder Quader kann nicht durch endl. viele Teil. überdeckt werden! Jetzt: Ein Q kann sogar von EINEM überdeckt werden! ✓

Satz 1: Sei X ein metr. Raum, $K \subset X$, K kompakt. Dann ist K beschränkt.

Bew: Wenn $K = \emptyset$, trivialerweise richtig. Sei $K \neq \emptyset$. Wähle $x_0 \in K$. $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(x_0)$ offene Überdeckung. Aha! Jetzt weiß ich: K komp $\Rightarrow \exists n_1, \dots, n_k: K \subset B_{n_1}(x_0) \cup \dots \cup B_{n_k}(x_0)$. Sei $N := \max\{n_1, \dots, n_k\} \Rightarrow K \subset B_N(x_0)$. \Rightarrow dist. von je 2 Pkten in K nie größer als N . \Rightarrow beschr.
U

Satz 2: Sei X top. Raum, kompakt, $A \stackrel{\text{abg.}}{\subset} X$. Dann ist A kompakt.

Bew: Sei $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i \stackrel{\text{offen}}{\subset} X$, eine offene Überd. von A . $X - A \stackrel{\text{offen}}{\subset} X \Rightarrow \{U_i\}_{i \in I} \cup \{X - A\}$ ist eine offene Überd. von X . X komp $\Rightarrow \exists$ endl. Teilüberd. $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup (X - A) \Rightarrow A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \Rightarrow A$ kompakt.
Komp. vererbt sich

Satz 3: Sei X ein Hausdorffraum. (zB ein metr. Raum). Sei $A \subset X$ ein Teilraum, A kompakt. Dann ist $A \stackrel{\text{abg.}}{\subset} X$.
top. R. mit Hdaxiom

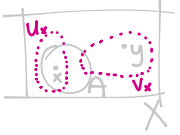
Bew: Wir zeigen $X - A \stackrel{\text{offen}}{\subset} X$. Jeder Pkt aus Kompl. hat offene Umg. die noch in Kompl. drinliegt

Sei $y \in X - A$. $\forall x \in A: \exists$ offene Umg. U_x von x , V_x von $y: U_x \cap V_x = \emptyset$.

$A \subset \bigcup_{x \in A} U_x$ offene Überd. A kompakt $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_k \in A: A \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$.

Setze $V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_k}$. end. Durchschn. von offenen Mengen \Rightarrow wieder offen $\Rightarrow V \stackrel{\text{offen}}{\subset} X$.

Es gilt: $\forall n A = \emptyset$, also $V \subset X - A, y \in V$.
U



Satz 4: (Heine-Borel). Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. A kompakt $\Leftrightarrow A$ abgeschlossen & beschränkt.
metr. Raum + Hausd. axiom beides erfüllt ✓

Bew: " \Rightarrow " Sei A komp. Satz 1 $\Rightarrow A$ beschr. Satz 3 $\Rightarrow A$ abgeschlossen.

" \Leftarrow " Sei A abg. & beschr.

$\hookrightarrow \exists$ abg. Quader $Q: A \stackrel{\text{abg.}}{\subset} Q$. Satz 2 (mit $X=Q$) $\Rightarrow A$ kompakt.
U

29/04/15

Satz 1

Seien X, Y top. Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abb., $K \subset X$. Dann: K kompakt $\Rightarrow f(K)$ kompakt.

"Stetigkeit erhält Kompaktheit"

Bew.: Sei $f(K) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} U_i$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. ($U_i \subset_{\text{offen}} Y$) $\Rightarrow K \subset \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^{-1}(U_i)$.

K komp. $\Rightarrow \exists i_1, i_2, \dots, i_n: K \subset f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_n}) \Rightarrow f(K) \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ ■

Satz 2 (Allg. Extremsatz)

Sei X ein komp. top. Raum und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Fkt. Dann nimmt f auf X ein Minimum und ein Maximum an.

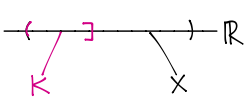
Bew.: Satz 1 $\Rightarrow f(X)$ ist kompakt. Heine-Borel $\Rightarrow f(X)$ ist abg. & beschränkt.

$f(X)$ beschränkt $\Rightarrow \exists m = \inf f(X) \in \mathbb{R}, \exists M = \sup f(X) \in \mathbb{R}$.

$f(X)$ abg. $\Rightarrow m, M \in f(X)$ d.h. $\exists x_m, x_M \in X$ sd $m = f(x_m), M = f(x_M)$. ■

Bem. zum Satz v. Heine-Borel: H-B gilt NICHT, wenn man \mathbb{R}^n durch einen bel. metr. Raum ersetzt!

ZB:

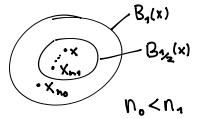


K abg. in X aber sicher nicht kompakt. beschränkt

Satz (Bolzano-Weierstraß)

Sei X ein kompakter metr. Raum. Dann hat jede Folge (x_n) in X eine konv. Teilfolge.

Bew.: Widerspruchsbeweis: Ang. (x_n) besitzt keine konv. Teilfolge. Sei $x \in X$. ^{x festhalten} Entwickle jede offene Umg. von x unendl. viele Folgenglieder, dann könnte man eine Teilfolge konstruieren, die gegen x konvergiert:



$\Rightarrow \exists$ offene Umgebung $U_x \subset X$ von x , die nur endl. viele Folgenglieder enthält.

Wir betrachten die offene Üb.: $X = \bigcup_{x \in X} U_x$. X komp. $\Rightarrow \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in X: X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. ^{x variiert} ^{endlich}

\Rightarrow Widerspruch. \Rightarrow Annahme falsch $\Rightarrow (x_n)$ besitzt konv. Teilfolge ✓ ■

Bem.: Die Umkehrung gilt auch.

GLEICHMÄßIGE STETIGKEIT

unabh. von ing. Pkt

Def. Seien X, Y metr. Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abb. f heißt gleichmäßig stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon \quad \forall x, x' \in X$.

Satz: Ist X komp. und $f: X \rightarrow Y$ stetig, dann ist f glm. stetig.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. $x \in X$. f stetig in $x \Rightarrow \exists \delta = \delta(x) > 0$ sd: $x' \in B_{\delta(x)}(x) \Rightarrow f(x') \in B_{\varepsilon}(f(x))$.

\rightsquigarrow offene Überdeck. $X = \bigcup_{x \in X} B_{\delta(x)}(x)$. X komp. $\Rightarrow \exists$ endl. Teilüberd.: $X = B_{\delta(x_1)}(x_1) \cup \dots \cup B_{\delta(x_n)}(x_n)$

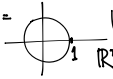
Setze $\delta = \min \{ \frac{\delta(x_1)}{2}, \dots, \frac{\delta(x_n)}{2} \} > 0$. Dann überprüft man mit Hilfe d. Δ -UG, dass $d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

PARTIELLE DIFFERENZIERBARKEIT

▷ Kurven in \mathbb{R}^n

Def: Eine **Kurve** in \mathbb{R}^n ist eine stetige Abb. $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

$$t \in I \quad f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \quad \text{Fktn } f_i: I \rightarrow \mathbb{R} \quad (i=1, \dots, n)$$

Bsp: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ Bild $f =$  Kreis

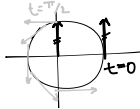
$f_1'(t)$ $f_2'(t)$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$. Bild $g =$ Bild f , aber als Kurven ist $g \neq f$! ("Reparametrisierung")

Def: Die Kurve f heißt **differenzierbar**, wenn alle Komponenten $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bar sind. Sei f nun eine diff'bare Kurve.

Dann heißt $(f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$ **Tangentenvektor** an f für Parameterwert $t \in I$.

 $f(t_0) = f(t_0)$ Kurve muss wenn inj. sein!
Vektoren an gleichem Pkt sind trotz unterschiedlich!

Bsp: $f(t) = (\cos t, \sin t)$ $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$ 

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und f eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Notation: $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ $\{e_1, \dots, e_n\}$ Standardbasis von \mathbb{R}^n .

Def: Sei $x \in U$. f heißt **partiell differenzierbar** in die i -te Koordinatenrichtung im Punkt x , wenn der Grenzwert

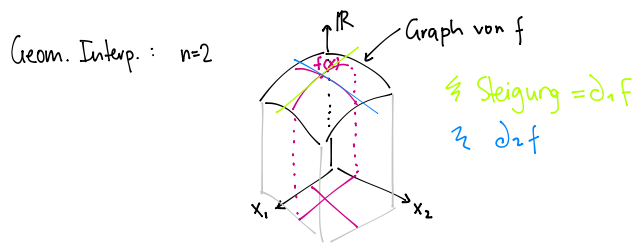
$$(\partial_i f)(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + te_i) - f(x)) \text{ existiert.} \quad \partial_i f = \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{df}{\partial x_i}$$

" i -te Partielle Abl."

Berechnung von part. Abl. $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$

Setze $f_i(t) := f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$. $f_i'(x_i) = \left(\frac{d}{dt} f_i \right) (x_i) = \lim_{t \rightarrow 0} (f_i(x_i + t) - f_i(x_i)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + te_i) - f(x))$
 $= (\partial_i f)(x)$.

⇒ die üblichen Rechenregeln (Ketten-, Produkt-, etc) gelten also analog auch für partielle Ableitungen.



06/05/15

Def: $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F: U \rightarrow \mathbb{R}$. f ist **partiell differenzierbar** auf U , wenn $(\partial_i f)(x)$ existieren, $\forall x \in U \ \forall i=1, \dots, n$.

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Beh: f ist part. diffbar auf $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

$\partial_1 f = \frac{d}{dx_1} \left(\frac{x_1 \cdot c}{x_1^2 + c^2} \right) = \frac{c \cdot (x_1^2 + c^2) - x_1 \cdot c(2x_1)}{(x_1^2 + c^2)^2} = \frac{c^3 + cx_1^2 - 2cx_1^2}{(\quad)^2} = \frac{c^3 - cx_1^2}{(x_1^2 + c^2)} = \frac{x_2^2 - x_1 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$ existiert!

$\frac{d}{dx_2}$ ebenso

Für $x=0$: $(\partial_1 f)(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\underbrace{f(1,0)}_0 - \underbrace{f(0,0)}_0 \right) = 0$ existiert ✓ Analog auch für 2te Ableitung $\partial_2 f = 0$

⇒ f ist part. diffbar auf gesamter Ebene

► $a_k := \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \in \mathbb{R}^2, k=1, 2, \dots$

$f(a_k) = \frac{1/k^2}{2/k^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0)$. ⇒ Obwohl $a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ & $f(a_k) \not\rightarrow f(0)$ ⇒ f ist nicht stetig im Punkt $x=0$!

► **partielle Diffbarkeit ⇒ Stetigkeit** nur stetig in jeweils 1 Richtung (1 Achse)

VEKTORFELDER

Def: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein **Vektorfeld** ist eine Abb. $V: U \rightarrow \mathbb{R}^n$!

$V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$. Wir sagen V ist part. diffbar, wenn alle $V_i, i=1, \dots, n$ partiell diffbar sind. ($V_i: U \rightarrow \mathbb{R}$)

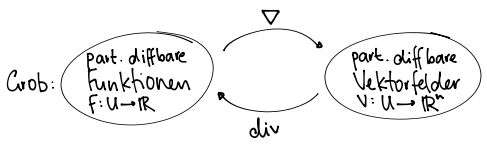
Def: Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ part. diffbar, U offen \mathbb{R}^n . **Gradient** von f : $\text{grad}(f) = \nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f)$. $V = \nabla f$ ist ein Vektorfeld auf U .

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. $\nabla f = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n)$ nach einander nach x_i dann x_j ableiten, der Rest wird 0 da x_i nur 1mal vorhanden etc

Def: Sei V ein Vektorfeld. $\text{div}(V) := \sum_{i=1}^n \partial_i V_i$, $\text{div}(V): U \rightarrow \mathbb{R}$ "Divergenz"

Bsp: $V = (x_1, \dots, x_n)$ $\text{div}(V) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n$.
 $\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 1$, ... (n-mal)

Formal: $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\text{div}(V) = \langle \nabla, V \rangle = \nabla \cdot V$



HÖHERE PARTIELLE ABLEITUNGEN

Wir sagen $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$) ist **zweimal partiell diffbar**, wenn $\forall i=1, \dots, n \ \partial_i f: U \rightarrow \mathbb{R}$ existieren u. partiell diffb sind.

⇒ $\partial_j(\partial_i f): U \rightarrow \mathbb{R}$.

Schreibweise: $\partial_j \partial_i f = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$. Induktiv: f k -mal partiell diffbar.

Satz (Schwarz): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar auf U . Dann gilt $\forall i, j \ \forall a \in U$:
 $\partial_j(\partial_i f)(a) = \partial_i(\partial_j f)(a)$.

Bew: $i \neq j$: $g(x,y) := f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, n)$. U offen $\Rightarrow g$ def. auf $(a_i - \epsilon, a_i + \epsilon) \times (a_j - \epsilon, a_j + \epsilon)$, $\epsilon > 0$ klein.

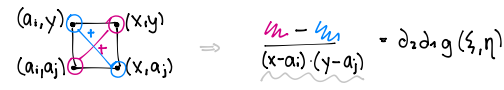
$C_y(x) := g(x, y) - g(x, a_j)$.

Mittelwertsatz angewendet auf $C_y(x)$: $\exists \xi$ zw. x und a_i , sd $(x - a_i) \cdot C_y'(\xi) = C_y(x) - C_y(a_i)$.

$C_y'(\xi) = \partial_x g(\xi, y) - \partial_x g(\xi, a_j)$.

Mittelwertsatz angewendet auf $y \mapsto \partial_x g(\xi, y)$. $\exists \eta$ zw. y u. a_j , sd $(y - a_j) \partial_x \partial_x g(\xi, \eta) = \partial_x g(\xi, y) - \partial_x g(\xi, a_j)$.

$(x - a_i) \cdot (y - a_j) \partial_x \partial_x g(\xi, \eta) = (x - a_i) \cdot (\partial_x g(\xi, y) - \partial_x g(\xi, a_j)) = (x - a_i) \cdot C_y'(\xi) = C_y(x) - C_y(a_i) = g(x, y) - g(x, a_j) - g(a_i, y) + g(a_i, a_j)$.



Durch Vertauschen der Rollen von x und y erhalt man $\hat{\xi}$ zw. x und a_i , $\hat{\eta}$ zw. y und a_j mit

$(x - a_i) \cdot (y - a_j) \partial_x \partial_x g(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = g(x, y) - g(x, a_j) - g(a_i, y) + g(a_i, a_j)$.

Für $(x - a_i)(y - a_j) \neq 0$: $\partial_x \partial_x g(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \partial_x \partial_x g(\xi, \eta)$. $(x, y) \mapsto (a_i, a_j) \Rightarrow (\hat{\xi}, \hat{\eta}) \mapsto (a_i, a_j)$ und $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \mapsto (a_i, a_j)$.

Da $\partial_x \partial_x g, \partial_x \partial_x g$ stetig $\Rightarrow \partial_x \partial_x g(a_i, a_j) = \partial_x \partial_x g(a_i, a_j)$
 $(\partial_j \partial_i f)(a) \quad (\partial_i \partial_j f)(a)$

Anwendung: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Frage: Wann hat ein Vektorfeld $V: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (st. part. diffbar) ein sog. Potential?

d.h. $\exists f: U \rightarrow \mathbb{R}$ (2-mal st. part. diffbar) mit $V = \nabla f$. Bilde Gradient d. Fkt und erhalte zw. Vektorfeld.

Zunächst: Kreuzprodukt $a, b \in \mathbb{R}^3$. $a \times b := \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = e_1 \cdot |a_2 a_3| - e_2 \cdot |a_1 a_3| + e_3 \cdot |a_1 a_2|$

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$

Man rechnet nach: $a \times b = -(b \times a)$. $(a \times b) \perp \langle a, b \rangle$

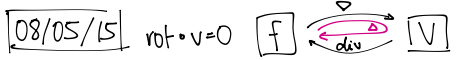


Def: Rotation (engl. "curl") eines Vektorfeldes $V: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($a = \nabla, b = V$)

$\text{rot } V := \nabla \times V = (\partial_2 V_3 - \partial_3 V_2, \partial_3 V_1 - \partial_1 V_3, \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1)$

Ist $V = \nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)$ dann $\text{rot } V = \text{rot}(\nabla f) = (\underbrace{\partial_2 \partial_1 f - \partial_1 \partial_2 f}_{=0 \text{ (Scharf)}} , \underbrace{\partial_3 \partial_1 f - \partial_1 \partial_3 f}_{=0} , \underbrace{\partial_1 \partial_2 f - \partial_2 \partial_1 f}_{=0})$

Wenn V ein Potential f hat, dann $\text{rot}(V) = 0$. (Notw. Bed. für die Existenz eines Potentials) Pot. \Leftrightarrow NUR wenn $\text{rot}(V) = 0$!!



Laplace-Operator $\Delta f := \text{div}(\nabla f)$ $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, U offen \mathbb{R}^n
 $= \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \dots + \partial_n^2 f$

Def: f heißt harmonisch, wenn $\Delta f = 0$ auf U .

TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT

f in der Nähe von x

Rest

Motivation: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. $A = f'(x) \in \mathbb{R}$. $r(\xi) = f(x+\xi) - f(x) - A \cdot \xi$. $f(x+\xi) = f(x) + A \cdot \xi + r(\xi)$.
 $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{r(\xi)}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi} - A \right) = f'(x) - A = 0 \Rightarrow \frac{r(\xi)}{\xi} \rightarrow 0$ für $\xi \rightarrow 0$.

Def: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abb. und $x \in U$. Wir sagen: f ist im Pkt x **total differenzierbar** (oder kurz "differenzierbar"), wenn eine lineare Abb. $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existiert, sd $f(x+\xi) = f(x) + A \cdot \xi + r(\xi)$ mit $\frac{r(\xi)}{\|\xi\|} = 0$ für $\xi \rightarrow 0$.

Bem: $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$. In den Standardbasen von $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ ist A eine $(m \times n)$ -Matrix $A = (a_{ij})$. $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$
 $A \cdot \xi = (a_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$

Satz: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \in U$. Sei f total diffbar in x . Dann gilt:

- f ist stetig in x
- f_i ist partiell diffbar in $x \ \forall i$ und $a_{ij} = ((\partial_j f_i)(x))$, $A = (a_{ij})$. Matrix ist eindeutig! (= gibt keine 2.)

Bew: 1. $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(x+\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} (f(x) + A \cdot \xi + r(\xi))$. Da A stetig gilt: $A \cdot \xi \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} A \cdot 0 = 0$
da sogar $r(\xi) \rightarrow 0$, was viel stärker ist ($\frac{r(\xi)}{\|\xi\|} \rightarrow 0$)

2. $f_i(x+\xi) = f_i(x) + \sum a_{ij} \xi_j + r_i(\xi)$. $\xi = h \cdot e_j$. $f_i(x+h e_j) = f_i(x) + a_{ij} h + r_i(h e_j)$.
 $(\partial_j f_i)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f_i(x+h e_j) - f_i(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (a_{ij} h + r_i(h e_j)) = \lim_{h \rightarrow 0} (a_{ij} + \frac{r_i(h e_j)}{h}) = a_{ij}$. \lim ex. u. = Matrixeintrag in i -te Zeile j -te Spalte

Bem: Die Matrix $A = (a_{ij}) = (\partial_j f_i(x))$ heißt **Funktionalmatrix / Jacobimatrix / Differential** von f im Pkt x .
 Schreibweisen: $(Df)(x) := J_f(x) := \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} := (\partial_j f_i)(x)$

Satz: (Hinreichende Bed. für totale Diffbarkeit) U offen \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, f sei part. diffbar. Sei $x \in U$.

∂f stetig in $x \Rightarrow f$ (total) diffbar in x

MWS: $\exists t_k \in [0,1]: f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)}) = \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(x^{(n-1)} + t_i \xi_i e_i)$

Bem: $x^{(0)} := x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 + \xi_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 + \xi_1 \\ x_2 + \xi_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, ..., $x^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1 + \xi_1 \\ \vdots \\ x_n + \xi_n \end{pmatrix} = x + \xi$.

Mittelwertsatz: $\exists t_i \in [0,1]: f(x^{(n)}) - f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(x^{(0)} + t_i \xi_i e_i)$

Teleskopsumme:

$$f(x+\xi) - f(x) = \underbrace{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}_{a_1} + \underbrace{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)})}_{a_2} + \dots + \underbrace{f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})}_{a_{n-1}} + \underbrace{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}_{a_n}$$

$$= \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(x^{(n-1)} + t_i \xi_i e_i) + \dots + \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(x^{(1)} + t_i \xi_i e_i)$$

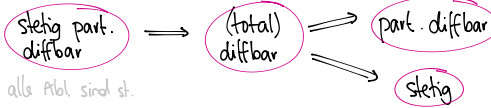
$$= \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(x^{(i-1)} + t_i \xi_i e_i) \cdot \xi_i = \sum_{i=1}^m a_i \xi_i + \sum_{i=1}^m ((\partial_i f)(x^{(i-1)} + t_i \xi_i e_i) - a_i) \xi_i$$

$$= \sum_{i=1}^m a_i \xi_i + r(\xi)$$

∂f stetig in $x \ \forall i \Rightarrow \xi \rightarrow 0: x^{(i-1)} + t_i \xi_i e_i \rightarrow x$. $(\partial_i f)(x^{(i-1)} + t_i \xi_i e_i) \rightarrow (\partial_i f)(x) = a_i$

$\frac{r(\xi)}{\|\xi\|} \leq \sum_{i=1}^m \frac{|\xi_i|}{\|\xi\|} |(\partial_i f)(x^{(i-1)} + t_i \xi_i e_i) - a_i| \rightarrow 0$

Zusammenfassend:



Umkehrungen nicht richtig!

alle Ableit sind st.

DIE ALLGEMEINE KETTENREGEL

Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$. Ist F in $x \in U$ total diffbar und g in $y = F(x)$ total diffbar, dann ist $g \circ F$ in x diffbar und es gilt:

$$D(g \circ F)(x) = \underbrace{(Dg)_y}_{\substack{= B \\ \text{übl. Matrixmultipl.}}} \cdot \underbrace{(DF)_x}_{= A}$$

Bew.: $\exists: D(g \circ F)(x) = B \cdot A$. $F(x+\xi) = F(x) + A\xi + r_F(\xi)$, $\frac{r_F(\xi)}{\|\xi\|} \rightarrow 0, \xi \rightarrow 0$. vgl Landaun: $r_F(\xi) = o(\|\xi\|)$.

* $\exists \delta > 0: \frac{\|r_F(\xi)\|}{\|\xi\|} \leq 1$ für $\|\xi\| < \delta$. $g(y+\eta) = g(y) + B\eta + r_g(\eta)$, $\frac{r_g(\eta)}{\|\eta\|} \rightarrow 0$ für $\eta \rightarrow 0$. $\eta = F(x+\xi) - F(x)$.

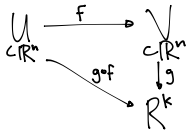
$$\begin{aligned}
 g(F(x+\xi)) &= g(F(x) + \eta) = g(y + \eta) = g(y) + B\eta + r_g(\eta) = g(F(x)) + B(A\xi + r_F(\xi)) + r_g(A\xi + r_F(\xi)) \\
 &= g(F(x)) + \underbrace{(BA)\xi}_{\text{gefällt uns}} + \underbrace{B r_F(\xi)}_{\text{gefällt uns sehr gut}} + \underbrace{r_g(A\xi + r_F(\xi))}_{\text{hässlicher Rest}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ bleibt: } \frac{r_g(\xi)}{\|\xi\|} \rightarrow 0 \text{ für } \xi \rightarrow 0 \quad \textcircled{1} \quad \frac{\|B r_F(\xi)\|}{\|\xi\|} \leq \|B\| \cdot \frac{\|r_F(\xi)\|}{\|\xi\|} \rightarrow 0$$

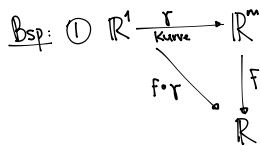
$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad r_g(\eta) &= \|\eta\| \cdot R(\eta), \text{ wobei } R(\eta) = 0, \text{ wenn } \eta \rightarrow 0. \Rightarrow r_g(A\xi + r_F(\xi)) = \|A\xi + r_F(\xi)\| \cdot R(A\xi + r_F(\xi)) \\
 &\leq (\|A\| + \|r_F(\xi)\|) \cdot \|R(A\xi + r_F(\xi))\| \\
 &\leq (\|A\| + \|\xi\|) \cdot \|\xi\| \text{ für } \|\xi\| \text{ klein genug.}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\|r_g(A\xi + r_F(\xi))\|}{\|\xi\|} \leq \frac{1}{\|\xi\|} \cdot (\|A\| + 1) \cdot \|\xi\|^2 \cdot R(A\xi + r_F(\xi)) = (\|A\| + 1) \cdot R(A\xi + r_F(\xi)) \rightarrow 0$$

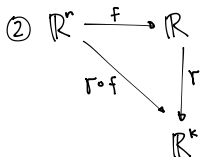
13/05/15



$$\text{Kettenregel: } D(g \circ F)(x) = (Dg)_y(F(x)) \cdot (DF)_x(x)$$



$$\begin{aligned}
 f \circ r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (f \circ r)'(t) &= (DF)_y(r(t)) \cdot (Df)_x(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1 f & \dots & \partial_n f \end{pmatrix}}_{1 \times m} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r_1'(t) \\ \vdots \\ r_n'(t) \end{pmatrix}}_{m \times 1} \\
 &= \sum_{i=1}^m \partial_i f(r(t)) \cdot r_i'(t) \\
 &= \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle
 \end{aligned}$$



$$D(r \circ f)(x) = (Dr)_y(f(x)) \cdot (Df)_x(x) = \begin{pmatrix} r_1'(f(x)) \\ \vdots \\ r_n'(f(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) & \dots & \partial_n f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1'(f(x)) \partial_1 f(x) & \dots & r_1'(f(x)) \partial_n f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n'(f(x)) \partial_1 f(x) & \dots & r_n'(f(x)) \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

ALLGEMEINE RICHTUNGSABLEITUNGEN

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine diffbare Fkt, $x \in U$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|=1$, ein Richtungsvektor.

Def: Die Richtungsableitung von f im Pkt x in Richtung v ist der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x+tv) - f(x))$
 Spezialfall: $v=e_i \Rightarrow \partial_{e_i} = \partial_i$
 $= (\nabla f)(x)$
 $= \left(\frac{d}{dt} f(x+tv) \right) \Big|_{t=0}$

Satz: f diffbar $\Rightarrow \partial_v f$ existiert und es gilt $\partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$.

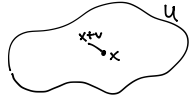
Bew: $f(t) = x + t \cdot v$ $\gamma'(t) = v$
 $\frac{d}{dt} f(x+tv) = \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \stackrel{\text{Kette}}{=} \langle \nabla f(x), \gamma'(t) \rangle = \langle \nabla f(x), v \rangle \quad \blacksquare$

TAYLOR ENTWICKLUNGEN

U offen \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ -mal stetig partiell diffbar. Sei $x \in U$ ein Pkt ("Mittelpunkt").

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, sd die Strecke $\xi x + t \cdot v$ $\{t \in [0,1]\}$ ganz in U liegt

$g(t) := f(x + t \cdot v)$, $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. $g(t)$ ist $(k+1)$ -mal st. diffbar (wg. Vorr.).



Satz von Taylor (Anw.) mit Mittelpunkt $t=0$ mit Lagrangescher Form d. Restglieds $\Rightarrow \exists \xi \in [0,t]$:

$$g(t) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} g^{(m)}(0) \cdot t^m + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\xi) t^{k+1}$$

Für $t=1$: $f(x+v) = g(1) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} g^{(m)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\xi)$ $\xi \in [0,1]$

Wir berechnen die $g^{(m)}(t)$: $g'(t) = \langle \nabla f(x+tv), v \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x+tv) \cdot v_i$
 $g''(t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} (\partial_i f)(x+tv) \right) \cdot v_i = \sum_{i_1, i_2=1}^n (\partial_{i_1} \partial_{i_2} f)(x+tv) \cdot v_{i_1} \cdot v_{i_2}$
 \vdots

$$\text{Induktiv: } g^{(m)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} f(x+tv) \cdot v_{i_1} \dots v_{i_m}$$

Binomischer Lehrsatz: $(\lambda_1 + \lambda_2)^m = (\lambda_1 + \lambda_2) \dots (\lambda_1 + \lambda_2) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^2 \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_m}$

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m} \binom{m}{\alpha} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \cdot \lambda_1^{\alpha_1} \cdot \lambda_2^{\alpha_2}$$

Verallgemeinerung für bel. n : $\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_m} = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^m = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n}$

"Multinomialer Lehrsatz"

Bew: Induktion nach n . $n=2$ ist der binom. Lehrsatz. $\left((\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) + \lambda_n \right)^m = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} (\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})^{\alpha_1} \lambda_n^{\alpha_n}$
 (eine Zahl) (2. Zahl)

Multi-Index Notation: $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$ $v^\alpha := v_1^{\alpha_1} \dots v_n^{\alpha_n}$
 $\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$ $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}$

$$g^{(m)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} f)(x+tv) \cdot v_{i_1} \dots v_{i_m} \stackrel{\text{multi-Index}}{=} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x+tv) \cdot v^\alpha$$

Wir setzen in (*) ein: $f(x+v) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x) \cdot v^\alpha + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x+\xi v) \cdot v^\alpha$

Ordnung von α $= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \cdot v^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(\partial^\alpha f)(x+\xi v)}{\alpha!} \cdot v^\alpha$ Taylor-Entwicklung von f im Mittelpunkt x ell $\xi \in [0,1]$

Beh: $f(x+v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \cdot v^\alpha + o(\|v\|^k)$ Restglied $\rightarrow 0$ $f(x+v) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \cdot v^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\partial^\alpha f)(x+\xi v)}{\alpha!} \cdot v^\alpha$
 $= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \cdot v^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \left((\partial^\alpha f)(x+\xi v) - (\partial^\alpha f)(x) \right) \cdot v^\alpha$
 $\rightarrow 0$ wenn $v \rightarrow 0$ da $\partial^\alpha f$ stetig.

$|v^\alpha| = |v_1^{\alpha_1} \dots v_n^{\alpha_n}| \leq \|v\|^{\alpha_1} \dots \|v\|^{\alpha_n} = \|v\|^{\sum \alpha_i} = \|v\|^{|\alpha|} = \|v\|^{|\alpha|}$
 $\frac{|v^\alpha|}{\|v\|^k} \leq 1$ für v klein genug

Spezialfälle ① Approximation 1. Ordnung ("lineare Approx."): $k=1$

$f(x+v) = f(x) + \langle \nabla f(x), v \rangle + o(\|v\|)$

② Approx. 2. Ordnung ("quadratische Approx."): $k=2$. $f(x+v) = f(x) + \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(x) v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\partial_i \partial_j f)(x) v_i v_j + o(\|v\|^2)$
 $= f(x) + \langle \nabla f(x), v \rangle + \frac{1}{2} \langle v, H(f) v \rangle + o(\|v\|^2)$

wobei $H(f) = (\partial_i \partial_j f)(x)$ eine symm. $n \times n$ -Matrix. "Hesse-Matrix" von f im Pkt x "
 ↓
 Satz v. Schwarz

15/05/15

LOCALE EXTREMA

U offen \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

DEF: Die Fkt f besitzt im Pkt x ell ein lokales $\left\{ \begin{matrix} \text{Max?} \\ \text{Min?} \end{matrix} \right\}$, wenn \exists Umgebung $V \subset U$ von $x: f(x) \stackrel{?}{=} f(y) \forall y \in V$.

↓
 "lokales Extremum" = relative Extrema



DEF: Sei f partiell diffbar. x ell heißt **kritischer Punkt** von f , wenn $(\nabla f)(x) = 0$.

SATZ (Notwendige Bedingung für lok. Extrema)

Besitzt f in x ell ein lok. Extremum, dann ist x ein kritischer Punkt von f .

Bew: Wir setzen $g_i(t) = f(x+t \cdot e_i) \Rightarrow (\partial_i f)(x) = g_i'(0) \rightarrow g_i: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, ϵ ex da U offen, $t=0$ aus Intervall
 $\Rightarrow g_i(0) = f(x)$, $\frac{f(x+te_i) - f(x)}{t}$
 f habe in x ein lok. Extremum.
 $\Rightarrow g_i$ hat in $t=0$ ein lok. Extr.

Ana1 $\Rightarrow g_i'(0) = 0 \Rightarrow (\partial_i f)(x) = 0$. Da i bel gilt es $\forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow (\nabla f)(x) = 0$.

Bem: Wir wissen aus Ana1, dass diese notw. Bed NICHT hinreichend ist! \Rightarrow Wir suchen nach hinr. Bed. \cup

Sei H eine reelle, symmetrische $n \times n$ -Matrix (zB die Hesse-Matrix $H = H(f)$)

Def: 1. H heißt **positiv definit**, wenn $\langle v, Hv \rangle > 0$ ist $\forall v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

2. — " — **negativ definit**, wenn $-H$ positiv definit ist

3. — " — **indefinit**, wenn $\exists v, w \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, sd $\langle v, Hv \rangle > 0$ und $\langle w, Hw \rangle < 0$.

quadr. Form

} gibt Matrizen die keins der 3 sind !!

aus LA:

H symm $\Rightarrow \exists$ Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren von H . (Spektralsatz)

$Hv_i = \lambda_i \cdot v_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Sei $v \in \mathbb{R}^n$. $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. $\langle v, Hv \rangle = \langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_j H v_j \rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda_j \delta_{ij} = \sum_i \alpha_i^2 \lambda_i$.

Es folgt: H pos. def \Leftrightarrow alle Eigenwerte > 0 .

H neg. def \Leftrightarrow alle EW < 0

H indefinit $\Leftrightarrow \exists i, j : \lambda_i > 0, \lambda_j < 0$

aus LA

Prop: H ist pos. def $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k1} & \dots & h_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad \forall k = 1 \dots n$

$k \times k$

$n=2$ $H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pos def $\Leftrightarrow a > 0$ und $ad - bc > 0$.

H neg. def $\Leftrightarrow -H$ pos. def $\Rightarrow -a > 0$ und $(-a)(-d) - (-b)(-c) > 0$

$\Rightarrow a < 0$ und $ad - bc > 0$

SATZ (hinreichende Bed. für lok. Extrema)

U offen \mathbb{R}^n . $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2-mal stetig partiell diffbar. Sei $x \in U$ ein krit. Pkt von f . Dann gilt:

1. $H(f)(x)$ pos. def. $\Rightarrow f$ hat in x ein lok. Minimum Wert an diesem Pkt = $f(x)$

2. $H(f)(x)$ neg. def. $\Rightarrow f$ hat in x ein lok. Maximum

3. $H(f)(x)$ indefinit $\Rightarrow f$ hat in x kein lok. Extremum

Bew: Wir untersuchen die quadratische Approx. von f im Pkt x : $H = H(f)(x)$

$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2} \langle v, Hv \rangle + r(v)$, mit $r(v) = o(\|v\|^2)$ linearer Term tritt nicht auf da x krit. Pkt

1. Sei H pos. def. $S = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|=1\}$ Einheitskugel. S abgeschlossen + beschränkt $\Rightarrow S$ komp.

$v \mapsto \langle v, Hv \rangle$ ist stetig. $\Rightarrow \exists \mu = \min \{ \langle v, Hv \rangle \mid v \in S \} > 0$.

Sei $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ bel. In "Polarkoord": $v = \lambda \bar{v}$, $\bar{v} \in S$, $\lambda = \|v\|$.

$\langle v, Hv \rangle = \langle \lambda \bar{v}, H(\lambda \bar{v}) \rangle = \lambda^2 \langle \bar{v}, H \bar{v} \rangle \geq \mu \cdot \lambda^2 = \mu \cdot \|v\|^2$.

$f(x+v) \geq f(x) + \frac{\mu}{2} \|v\|^2 - |r(v)|$ $r(v) = o(\|v\|^2) \Rightarrow \exists \delta > 0 : |r(v)| \leq \frac{\mu}{4} \|v\|^2$

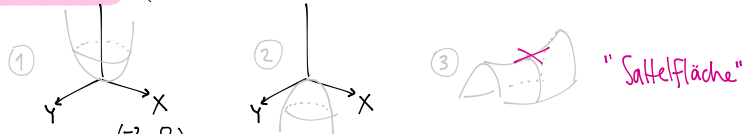
$f(x+v) \geq f(x) + \frac{\mu}{4} \|v\|^2 = f(x) + \frac{\mu}{4} \|v\|^2 \quad \forall v \in B_\delta(0)$. $\geq f(x)$, $> f(x)$ für $v \neq 0$ "striktes Minimum"

2. Wende 1. auf $-f$ an.

3. ↴

3. Sei H indefinit. $\Rightarrow \exists v, w \in S: \langle v, H v \rangle > 0, \langle w, H w \rangle < 0$. $f(x+t \cdot v) = f(x) + \frac{1}{2} \langle t v, H(t v) \rangle + o(t) = f(x) + \frac{t^2}{2} \cdot \lambda + o(t)$
 $\exists \delta > 0: |r(t v)| \leq \frac{\delta}{4} t^2 \Rightarrow f(x+t v) \geq f(x) + \lambda \frac{t^2}{4} - \frac{\delta}{4} t^2 > f(x)$ kein lok. Max in x .
 Ähnlich $f(x+t \cdot w) < f(x)$. $t < 0 \Rightarrow$ kein lok. Min in $x \Rightarrow$ kein lok. Extremum \blacksquare

Bsp: 1. $f(x, y) = c + x^2 + y^2$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. $\partial_1 f = 2x, \partial_2 f = 2y$. $(\nabla f) = (2x, 2y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ ist der einzige krit. P.
 $H(f) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f & \partial_1 \partial_2 f \\ \partial_1 \partial_2 f & \partial_2^2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)$ pos. def. $\Rightarrow \ln(0, 0)$ hat f ein lok. Min.



2. $f = c - x^2 - y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ neg. def. \Rightarrow lok. Max in $(0, 0)$

3. $f = c + x^2 - y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indefinit. \Rightarrow

4. $f_1 = x^2 + y^3$ hat kein lok. Extremum. $H(f_1)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = H(f_2)(0, 0) \Rightarrow$ wenn weder pos/neg/ indef \Rightarrow man kann nichts sagen über Fkt!
 $f_2 = x^2 + y^4$ hat lok. Min in $(0, 0)$
 $(0, 0)$ einziger krit. Pkt.

20/05/15 DER MITTELWERTSATZ

Notation: Sei $A(t)$ eine $m \times n$ -Matrix, deren Komponenten stetige Fkten $a_{ij}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ sind.
 $\int_{t_0}^{t_1} A(t) dt := (s_{ij})_{m \times n}$ Matrix mit $s_{ij} := \int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(t) dt$.

SATZ (Mittelwertsatz) Sei U offen \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar. Sei $x \in U$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, sd $\{x+t \cdot v \mid t \in [0, 1]\} \subset U$. Dann gilt $f(x+v) - f(x) = \left(\int_0^1 (DF)(x+t \cdot v) dt \right) \cdot v$

Bew: $f = (f_1, \dots, f_m)$ $g_i(t) = f_i(x+t \cdot v) \in \mathbb{R}$ $g_i(t) = \sum (\partial_j f_i)(x+t \cdot v) \cdot v_j$
 $f_i(x+v) - f_i(x) = g_i(1) - g_i(0) \stackrel{\text{Fund. Satz}}{=} \int_0^1 g_i'(t) dt = \int_0^1 \sum (\partial_j f_i)(x+t \cdot v) v_j dt = \sum \left(\int_0^1 (\partial_j f_i)(x+t \cdot v) dt \right) \cdot v_j$ \blacksquare

Vektorwertige Fkt/Kurve:
 $v(t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ $w = \int_0^1 v(t) dt$ $\|w\|^2 = \langle w, w \rangle = \langle \int_0^1 v(t) dt, \int_0^1 v(t) dt \rangle = \int_0^1 \langle v(t), v(t) \rangle dt \leq \int_0^1 \|v(t)\| \cdot \|v(t)\| dt$
 $= \|w\| \cdot \int_0^1 \|v(t)\| dt \Rightarrow \|w\| \leq \int_0^1 \|v(t)\| dt \Rightarrow \left\| \int_0^1 v(t) dt \right\| \leq \int_0^1 \|v(t)\| dt$

Korollar: (Gleiche Vor. wie in Mittelw. Satz) $M := \sup \{ \|DF(x+t \cdot v)\| : t \in [0, 1] \}$

Dann: $\|f(x+v) - f(x)\| \leq M \cdot \|v\|$

Bew: $\left\| \int_0^1 (DF)(x+t \cdot v) \cdot v dt \right\| \leq \int_0^1 \|DF(x+t \cdot v)\| \cdot \|v\| dt \leq \int_0^1 M \cdot \|v\| dt = M \cdot \|v\| \cdot \int_0^1 dt = M \cdot \|v\|$ \blacksquare

SATZ ÜBER IMPLIZITE FUNKTIONEN

sehr komplizierte Ausdrücke, nicht nur lin. Abb wie in Lt

Motivation: Sei $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig par. diffbare Abbildung, $(x,y) \mapsto F(x,y)$.

Ang. für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ genau ein y mit $F(x,y) = 0$ man gibt x vor und will nach y lösen

Dann können wir def. $g(x) := y$ dieses eine, eind. y zu fest gegebenem $x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Es gilt: $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$F(x, g(x)) = 0$. Wir sagen die Fkt g ist **implizit** durch die Gleichung $F(x,y) = 0$ definiert.

Notation: $\frac{\partial F}{\partial y} := \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)$ - eine $m \times m$ Matrix

Bsp: $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, B: \mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}^m$. $F(x,y) := A(x) - B(y)$. Wir versuchen g explizit zu ermitteln:

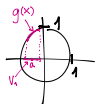
$0 = F(x,y) \Rightarrow B y = A(x) \stackrel{?}{\Rightarrow} y = B^{-1} \cdot A(x) \Rightarrow g(x) := B^{-1} \cdot A(x)$. Dafür muss aber B invertierbar sein!

$B = \frac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}$ muss invertierbar sein!

Weiteres erwarten wir, dass die Lösbarkeit von $F(x,y) = 0$ abhängt vom gewählten Pkt $(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, F(a,b) = 0$.

$(g(a) = b)$

Bsp: $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1, F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Die Lsgmenge $\{(x,y) | F(x,y) = 0\}$ ist der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$.



Sei (a,b) ein Pkt auf dem Kreis, $F(a,b) = 0$.

Fall 1: $b \neq 0$. Dann \exists offene Umgebung $V_a = (a-\epsilon, a+\epsilon)$ um a und genau eine Fkt $g: V_a \rightarrow \mathbb{R}$, sd

$F(x, g(x)) = 0 \forall x \in V_a$, und $g(a) = b$.

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$. $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 2b$ ist invertierbar, da $b \neq 0$.

Hier ist auch eine explizite Beschreibung von g leicht möglich: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2} = g(x)$

Welches Vorzeichen für g zu wählen ist, ist durch das Vorzeichen von b bestimmt.

Fall 2: $b = 0 \Rightarrow (a,b) \in \{(1,0), (-1,0)\}$



Egal wie klein V_a gewählt wird, es $\nexists g: V_a \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(a) = b$ und $F(x, g(x)) = 0 \forall x \in V_a$.

$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 2 \cdot 0 = 0$ NICHT INVERTIERBAR!

DER BANACHSCHE FIXPUNKTSATZ

SATZ: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $A \subset V$ eine abg. Teilmenge. Sei $\phi: A \rightarrow A$ eine Abb., sd $\exists \lambda \in (0,1)$ mit

$\|\phi(f) - \phi(g)\| \leq \lambda \cdot \|f - g\| \forall f, g \in A$. (ϕ ist also eine **Kontraktion**) Kontr. sind immer stetig!

Dann besitzt ϕ genau einen **Fixpunkt** $f_0 \in A$.

$\phi(f_0) = f_0$ der bewegt sich nicht

Bew: Sei $f^0 \in A$ irgendein Element. Setze $f^{k+1} = \phi(f^k), k \geq 0$. Wir erhalten so eine Folge $(f^k) \subset A$

Beh: (f^k) ist eine Cauchy-Folge. $\|f^{k+1} - f^k\| = \|\phi(f^k) - \phi(f^{k-1})\| \leq \lambda \cdot \|f^k - f^{k-1}\| \leq \lambda^k \cdot \|f^1 - f^0\|$

Für $L > k$: $\|F^k - F^*$ $\| = \left\| \sum_{i=k}^{\infty} (F^{i+1} - F^i) \right\| \leq \sum_{i=k}^{\infty} \|F^{i+1} - F^i\| \leq \sum_{i=k}^{\infty} \lambda^i \cdot c \leq \lambda^k \cdot c \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \frac{c \lambda^k}{1-\lambda} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Da V vollst. ist, $\exists F_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} F^k$. A abg $\Rightarrow F_0 \in A$.

F_0 ist ein Fixpunkt: $F_0 = \lim F^{k+1} = \lim \phi(F^k) = \phi(\lim F^k) = \phi(F_0)$. Damit ist die Existenz nachgewiesen.

Eindeutigkeit: Wenn $\phi(F_0) = F_0$ und $\phi(F_1) = F_1$, dann $\|F_0 - F_1\| = \|\phi(F_0) - \phi(F_1)\| \leq \lambda \cdot \|F_0 - F_1\| \Rightarrow \|F_0 - F_1\| = 0 \Rightarrow F_0 = F_1$.

22/05/15 Sei U offen \mathbb{R}^m . $C_b(U, \mathbb{R}^m) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ stetig u. beschränkt}\}$.

Prop: dieser Raum, versehen mit Supremumsnorm, ist Banachraum. $(C_b(U, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\infty})$ ist Banachraum

Bew: Sei $(F_k) \subset C_b(U, \mathbb{R}^m)$ eine CF: $\exists \epsilon > 0 \exists N: \|F_k - F_l\|_{\infty} < \epsilon \quad \forall k, l \geq N. x \in U: \|F_k(x) - F_l(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|F_k - F_l\|_{\infty} < \epsilon$

$\Rightarrow (F_k(x)) \subset \mathbb{R}^m$ ist CF. $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ ist vollst. $\Rightarrow \exists F(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x)$. Wir erhalten so eine Grenzfkt $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$.

$\|F - F_k\|_{\infty} \leq \epsilon \quad \forall k \geq N (N \rightarrow \infty). \|F\|_{\infty} \leq \|F - F_k\|_{\infty} + \|F_k\|_{\infty} \Rightarrow f$ beschränkt. $\|F - F_k\|_{\infty} \rightarrow 0 \Rightarrow f_k \xrightarrow{g} f$

sm $\Rightarrow f$ stetig. $\Rightarrow f \in C_b(U, \mathbb{R}^m)$.

SATZ (über implizite Funktionen)

Sei U_1 offen \mathbb{R}^m, U_2 offen \mathbb{R}^n , sei $F: U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig partiell diffbar. Sei $(a,b) \in U_1 \times U_2$ ein Pkt mit $F(a,b) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbar. Dann \exists Umgebung $V_1 \subset U_1$ von a, \exists Umg. $V_2 \subset U_2$ von b , sd $\exists!$ $g: V_1 \rightarrow V_2$ mit $\frac{\partial F}{\partial y}$ $m \times n$ -Matrix

- 1. $g(a) = b$
- 2. $F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in V_1$
- 3. g ist stetig partiell diffbar.

Bew: Plan: I Umformulierung d. Aufgabe $F(x,y) = 0$ zu einem Fixpkt+problem

- II Lösung d. Fixpktproblems mit Hilfe d. Banachschen Fixpptsatzes \rightarrow wir erhalten g .
- III z g ist stetig
- IV z g ist st. part. diffbar.

zu I Wir können oBdA annehmen, dass $(a,b) = (0,0)$. (sonst betrachte $\tilde{F}(x,y) := F(x+a, y+b)$. $\tilde{F}(0,0) = 0$.)

$B := \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ ist invertierbar. Def $G(x,y) = y - B^{-1} F(x,y)$. $G(0,0) = 0$. $\frac{\partial G}{\partial y}(0,0) = 1_{m \times m} - B^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}$.

$\frac{\partial G}{\partial y}(0,0) = 1_{m \times m} - B^{-1} \cdot B = 0 \Rightarrow \exists$ Umg. $W_1 \subset U_1$ von $a=0, \exists$ Umg. $W_2 \subset U_2$ von $b=0$:

$\left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \right\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in W_1 \times W_2$ (verwendet: F st. part. diffbar)

Sei $r > 0$ so klein, dass $V_2 := \{y: \|y\| \leq r\} \subset W_2, \exists$ Umg. $V_1 \subset W_1$ von $a=0$ mit

$\sup_{x \in V_1} \|G(x,0)\| \leq \frac{r}{2}$ ($G(0,0) = 0, G$ stetig)

$x \in V_1, y, y_0 \in V_2: \|G(x,y) - G(x,y_0)\| \leq \frac{1}{2} \cdot \|y - y_0\|$ (Kon. zum Mittelwertsatz) (*)

Für $y_0 = 0: \|G(x,y)\| \leq \|G(x,y) - G(x,0)\| + \|G(x,0)\| \leq \frac{1}{2} \|y\| + \frac{r}{2} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

Wir merken uns: $\|y\| \leq r \Rightarrow \|G(x,y)\| \leq r \quad (x \in V_1)$ (**)

$G(x,y) = y \Leftrightarrow y - B^{-1} F(x,y) = y \Leftrightarrow F(x,y) = 0$. Wir haben also die Aufgabe $F(x,y) = 0$ transformiert in ein Fixpkt problem. \blacksquare

zu II Wir betrachten den Banachraum $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$. $A := \bigcup_{z \in \mathbb{R}^m} \mathbb{R}^m$. $\phi: A \rightarrow A \quad y \mapsto G(x, y)$
 $(***) \Rightarrow \phi(y) \in A$, wenn $y \in A$ $(*) \Rightarrow \phi$ ist eine Kontraktion. $\|\phi(y) - \phi(y_0)\| \leq \frac{1}{2} \|y - y_0\|$
 Banachscher Fixpntsatz \Rightarrow zu $x \in V_1 \exists! y_0 \in A$, sd $\phi(y_0) = y_0$, d.h. $G(x, y_0) = y_0$, d.h. $F(x, y_0) = 0$.
 Wir definieren $g(x) := y_0$, $g: V_1 \rightarrow V_2$. ■

zu III Wir betrachten den Banachraum $C_b(V_1, \mathbb{R}^m)$. $A := \{f \in C_b(V_1, \mathbb{R}^m) : \|f\|_\infty \leq r\} \subset C_b(V_1, \mathbb{R}^m)$
 Def: $\phi: A \rightarrow A \quad f \mapsto \phi(f)$, wobei $\phi(f)(x) := G(x, F(x)) \quad x \in V_1$
 $\phi(f)$ stetig, beschr $\Rightarrow \phi(f) \in C_b(V_1, \mathbb{R}^m)$. $\|\phi(f)\|_\infty = \sup_{x \in V_1} \{\|\phi(f)(x)\|_{\mathbb{R}^m}\} = \sup \{\|G(x, F(x))\|\} \leq r$, da $\|F(x)\| \leq r$
 $\Rightarrow \phi(f) \in A$. ϕ ist eine Kontraktion: $f, f_0 \in A$. $\|\phi(f) - \phi(f_0)\|_\infty = \sup_{x \in V_1} \{\|G(x, F(x)) - G(x, F_0(x))\|\}$
 $\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{2} \sup \{\|F(x) - F_0(x)\|\} = \frac{1}{2} \|F - F_0\|_\infty$.
 Fixpntsatz $\Rightarrow \exists!$ Fixpkt $f_0 \in A$, $\phi(f_0) = f_0$. $F_0(x) = \phi(f_0)(x) = G(x, f_0(x)) \quad \forall x \in V_1$.
 Eindeutigkeit: $f_0 = g$. $f_0 \in A \subset C_b(V_1, \mathbb{R}^m) \Rightarrow f_0$ stetig. $\Rightarrow g$ stetig. ■

zu IV $\mathbb{R}: g$ diffbar in $x=0$.

F diffbar $\Rightarrow F(x, y) = F(0,0) + (DF)(0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r(x, y)$, $r(x, y) = o(\|(x, y)\|)$

$A := \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$. $(DF)(0,0) = (A \mid B)$ $(A \mid B) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax + By \Rightarrow F(x, y) = Ax + By + r(x, y)$.

$0 = F(x, g(x)) = Ax + Bg(x) + r(x, g(x))$. $Bg(x) = -Ax - r(x, g(x))$. $g(x) = -B^{-1}Ax - B^{-1}r(x, g(x))$ ($g(0) = 0$)

$\mathbb{R}: R(x) = o(\|x\|)$, $x \rightarrow 0$. $\frac{\|r(x, g(x))\|}{\|x\|} = \frac{\|r(x, g(x))\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|r(x, g(x))\|}{\|x, g(x)\|} \rightarrow 0$
 $\leq \frac{\|x\| + \|g(x)\|}{\|x\|} \cdot o(1)$

Arg. es gelingt \exists Umg. $V_\varepsilon \subset V_1$ von $0 \stackrel{\text{Stetigkeit von } g}{\exists} \text{Konst. } K: \|g(x)\| \leq K \cdot \|x\|$ (1)

Dann: $\frac{\|r(x, g(x))\|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\| + K \cdot \|x\|}{\|x\|} \cdot o(1) = (1+K) \cdot o(1) \rightarrow 0$

Wir zeigen (1): (2) $\Rightarrow \|g(x)\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| + \|B^{-1}\| \cdot \underbrace{\|r(x, g(x))\|}_{\leq \varepsilon \cdot \|x, g(x)\|}$! g stetig

$\|g(x)\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| + \|B^{-1}\| \cdot \varepsilon (\|x\| + \|g(x)\|)$

$\|g(x)\| - \|B^{-1}\| \cdot \varepsilon \cdot \|g(x)\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| + \|B^{-1}\| \cdot \varepsilon \|x\|$

Idee: wähle ε so, dass $\|B^{-1}\| \cdot \varepsilon = \frac{1}{2}$ d.h. setze $\varepsilon := \frac{1}{2\|B^{-1}\|}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \|g(x)\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|x\| \cdot (\|A\| + \varepsilon) \Rightarrow \|g(x)\| \leq K \cdot \|x\|$. ■ wir haben (1) gezeigt \Rightarrow diffbar in Pkt 0

27/05/15

$F(x,y) = 0$ (a,b) $F(a,b) = 0$ $F: U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m, U_1 \subseteq \text{offen } \mathbb{R}^n, U_2 \subseteq \text{offen } \mathbb{R}^m$
 $F(x,g(x)) = 0 \quad \forall x \in V.$

$\det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ $\Rightarrow \det \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$
 also inv. bar
 hat stetige Einträge
 stetig
 auf einer kleinen offenen Umg. von (a,b).

Argument d. letzten Vorlesung ist auf dieser Umg. anwendbar und zeigt, dass g auf einer Umg. diffbar ist.

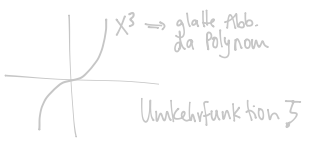
Warum ist g stetig diffbar? Kettenregel: $F(x,g(x)) = 0 \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x) = 0$
 inv. Mehr ex. wie wir oben gesehen haben.

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))$
 hat stetige Einträge \leftarrow hat stetige Einträge hat stetige Einträge

DER SATZ ÜBER UMKEHRBARE ABBILDUNGEN

Def: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n, f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$. f heißt **C^r -Abbildung** ($r = 0, 1, 2, \dots, \infty$), wenn f r-mal stetig partiell diffbar ist.
 $r = \infty: C^\infty \Rightarrow f$ ist "glatt" $r = 0: C^0 \Rightarrow$ nur Stetigkeit.

Def: $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V, V \subseteq \mathbb{R}^m$, heißt **C^r -Diffeomorphismus**, wenn f eine Bijektion ist und f, f^{-1} beide C^r sind.



Bem: Wenn f Diffeomorphismus \Rightarrow f Homöomorphismus.
 hat nur reguläre Pkte

Def: $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, U \subseteq \text{offen } \mathbb{R}^n, x_0 \in U$. x_0 ist ein **regulärer Punkt von f**, wenn $(Df)(x_0)$ vollen Rang hat.
 $n \times n \rightarrow$ voller Rang \rightarrow inv. bar $\rightarrow \det \neq 0$

Sei $f: U \rightarrow V$ ein (C^1) -Diffeomorphismus. $f^{-1} \circ f = \text{id}$. Kettenregel $\Rightarrow (Df^{-1})(f(x)) \cdot (Df)(x) = (Df^{-1})(\text{id}) = 1_{n \times n}$
 $\Rightarrow (Df)(x)$ invertierbar $\forall x \in U \Rightarrow$ Alle $x \in U$ sind reguläre Pkte eines Diffeom. $f: U \rightarrow V$.

SATZ (über umkehrbare Abb.) Sei $U \subseteq \text{offen } \mathbb{R}^n, f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^1 -Abb. Sei $b \in U$. Ist b ein regulärer Punkt von f, dann ist f ein **lokaler** Diffeomorphismus um den Pkt b.

d.h. \exists offene Umg $U' \subseteq U$ von b, sd $f(U') \subseteq \text{offen } \mathbb{R}^m$ und $f|_{U'}: U' \rightarrow f(U')$ ein C^1 -Diffeom. ist.

Bem: Die Umkehrung gilt nicht!

Wenn Abb. lok. Diffeom. an JEDEM Pkt ist \nRightarrow Abb ist Diffeom



Bew.: $a := f(b)$, $F(x,y) := x - f(y)$, $F: \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$. $F(a,b) = 0$ ✓

$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = -(df)(b)$ ist invertierbar.

Satz über implizite Fkten $\Rightarrow \exists$ offene Umg. $V_1 \subset \mathbb{R}^n$ von a , \exists Umg $V_2 \subset U$ von b ,

$\exists!$ C^1 -Abb $g: V_1 \rightarrow V_2$ mit $g(a) = b$, $F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in V_1$.

$0 = F(x, g(x)) = x - f(g(x)) \Rightarrow f(g(x)) = x \quad \forall x \in V_1$.

$g(\frac{f(y)}{\in V_1})$ f stetig $\Rightarrow \exists$ offene Umg. $V \subset V_2$ von b mit $f(V) \subset V_1$.

Beh.: $f(V) \subset g^{-1}(V)$. $\triangleright g^{-1}(V) \subset f(V)$ klar: $x \in V_1, g(x) \in V, x = f(g(x)) \in f(V)$

$\triangleright f(V) \subset g^{-1}(V)$: Folgt aus der Eindeutigkeit: $\forall x \in V_1, \forall y, \tilde{y} \in V_2: F(x,y) = 0 = F(x, \tilde{y}) \Rightarrow y = \tilde{y}$ (*)

Sei $y \in V$. $x := f(y)$. $z := g(x) \in V$. $F(x,y) = x - f(y) = f(y) - f(y) = 0$.

$F(x, g(x)) = 0$.

(*) $\Rightarrow y = g(x) = g(f(y))$.

$U' := f(V) = g^{-1}(V)$ ist offen, da g stetig ist. $V \xrightleftharpoons[g]{f} U'$ sind miteinander inverse C^1 -Abb.

Bem.: Ist $f C^1$, dann auch die Umkehrabb!

IMMERSIONEN UND UNTERMANNIGFALTIGKEITEN DES \mathbb{R}^n

Def.: Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen. Eine C^1 -Abb. ($r \geq 1$) $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **(C^1) -Immersion**, wenn $(D\varphi)(t): \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R}^n$ inj. ist $\forall t \in T$.

Bem.: $\Rightarrow k \leq n$, $\text{Rang}(D\varphi)(t) = k$, $(D\varphi)(t)(e_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t) \in \mathbb{R}^n$. Die Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t)$ sind lin. unabh. $t = t_1, \dots, t_k$

Aus LA: $\exists i_1, i_2, \dots, i_k: \det \frac{\partial (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial (t_1, \dots, t_k)}(t) \neq 0$

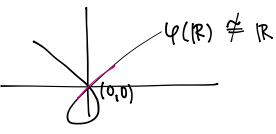
Sei $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion, $\bar{t} \in T$. $\varphi_* k := (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})$ obDA $i_1=1, i_2=2, \dots, i_k=k$, sd $\det \frac{\partial (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial (t_1, \dots, t_k)}(\bar{t}) \neq 0$.

$\frac{\partial \varphi_* k}{\partial t}(\bar{t})$ inv., d.h. \bar{t} ein regulärer Punkt von $\varphi_* k$. Umkehrsatz $\Rightarrow \varphi_* k$ ist ein lok. Diffeom. um \bar{t} .

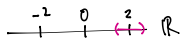
$\bar{t} \in U \xrightarrow[\varphi_* k]{C^1 \text{ Diffeom.}} V \subset \mathbb{R}^k$
 $\varphi = (\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_n}) \Rightarrow \varphi|_U: U \rightarrow \varphi(U)$ eine Bijektion \Rightarrow sogar ein Homöomorphismus.

Bsp.: $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t^2 - 4t, t^2 - 4)$ ist Immersion: $\varphi'(t) = (2t - 4, 2t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Kurve ist Immersion!

$\varphi(2) = \begin{cases} (0, 0) \\ \varphi(-2) = \end{cases} (0, 0)$ Doppelpkt.



Trotzdem: $\varphi|_{(2-\epsilon, 2+\epsilon)} \xrightarrow{\cong} \varphi(2-\epsilon, 2+\epsilon)$

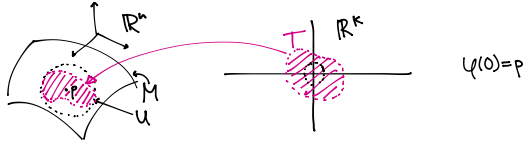


29/05/15

$$\varphi: \underset{(t_1, \dots, t_k)}{T} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{Immersion (} k \leq n \text{)}$$

Letztes Mal: $\forall \bar{t} \in T \exists$ offene Umg. $U \subset T$ von \bar{t} , sd $\varphi|_U \xrightarrow{\cong} \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ Homöo. (Anwendung d. Umkehrsatzes)

Def: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Wir nennen M eine **Untermannigfaltigkeit** von \mathbb{R}^n wenn $\forall p \in M \exists$ offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p , und \exists Immersion $\varphi: \underset{\text{offen } \mathbb{R}^k}{T} \xrightarrow{\text{Homöo.}} \varphi(T) = M \cap U$. $\dim M := k$.



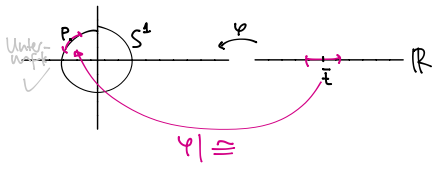
Def: (U, φ) heißt **lokale Parameterdarstellung** von M um p , oder **lokale Karte** um p . (t_1, \dots, t_k) heißen **lokale Koordinaten** bei p . $n-k$ ist die **Kodimension** von M . Untermannf. der Kodim 1 heißen auch **Hyperflächen**.

Bsp: ① $\gamma(t) := (t^2 - 4t, t^2 - 4) \in \mathbb{R}^2$, $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Immersion. $\gamma(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$



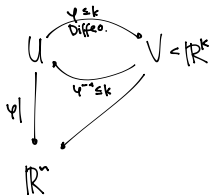
② Kreis: $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (\cos t, \sin t)$.

$\varphi(\mathbb{R}) = S^1$. Sei $p \in S^1$. $\exists \bar{t} \in \mathbb{R}: \varphi(\bar{t}) = p$. Für $\varepsilon > 0$ klein genug ist $\varphi|_{(\bar{t}-\varepsilon, \bar{t}+\varepsilon)} \rightarrow \varphi((\bar{t}-\varepsilon, \bar{t}+\varepsilon))$ ein Homöo.



Alternative lokale Beschreibungen

1. Als Graph: $p \in M$. $\varphi: T \xrightarrow{\cong} M \cap U$, $U' \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{t} \mapsto p$. \exists offene Umgebung $U \subset T$ von \bar{t} , $V \subset \mathbb{R}^k$:



$$x := (x_1, \dots, x_n) \in V. \quad (\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi)(x) = (x_1, \dots, x_k, \overbrace{g_1(x), \dots, g_n(x)}^{=: g(x)})$$

$$M \cap U \stackrel{p}{=} \varphi(U) = (\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi)(V) = \{(x, g(x)) \mid x \in V\} = \text{Graph}(g)$$

Alternative lokale Beschreibungen

2. Als Lösungsmenge eines Gleichungssystems: $F_1(x_1, \dots, x_n) := x_{k+1} - g_{k+1}(x_1, \dots, x_k)$
 \vdots
 $F_{n-k}(x_1, \dots, x_n) := x_n - g_n(x_1, \dots, x_k)$

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff x_{k+i} = g_{k+i}(x_1, \dots, x_k) \quad \forall i=1, \dots, n-k.$$

$$M \cap U = \{x, g(x) \mid x \in V\} = \{x \in U^n \mid F_1(x) = \dots = F_{n-k}(x) = 0\}.$$

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, \dots, x_n)} = \mathbb{1}_{(n-k) \times (n-k)}. \quad \text{Es folgt, dass: } \boxed{\text{Rg } \frac{\partial(F_1, \dots, F_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = n-k.} \quad (*)$$

TANGENTIALRÄUME & NORMALENRÄUME

Def: $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentenvektor** an M bei $p \in M$ ($M \subset \mathbb{R}^n$ Untermannfkt), wenn $v = \gamma'(0)$, wobei $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma(0) = p$. $T_p M :=$ Menge aller Tangentenvektoren an M bei p .

Def: $w \in \mathbb{R}^n$ heißt **Normalenvektor** auf M an p , wenn $w \perp v$, $\forall v \in T_p M$.

$\varphi: T \rightarrow M \cap U = \varphi(T)$ Imm., $0 \in T$, $\varphi(0) = p$. $V := \text{span}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(0)\right\} \Rightarrow \dim V = k$.

M lok. um $p = \{x \mid F_1(x) = \dots = F_{n-k}(x) = 0\}$ mit $(*)$. $W = \text{span}\left\{\langle \nabla F_1 \rangle(p), \dots, \langle \nabla F_{n-k} \rangle(p)\right\}$. $(*) \Rightarrow \dim W = n-k$.

Beh: $V \subset T_p M$. $v = \sum \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(0)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. $\gamma(t) := \varphi((\lambda_1, \dots, \lambda_k) \cdot t)$ $\gamma'(0) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(0) = v$.

Beh: $W \subset N_p M$. $\exists: \langle \nabla F_i \rangle(p) \perp \gamma'(0)$, $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $\gamma(0) = p$. $F_i(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t$
 $\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F_i(\gamma(t)) = \langle \nabla F_i \rangle(p), \gamma'(0) \rangle$.

Dimensionsargument: $V \perp W$ $\begin{matrix} k & n-k \\ \uparrow & \uparrow \\ V \oplus W = \mathbb{R}^n \end{matrix}$ $V \oplus N_p M \supset V \oplus W = \mathbb{R}^n \Rightarrow W = N_p M$
 $u \in T_p M$. $\langle u \rangle + V \oplus W \supset V \oplus W = \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(\langle u \rangle + V) = k \stackrel{\dim V = k}{\Rightarrow} u \in V \Rightarrow V = T_p M$
 \Rightarrow Insb. ist $T_p M$ ein Vektorraum!

Zusammenfassung:

- $T_p M$ ist ein k -dim VR mit Basis $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(0)\right\}$
- $N_p M$ ist ein $(n-k)$ -dim VR mit Basis $\left\{\langle \nabla F_1 \rangle(p), \dots, \langle \nabla F_{n-k} \rangle(p)\right\}$

Ist die Bogenlänge unabhängig von der Wahl der Parametrisierung? Antw: Nicht ohne Zusatz. Bedingungen!

Bsp: $\gamma = [0,1]$ $\gamma_1(t) = t$
 $\tilde{\gamma} = [-1,1]$ $\xrightarrow{\gamma_2(t) = 1-t^2}$ $[0,1] \subset \mathbb{R}^{1 \times n} \Rightarrow \gamma(t) = \gamma[\tilde{\gamma}] = [0,1]$

Aber $L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}_1(t)| dt = 1$ $\quad L(\tilde{\gamma}) = \int_{-1}^1 |\dot{\gamma}_2(t)| dt = 2$
 \neq

Parametertransformat.

Def: Eine C^1 -Kurve $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **C^1 -Reparametrisierung** von $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wenn $\exists C^1$ -Bijektion $\phi: \tilde{I} \rightarrow I$,
 sd $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$. ϕ ist entweder mon. wachsend oder mon. fallend.

$\phi(\tilde{a}) = a, \phi(\tilde{b}) = b,$
 $\phi'(t) \geq 0$

$\phi(\tilde{a}) = b, \phi(\tilde{b}) = a$
 $\phi'(t) \leq 0$

ϕ ist **orientierungserhaltend**

ϕ ist **orientierungsumkehrend**

Satz: Ist $\tilde{\gamma}$ eine C^1 -Reparametrisierung von $\gamma(C^1)$, dann gilt: $L_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}) = L_{\gamma}(\gamma)$

Bew: $L_{\gamma}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} \|\dot{\gamma}(\phi(t))\| \cdot |\phi'(t)| dt$ (*)

Fall 1: ϕ orientierungserhaltend: (*) = $\int_a^b \|\dot{\gamma}(\phi(t))\| \cdot |\phi'(t)| dt = L_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma})$
 $\|\dot{\gamma} \circ \phi\|(t) = \|\tilde{\gamma}'(t)\|$

Fall 2: ϕ orientierungsumkehrend: $\int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \dots (-|\phi'(t)|) \quad - \text{ und } - \text{ ist } + \Rightarrow \text{wieder das selbe}$

05/06/15 | Parametrisierung nach der Bogenlänge:

Satz: Sei $\gamma: [a,b] = I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Kurve mit Länge $\ell = L_{\gamma}(\gamma)$. Ist γ eine Immersion, dann besitzt γ eine C^1 -Reparametrisierung $\tilde{\gamma}: [0,\ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$ nach der Bogenlänge, d.h. $L_{[0,t]}(\tilde{\gamma}) = t, \forall 0 \leq t \leq \ell$.

Bew: Wir betrachten die Längenfkt $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ von γ . $\lambda'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0 \Rightarrow \lambda$ ist streng monoton wachsend.

$\Rightarrow \exists C^1$ -Umkehrfunktion $\phi: \lambda^{-1}: [0,\ell] \rightarrow \mathbb{R}$. $\phi'(t) = \frac{1}{\lambda'(\phi(t))} > 0 \Rightarrow \phi$ ist eine C^1 -Bijektion. $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi$

$\|\tilde{\gamma}'(t)\| = \|\dot{\gamma}(\phi(t))\| \cdot \phi'(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(\phi(t))\|}{\lambda'(\phi(t))} = 1$ $\quad L_{[0,\ell]}(\tilde{\gamma}) = \int_0^{\ell} \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| d\tau = \int_0^{\ell} 1 d\tau = \ell$ \square

Def: $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **stückweise C^1** ($1 \leq r \leq \infty$), wenn eine Partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, sd $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ C^r ist $\forall i$.

Man prüft leicht nach:

Prop: Ist γ stückweise C^1 , dann ist γ rektifizierbar und es gilt $L(\gamma) = \sum_{i=1}^k L_{[t_{i-1}, t_i]}(\gamma) = \sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$

($t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|$ ist zwar nicht stetig, aber doch Riemann-integrierbar).
 $= \int_{t_0}^{t_n} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$

KURVENINTEGRALE

Differential-1-Formen. $V = \mathbb{R}^n$. Dualraum $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R}) = \{A: V \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R}\}$. Sei $U \subset V$ offen.

Def: Eine **1-Form** auf U ist eine Abb. $\omega: U \rightarrow V^*, x \mapsto \omega(x): V \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R}$.

Bsp: ① Ist $v: U \rightarrow V$ ein Vektorfeld, dann definiert v eine 1-Form durch $\omega(x) := \overbrace{\langle v(x), - \rangle}^{\in V^*}$

② Ist $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, dann können wir in ① $v = \nabla f$ verwenden und erhalten

$$(df)(x) := \omega(x) := \langle \nabla f(x), - \rangle$$

$$X_k: U \rightarrow \mathbb{R}, X_k(x_1, \dots, x_n) = x_k. \Rightarrow X_k = e_k. (dX_k)(x)(v) = \langle \nabla X_k(x), v \rangle = \langle e_k, v \rangle = v_k.$$

$$dX_k = \langle e_k, - \rangle.$$

Für $v = e_j: (dX_k)(x)(e_j) = \langle e_k, e_j \rangle = \delta_{kj}. \Rightarrow \{dX_1(x), \dots, dX_n(x)\}$ ist die duale Basis von V^* zu der Standardbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V .

Bem: In der Literatur schreibt man dx_k für dX_k .

Sei ω eine bel. 1-Form auf U . $x \in U. \Rightarrow \exists \lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x) \in \mathbb{R}: \overbrace{\omega(x)}^{\in V^*} = \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) \cdot dx_k$.

Wir erhalten Funktionen $\lambda_1, \dots, \lambda_n: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Def: ω heißt **C^1 -1-Form** ($0 \in v \in \infty$) wenn alle $\lambda_k: U \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -Fkten sind.

Bsp: ① $v: U \rightarrow V$ Vektorfeld. $v(x) = \sum_{k=1}^n v_k(x) \cdot e_k. \omega(x) = \langle v(x), - \rangle = \langle \sum_{k=1}^n v_k(x) \cdot e_k, - \rangle = \sum v_k(x) \cdot \langle e_k, - \rangle = \sum v_k(x) dx_k$.

② $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ Fkt. $v = \nabla f. (df)(x) = \sum_{k=1}^n (\partial_k f)(x) dx_k$ (Differential von f)

Def: Sei $\omega: U \rightarrow V^*$ eine stetige 1-Form und $\gamma: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Kurve mit $\gamma(I) \subset U$. Das **Kurvenintegral** von ω entlang γ ist

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \underbrace{\omega(\gamma(t))}_{\in V^*} \underbrace{(\gamma'(t))}_{\in V} dt$$

In Koordinaten: $\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k dx_k \right) (\gamma(t)) (\gamma'(t)) dt = \int_a^b \sum_{k=1}^n \lambda_k(\gamma(t)) dx_k(\gamma'(t)) dt = \int_a^b \sum_{k=1}^n \lambda_k(\gamma(t)) \cdot \gamma'_k(t) dt = \int_a^b \langle \lambda(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$ wobei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Bsp: $\omega: U = \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow V = \mathbb{R}^2, \omega = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} \quad \lambda_1(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \lambda_2(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$

$m \in \mathbb{Z}. \gamma_m(t) = (\cos(mt), \sin(mt)) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\gamma'_m(t) = (-m \sin(mt), m \cos(mt)). \int_{\gamma_m} \omega = \int_0^{2\pi} (\lambda_1(\gamma_m(t)) \cdot (\gamma'_m)_1(t) + \lambda_2(\gamma_m(t)) \cdot (\gamma'_m)_2(t)) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(mt)}{\sin^2(mt) + \cos^2(mt)} \cdot (-m \sin(mt)) + \frac{-\cos(mt)}{\sin^2(mt) + \cos^2(mt)} \cdot m \cos(mt) \right) dt = \int_0^{2\pi} (-m) dt = -2\pi m$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_m} \omega = m \quad \text{Windungszahl}$$

• Windungsform

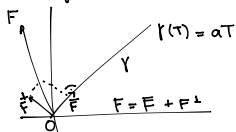
Bem: In $\int_{\gamma} \omega$ wird ein Vektorfeld λ entlang von γ integriert. Man kann auch Funktionen: $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ("Skalarfelder") entlang von γ integrieren, durch $\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$.

Wenn $f=1$ konstant, dann $\int_{\gamma} ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = L(\gamma)$.

man nennt "ds" oft "Bogenelement"

Physikalische Interpretation: $w(x) = \sum_{k=1}^n F_k(x) dx_k$, $F = (F_1, \dots, F_n)$ Kraftfeld. Ein Massepunkt (mit Masse 1) wird durch die Kraft F entlang von γ bewegt.

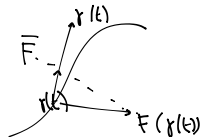
$\gamma(t) = at$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$. F konst. Arbeit = (Wegstrecke) \cdot Kraftkomponente von F entlang von γ



$$\int_{\gamma} w = \int_0^T \langle F, \gamma' \rangle dt = \int_0^T \langle F, a \rangle dt = T \cdot \langle F, a \rangle = T \cdot \langle F + F^{\perp}, a \rangle = T \cdot \langle F, a \rangle$$

$$= T \cdot \left\langle \frac{\|F\|}{\|a\|} \cdot a, a \right\rangle = \frac{T \|a\|}{L(\gamma)} \cdot \|F\| = L(\gamma) \cdot \|F\| \Rightarrow \text{Arbeit} = \int_{\gamma} w$$

gilt auch für bel. γ und bel. F .



10/06/15

$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i dx_i$, $\lambda_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, λ Vektorfeld

1-Form: $w: U \rightarrow V^*$. $\gamma: I = [a, b] \xrightarrow{C^1} V = \mathbb{R}^n$ Kurve. $\rightsquigarrow \int_{\gamma} w$

Invarianz des Kurvenintegrals unter Reparametrisierung:

Prop: Sei $w: U \rightarrow V^*$ eine stetige 1-Form, $\gamma: I \rightarrow U$ eine C^1 -Kurve und $\tilde{\gamma}: \tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow U$ eine C^1 -Reparametrisierung von γ , wobei die Parametertransformation $\phi: \tilde{I} \rightarrow I$ orientierungserhaltend sein soll. Dann gilt: $\int_{\tilde{\gamma}} w = \int_{\gamma} w$.

Bew: $\phi(\tilde{a}) = a$, $\phi(\tilde{b}) = b$. $\int_{\tilde{\gamma}} w = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} w(\tilde{\gamma}(t)) \cdot (\tilde{\gamma}'(t)) dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} w(\gamma(\phi(t))) (\gamma'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)) dt$

$\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} w(\gamma(\phi(t))) (\gamma'(\phi(t))) \cdot \phi'(t) dt$

$\stackrel{\text{Subst. regel}}{=} \int_a^b w(\gamma(\tau)) (\gamma'(\tau)) dt \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\gamma} w$

Additivität d. Kurvenintegrals

$\gamma_1: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_2: [c, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, beide stückweise C^1 , $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.

Def: Konkatenation von γ_1 und γ_2

$$t \in [a, b] : (\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c, b] \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \gamma_1 + \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, ist stückweise C^1 also insb. stetig

Def: $(-\gamma)(t) := \gamma(a + (b-t))$ ($\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$)



$$\begin{aligned} -\gamma(a) &= \gamma(b) \\ -\gamma(b) &= \gamma(a) \end{aligned}$$

Es gilt: $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} w = \int_{\gamma_1} w + \int_{\gamma_2} w$, $\int_{-\gamma} w = -\int_{\gamma} w$

EXAKTE 1-FORMEN

Def: Eine 1-Form $\omega: U \rightarrow V^*$ heißt **exakt**, wenn $\exists C^1$ -Fkt. $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega = df$. Wir nennen f ein Potential für ω .

Bsp: $n=1$. $U = (a,b)$ offenes Intervall $\subset \mathbb{R}^1$. $\omega: U \xrightarrow{C^0} (\mathbb{R}^1)^*$, $\omega = \lambda_n(x) dx$ typische 1-Form
 $x_0 \in (a,b)$, $x \in (a,b)$

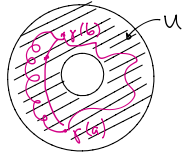
$$f(x) = \int_{x_0}^x \lambda_n(t) dt \rightsquigarrow f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$f' = \lambda_n \Rightarrow \omega = \lambda_n dx = f' dx = df \Rightarrow$ Jede st. 1-Form auf einem offenen Intervall ist exakt.

Satz: Ist ω exakt, dann gilt $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$, wobei f ein Potential für ω ist. Insb. ist $\int_\gamma \omega$ unabhängig vom Verlauf von γ und hängt nur von den Endpunkten $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ ab.

Bew: $\omega = df$. $\int_\gamma \omega = \int_\gamma df \stackrel{\text{Fund. Satz}}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_i(t) dt$.

$$\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt \stackrel{\text{Fund. Satz}}{=} (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a)$$



Def: Eine Kurve $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **geschlossen**, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$

Korollar: Ist γ geschlossen und ω exakt, dann ist $\int_\gamma \omega = 0$.

Bew: $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$

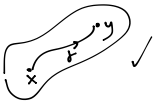
Bsp: Windungsform: $\omega: U = \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$, $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$. γ geschlossen. Wir haben ausgerechnet: $\int_\gamma \omega = 2\pi \neq 0 \stackrel{\text{Kor.}}{\Rightarrow} \omega$ ist nicht exakt

Das Vektorfeld $\lambda = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ besitzt kein Potential.

Gilt auch die Umkehrung des Satzes?

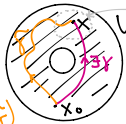
Def: $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn $\forall x, y \in U \exists \gamma: [a,b] \rightarrow U$ (stückweise C^1) mit $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$



Def: Eine nichtleere, offene, wegzusammenhängende Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ nennt man **Gebiet**.

Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\omega: U \rightarrow V^*$ stetig. Dann gilt: ω exakt $\Leftrightarrow \int_\gamma \omega = 0 \forall$ geschlossenen, stückw. C^1 -Kurven $\gamma: I \rightarrow U$

Bew: U offene Kugel



$x_0 \in U$. Für $x \in U$: $f(x) := \int_{x_0}^x \omega := \int_\gamma \omega$ ist wohldef., da laut Vorausss. $\int_\gamma \omega = 0$.

γ geschlossen

Beh: $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ist total differenzierbar.

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} \omega - \int_{x_0}^x \omega = \int_x^{x+h} \omega = \int_a^\alpha \omega, \text{ wobei } \alpha(t) = x+th \text{ ist, } t \in [0,1].$$

$$\omega = \sum \lambda_i dx_i, \lambda_i: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig. } \int_a^\alpha \omega = \int_0^1 \sum \lambda_i(x+th) \cdot h_i dt = \int_0^1 \langle \lambda(x+th), h \rangle dt$$

$$f(x+h) - f(x) - \langle \lambda(x), h \rangle = \int_0^1 \langle \lambda(x+th) - \lambda(x), h \rangle dt$$

Wenn $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \|h\| < \delta, \|\lambda(x+th) - \lambda(x)\| < \varepsilon \quad \forall t$.

$$\text{Für } \|h\| < \delta: |f(x+h) - f(x) - \langle \lambda(x), h \rangle| \leq \int_0^1 \|\lambda(x+th) - \lambda(x)\| \cdot \|h\| dt < \int_0^1 \varepsilon \cdot \|h\| dt = \varepsilon \|h\|$$

\Rightarrow 1. f ist total diffbar

$$2. \lambda = \nabla f \quad (\Rightarrow f \in C^1) \stackrel{\text{Satz}}{\Rightarrow} \omega = \varepsilon \lambda_i dx_i = \sum (\partial_i f) dx_i = df \quad \Rightarrow \omega \text{ exakt.}$$

15/06/15

GESCHLOSSENE 1-FORMEN

15106

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n = V$ offen. Eine 1-Form $\omega: U \xrightarrow{C^1} V^*$ heißt geschlossen, wenn $d\lambda_i = d_i d_j \neq i_j$. ($\omega = \sum_{i=1}^n \lambda_i dx_i$)

ohne JESSIE
und POULINA

Beispiel: Windungsform: $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, $\omega: \mathbb{R}^2 - 0 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$.
 $d\lambda_1 = d\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = d\lambda_2$
 $\Rightarrow \omega$ ist geschlossen (aber nicht exakt.)

Proposition: Ist ω exakt, dann ist ω geschlossen. (C^1)

Beweis: Sei $\omega = df$, $f: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \rightarrow \lambda_i &= df_i \neq i \Rightarrow d_j \lambda_i = d_j d_i f \\ &= d_i d_j f = d_i \lambda_j. \end{aligned}$$

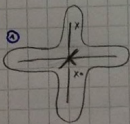
exakt, geschlossen

Die Frage, ob eine ^{Satz v. Schwarz} geschlossene 1-Form exakt ist, hat einen globalen und einen lokalen Aspekt. Wir werden sehen, dass eine geschlossene Form lokal (d.h. auf einer offenen Kugel) immer exakt ist.

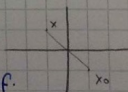
Definition: $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn $\exists x_0 \in U$, sodass

$$\forall x \in U: \exists \tau \in (0,1) \text{ s.t. } \tau x_0 + (1-\tau)x \in U.$$

Beispiel:



②. $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ nicht sternförmig.



①. offene Kugeln, \mathbb{R}^n sind sternf.

Poincaré Lemma: Sei $\omega: U \xrightarrow{C^1} V^*$ geschlossen.

Ist U sternförmig, dann ist ω exakt.

Bevor wir das P.L. beweisen, benötigen wir die Technik des "Differenzierens unter dem Integral."

$Q := \underbrace{[a, b]}_x \times \underbrace{[c, d]}_y \subset \mathbb{R}^2$. Sei $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für $y \in [c, d]$:
 $\phi(y) := \int_a^b f(x, y) dx$. ("Parameterintegral")
 $\rightarrow \phi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

Proposition: Existiert $\partial_y f$ und ist stetig auf Q , dann ist ϕ stetig differenzierbar und es gilt:

$$\phi'(y) = \int_a^b (\partial_y f)(x, y) dx$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \right) \quad \text{"Differenzieren unter dem Integral"}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \phi(y+h) - \phi(y) &= \int_a^b (f(x, y+h) - f(x, y)) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} f(x, y+th) dt \right) dx \end{aligned}$$

Fundamentalsatz
 Kettenregel $\int_a^b \int_0^1 (\partial_y f)(x, y+th) \cdot h dt dx$

$$\frac{\phi(y+h) - \phi(y)}{h} = \frac{\int_a^b \int_0^1 (\partial_y f)(x, y+th) dt dx}{\int_a^b \int_0^1 (\partial_y f)(x, y) dt dx}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Q kompakt $\Rightarrow \partial_y f$ gleichmäßig stetig auf Q .

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : |h| < \delta \Rightarrow |(\partial_y f)(x, y+th) - (\partial_y f)(x, y)| < \varepsilon \quad \begin{matrix} \forall x \in [a, b], \\ \forall t \in [0, 1]. \end{matrix}$$

$$\|x\| \leq \int_a^b \int_0^1 \varepsilon dt dx = \varepsilon(b-a).$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(y+h) - \phi(y)}{h} = \int_a^b (\partial_y f)(x, y) dx.$$

Da $\partial_y f$ stetig ist, ist auch $\int_a^b (\partial_y f)(x, y) dx$ stetig in $y \Rightarrow \phi'$ stetig.

Notation: $\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ (falls existent.)

Ähnlich: $\int_{-\infty}^b = \int_{-\infty}^a + \int_a^b$

Beispiel:

Berechne $\int_0^\infty e^{-x^{1/2}} dx$!

$$F(t) = \left(\int_0^t e^{-x^{1/2}} dx \right)'$$

$$\begin{aligned} F(t) &= 2 \left(\int_0^t e^{-x^{1/2}} dx \right)' e^{-t^{1/2}} \\ &= 2e^{-t^{1/2}} \int_0^t e^{-x^{1/2}} dx \end{aligned}$$

Subst. $x = ty$
 $\frac{dx}{dy} = t$

$$2e^{-t^2/2} \int_0^1 e^{-t^2 y^2/2} t dy = \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{e^{-(1+y^2)t^2/2}} 2t dy$$

$$= dt \cdot \left(-2 \cdot \frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2} \right)$$

Diff. mit dem Integral!
 $= -2 \cdot dt \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2} dy$
 $=: G(t)$

$F'(t) = -2G'(t) \Rightarrow$ konst. C
 $F(t) = -2G(t) + C$

Wir ermitteln C: $t \rightarrow 0 (t > 0)$

$G(0) = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y \Big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0)$
 $F(0) = 0$

$0 = -2 \cdot \frac{\pi}{4} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$
 $\Rightarrow \left(\int_0^t e^{-x^2/2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2} dy$

$t \rightarrow \infty$: $\frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2}$ konvergiert gleichmäßig gegen konst. 0.

Gliedweises Integrieren $\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2} dy \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^1 0 dy = 0$

$\Rightarrow \left(\int_0^t e^{-x^2/2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{2}$
 $\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$

(Gausches Fehlerintegral)
 \rightarrow Wahrscheinlichkeitsrechnung,
 Statistik, Fourier-Analyse...

Zurück zum Bew. d. Poincaré-Lemmas:

Beweis:

$\exists: df = w \Rightarrow \partial_i w = \lambda_i$ $w: U \rightarrow V^*$ geschlossen, U sternförmig

$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i dx_i$ $x \in U$: (o.B.d.A. sei $x_0 = 0$ das Sternzentrum)

Ziel $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (t \lambda_j(t x)) dt$

$\Leftarrow U$ sternförmig!

$(djf)(x) = \sum_{i=1}^n \partial_j (\lambda_i(t x) \cdot x_i) dt$
 $= \int_0^1 dt \sum_{i=1}^n \partial_j (\lambda_i(t x) \cdot x_i)$
 $= \int_0^1 dt \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(t x) \cdot x_i + \lambda_i(t x) \cdot \delta_{ij} \right)$
 $= \int_0^1 dt \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(t x) \cdot x_i + \lambda_i(t x) \right)$

Ketten- & Produktregeln

$\partial_j \lambda_i = \partial_i \lambda_j$

$\Rightarrow df = w$

$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (t \lambda_j(t x)) dt = \lambda_j(x)$

$\Rightarrow w = df$

Lokal
 Global
 Defi
 Ha, B
 Jo i
 JH: Co
 H(S)

Lokal: geklärt ✓

Globale - Aspekt:

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gegeben seien 2 Kurven

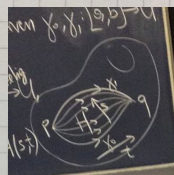
$$\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow U \text{ mit } p := \gamma_0(a) = \gamma_1(a),$$

$$q := \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$$

γ_0 ist homotop (in U) zu γ_1 , wenn

$$\exists H: [0, 1] \times [a, b] \xrightarrow{\text{stetig}} U \text{ mit } H(0, t) = \gamma_0(t), H(1, t) = \gamma_1(t) \quad \forall t,$$

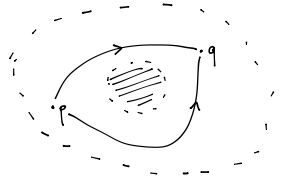
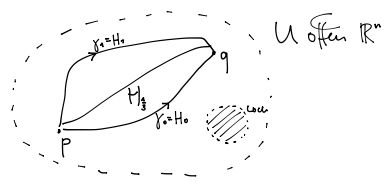
$$H(s, a) = p, H(s, b) = q \quad \forall s \quad H_0(t) := H(s, t)$$



17/06/15

Homotop:

Nicht homotop:



H Homotopie. $H: [0,1] \times [a,b] \xrightarrow{sl} U$

$H_s(t) = H(s,t)$, $H_0 = \gamma_0$, $H_1 = \gamma_1$, $H(s,a) = p \forall s$, $H(s,b) = q \forall s$

Def: Seien $\gamma_0, \gamma_1: [a,b] \rightarrow U$ stückweise C^1 . Dann sind γ_0, γ_1 stückw. C^1 -homotop, wenn \exists "stückweise C^1 "-Homotopie $H: [0,1] \times [a,b] \rightarrow U$ von γ_0 nach γ_1 , dh H_s stückw. $C^1 \forall s$ und $H(\cdot, t)$ stückw. C^1 .

Zur Erinnerung: Das Lebesguesche Zahlenlemma: (Blatt 2?)

Sei (X, d) ein kompakter metr. Raum und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Dann $\exists \delta > 0: Y \subset X, \text{diam}(Y) < \delta \Rightarrow \exists i: Y \subset U_i$.

HOMOTOPRIESATZ Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen (aber nicht notw. sternförmig!) und $w: U \rightarrow V^*$ geschlossen. Sind

$\gamma_0, \gamma_1: [a,b] \rightarrow U$ stückw. C^1 -homotop, dann $\int_{\gamma_0} w = \int_{\gamma_1} w$.

Bew: $U = \bigcup_{x \in U} B_{\text{diam}(x)}$ ($\Leftarrow U$ offen). $B_{\text{diam}(x)}$ \star -förmig + w geschl. $\xrightarrow{\text{Poincaré Lemma}}$ w ist auf $B_{\text{diam}(x)}$ exakt $\forall x \in U$.

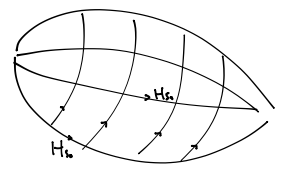
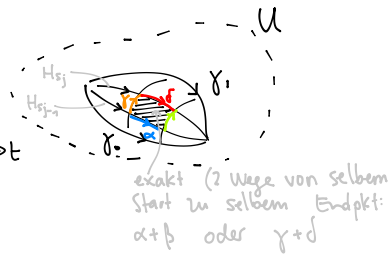
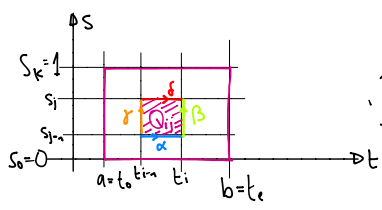
Sei $H: [0,1] \times [a,b] \rightarrow U$ eine stückw. C^1 -Homotopie von γ_0 nach γ_1 .

Leb. Zahlenlemma angewendet auf dem komp. metr. Raum Q und die offene Überdeckung $\{H^{-1}(B_{\text{diam}(x)}(x))\}_{x \in U}$

$\Rightarrow \exists$ Partition $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, sd $H(Q_{ij}) \subset B_{\text{diam}(x_{ij})}(x_{ij})$, wobei

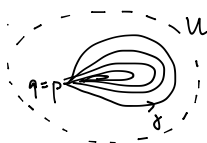
$Q_{ij} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ ($\text{diam}(Q_{ij}) < \delta \forall i,j$)

$\Rightarrow w$ ist auf einer offenen Umg. von $H(Q_{ij})$ exakt. $(H_{i,j}) \Rightarrow \int_{\alpha+\beta} w = \int_{\gamma+\delta} w = \int_{\gamma} w + \int_{\delta} w$



Def: Eine geschlossene Kurve $\gamma: [a,b] \rightarrow U$ heißt **nullhomotop**, wenn γ homotop zur konstanten Abb.

$c: [a,b] \rightarrow U, c(t) = p \forall t$.



- Kurve lässt sich zu Pkt zusammenziehen
- Loch in Mitte verhindert zusammenziehen \Rightarrow nicht nullhomotop

Bsp: In \mathbb{R}^n ist jede geschlossene Kurve nullhomotop.

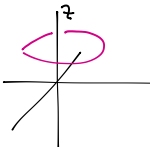
Def: U heißt **einfach zusammenhängend**, wenn U wegzusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve in U nullhomotop ist.

Bsp: • \mathbb{R}^n ist einfach zusammenhängend. ✓

• $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ist nicht einf. zsh. $\bar{\Sigma}$

• $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ ist einf. zsh. ✓

• $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ nicht einf. zsh. $\bar{\Sigma}$



Korollar: Ist $\omega: U \rightarrow V^*$ geschl. und ist U einf. zsh., dann ist $\int_{\gamma} \omega = 0 \forall$ geschl. Kurven γ .

Kurvenintegral über konst. Kurve = 0

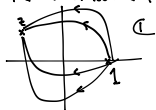
geschl. Kurve γ

Insb. ist ω global (auf ganz U) exakt.

Bem: Riemannsche Flächen, Überlagerungen.

$$(\log x)' = \frac{1}{x}, z \in \mathbb{C}: (\log z)' = \frac{1}{z}, \log x := \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

$$\log t := \int_1^t \frac{du}{u}, u \in \mathbb{C}.$$



Bsp: $n=3, U \subset \mathbb{R}^3, U$ sei einf. zsh. $\omega: U \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$, $\omega = \lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \lambda_3 dx_3, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$\text{rot}(\lambda) = (\partial_2 \lambda_3 - \partial_3 \lambda_2, \partial_3 \lambda_1 - \partial_1 \lambda_3, \partial_1 \lambda_2 - \partial_2 \lambda_1) = 0 \Leftrightarrow \omega \text{ geschl.}$$

U einf. zsh. + $\text{rot}(\lambda) = 0 \xrightarrow{\text{Kor}}$ λ hat ein Potential auf U .

DOPPEL- UND MEHRFACHINTEGRALE

$Q := [a,b] \times [c,d], f: Q \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\phi(y) := \int_a^b f(x,y) dx, \phi: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$$

Lemma: ϕ ist stetig. insb Riemann-integrierbar.

Bew: Sei $(y_k) \subset [c,d]$ eine konv. Folge, $y_k \rightarrow \eta (k \rightarrow \infty)$. Zu zeigen: $\phi(y_k) \rightarrow \phi(\eta)$. Setze: $f_k(x) := f(x, y_k)$.

Q kompakt $\Rightarrow F$ glm. stetig auf Q . Sei $\epsilon > 0, \exists \delta > 0: \|(x,y) - (x',y')\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x',y')| < \epsilon$.

$y_k \rightarrow \eta \Rightarrow \exists N: \|y_k - \eta\| < \delta \forall k \geq N. \Rightarrow \forall k \geq N: |f(x, \eta) - f_k(x)| < \epsilon \forall x \in [a,b]$.

$\Rightarrow f_k \rightarrow f(\cdot, \eta)$ gleichmäßig. Satz über gliedweises Integrieren $\Rightarrow \int_a^b f_k(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, \eta) dx = \phi(\eta)$ ■

wir können betrachten: $\int_c^d \phi(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b F(x,y) dx \right) dy$ "Doppelintegral"

SATZ (über das vertauschen/Permutieren d. Integrationsreihenfolge)

$F: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt $\int_c^d \left(\int_a^b F(x,y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y) dy \right) dx$

Bew: $\Psi(y) := \int_a^b \left(\int_c^y F(x,t) dt \right) dx \Rightarrow \Psi(c) = 0$

$\Psi'(y) := \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_c^y F(x,t) dt \right) dx = \int_a^b F(x,y) dx$
 ↑
 Differenzieren unter dem Integral $\xrightarrow{=}$ Fundamentalsatz $\Rightarrow F(x,y)$

$\int_c^d \left(\int_a^b F(x,y) dx \right) dy = \int_c^d \Psi'(y) dy = \Psi(d) - \Psi(c) = \Psi(d) = \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y) dy \right) dx$ ■

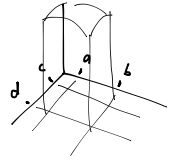
Folgerung: $I_j := [a_j, b_j], j = 1, \dots, n$ ($a_j, b_j \in \mathbb{R}, a_j < b_j$). $Q := I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$. Sei $F: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Induktiv $\Rightarrow \int_{I_1} \int_{I_2} \dots \left(\int_{I_n} f(x_1, \dots, x_n) dx \right) dx_{n-1} \dots dx_1 = \int_{I_{\sigma(1)}} \int_{I_{\sigma(2)}} \dots \left(\int_{I_{\sigma(n)}} f(x_1, \dots, x_n) dx \right) \dots dx_{\sigma(1)}$

wobei $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow$ eine Permutation.

\Rightarrow Def: (Abkürzung für Mehrfach-Integrale) $\int_Q F(x) dx := \int_{I_1} \int_{I_2} \dots \int_{I_n} f(x) dx_n \dots dx_1$ ($x = x_1, \dots, x_n$)

Geom. Interpretation: $f \geq 0$. $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \text{Volumen} \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x \in [a,b] \\ y \in [c,d] \\ z \in [0, f(x,y)] \end{matrix} \}$



PRIMITIVE ABBILDUNGEN

$U \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$

Def: Eine Abb. $G: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist primitiv, wenn $\exists m \exists g: U \rightarrow \mathbb{R}$, so $G(x) = (x_1, \dots, x_{m-1}, g(x), x_{m+1}, \dots, x_n)$ uell. Ist g diffbar, dann ist auch G diffbar, und es gilt:

$(DG)(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} & \\ & & & & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det DG(x) = \partial_m g(x) \Rightarrow DG(x)$ invertierbar $\Leftrightarrow (\partial_m g(x)) \neq 0$

Def: Eine lineare Abb. $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Transposition, wenn B zwei Standardbasisvektoren e_i, e_j miteinander vertauscht und alle anderen gleich lässt.

Bsp: $B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, B(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$

Def: Projektionen: $P_m: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{Lin}} \mathbb{R}^m, P_m \circ 0 = 0, m \geq 1: P_m(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$

Struktursatz: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Abb. mit $0 \in U, F(0) = 0, (DF)(0)$ invertierbar.

Dann \exists eine Umg. $V \subseteq U$ von 0 , auf der $F(x) = B_1 \circ B_2 \circ \dots \circ B_{m-1} \circ G_m \circ \dots \circ G_2 \circ G_1(x)$
 ↓ Transpositionen oder Id ↓ C^1 primitiv, $G_m(0) = 0, (DG_m)(0)$ inv. Abb.

Bew: Induktion: $F_1 := F$. Induktiv konstruieren wir F_2, F_3, \dots, F_n mit

1. $F_m(0) = 0$
2. $(DF_m)(0)$ inv. bar
3. $P_{m-1} F_m = P_{m-1}$ auf einer Umg. von 0.

} Gilt für F_1 ✓
 := Induktionsannahme

Induktionsschritt $m \rightarrow m+1$: 3. $\Rightarrow F_m(x) = (x_1, \dots, x_{m-1}, F_m(x), \dots, F_n(x))$.

$$(DF_m)(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} F_m & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} F_m & \dots & \frac{\partial}{\partial x_m} F_m & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} F_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F_m & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} F_m & \dots & \frac{\partial}{\partial x_m} F_m & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} F_m \end{pmatrix} \leftarrow m\text{-te Zeile}$$

2. $\Rightarrow (DF_m)(0)$ inv $\Rightarrow m$ -te Spalte $\neq 0 \Rightarrow \exists k \geq m$ $(\frac{\partial}{\partial x_k} F_m)(0) \neq 0$.

$G_m(x) := (x_1, \dots, x_{m-1}, F_m(x), x_{m+1}, \dots, x_n)$. G_m ist primitiv; $G_m(0) = 0$, $(DG_m)(0)$ inv. bar.

Satz über Umkehrabb $\Rightarrow G_m$ ist ein lok. Diffeomorphismus bei 0 $\Rightarrow \exists G_m^{-1}$ lokal.

$F_{m+1}(y) := B_m F_m G_m^{-1}(y)$ $\xrightarrow{\text{Transpos. } e_m \leftrightarrow e_k}$ 1. $F_{m+1}(0) = 0$, 2. $(DF_{m+1})(0) = DB_m \cdot DF_m \cdot DG_m^{-1}(0)$ ist inv. bar

3. $P_m F_{m+1}(G_m(x)) = P_m B_m F_m(x) = P_m B_m(x_1, \dots, x_{m-1}, F_m(x), \dots, F_n(x))$
 $= P_m(x_1, \dots, x_{m-1}, F_m(x), \dots, F_n(x))$
 $= (x_1, \dots, x_{m-1}, F_m(x), 0, \dots, 0)$
 $= P_m(G_m(x))$

$\Rightarrow P_m F_{m+1} = P_m(\text{lokal})$

$B_m F_{m+1} G_m \stackrel{!}{=} F_m \quad (B_m^2 = Id)$

ist primitiv

$F = F_1 = B_1 F_2 G_1 = B_1 (B_2 F_3 G_2) G_1 = \dots = B_1 \dots B_{n-1} F_n G_{n-1} \dots G_1$

$F_n(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, F_n(x))$

Def: Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt. Der Träger von f ist $\text{supp}(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$

Def: Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Fkt mit kompaktem Träger. Wähle $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ mit $\text{supp}(f) \subset Q$.

$\int_{\mathbb{R}^n} f := \int_Q f(x) dx$



24/06/15

PARTITIONEN DER EINS



Sei X, d ein metr. Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge. $x \in X$: $d_A(x) = \inf \{d(x, a) \mid a \in A\}$

Es gilt: $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

$d_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Seien nun $A, B \subset X$ disjunkte, abg., wirt keine Teilmengen. $x \in X$. $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$ kann nicht 0 werden da x nicht in A u. B (disjunkt) sein kann da A u. $B \neq \emptyset$

$\Rightarrow f: X \xrightarrow{\text{stetig}} [0, 1]$. $x \in A \iff f(x) = 0$. $f(x) = 1 \iff x \in B$. (*)

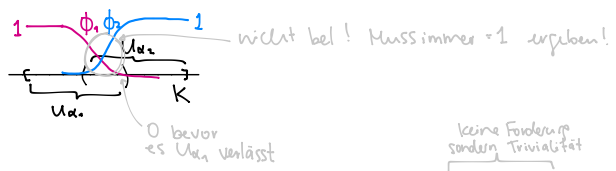


Satz (Partitionen d. Eins)

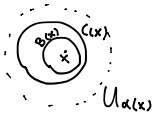
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von K . Dann \exists stetige Funktionen $\phi_1, \dots, \phi_s: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$

mit 1.) $\forall i \exists \alpha: \text{supp}(\phi_i) \subset U_\alpha$

2.) $\phi_1(x) + \dots + \phi_s(x) = 1 \quad \forall x \in K$
Part. von



Bew.: $x \in K: \exists \alpha(x): x \in U_{\alpha(x)}$. Es existieren offene Kugeln $B(x), C(x)$ um x , sd $\overline{B(x)} \subset C(x) \subset U_{\alpha(x)}$. keine Forderung sondern Trivialität. Vorausss. (*)



$A := \mathbb{R}^n - C(x) \Rightarrow A$ abs., $\neq \emptyset$. $B := \overline{B(x)}$.

Da K komp. $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_s \in K$ mit $K = B(x_1) \cup \dots \cup B(x_s)$
Kugel mit Mittelpkt x_i

$\Rightarrow \exists$ stetige Fkt. $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, sd $f_i|_{\mathbb{R}^n - C(x_i)} = 0$, $f_i|_{\overline{B(x_i)}} = 1$. wg (*)

Induktiv definieren wir $\phi_1, \dots, \phi_s: \phi_1 := f_1$. $\phi_{i+1} := (1 - f_1) \cdot \dots \cdot (1 - f_i) \cdot f_{i+1}$ ($i = 2, \dots, s$) $\Rightarrow \phi_i$ stetig, $\phi_i(x) \in [0, 1]$

1.) $\text{supp}(\phi_i) \subset \text{supp}(f_i) \subset \overline{C(x_i)} \subset U_{\alpha(x_i)}$ (*)

2.) $\phi_1 + \phi_2 = f_1 + (1 - f_1) \cdot f_2 = 1 - (1 - f_1)(1 - f_2)$

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \underbrace{1 - (1 - f_1)(1 - f_2)}_{\phi_1 + \phi_2} + \underbrace{(1 - f_1)(1 - f_2)f_3}_{\phi_3} = 1 - (1 - f_1)(1 - f_2)(1 - f_3)$$

usw

$$\phi_1 + \dots + \phi_s = 1 - \underbrace{(1 - f_1) \cdot \dots \cdot (1 - f_s)}_{\star}$$

$x \in K: \exists i: x \in B(x_i) \Rightarrow f_i(x) = 1. \Rightarrow \underbrace{1 - f_i(x)}_{\star} = 0 \Rightarrow \phi_1(x) + \dots + \phi_s(x) = 1 - 0 = 1 \quad \forall x \checkmark$
da $B(x_i)$ K überdecken

26/05/15

$$\exists: \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(T(x)) |\det DT(x)| dx$$

$$\forall x \in U \exists \text{Umgebung } V_x \subset U : T(x) - T(x_0) = B_n \circ \dots \circ B_{n-1} \circ G_1 \circ \dots \circ G_n \cdot (x - x_0) \quad x \in V_x$$

\Rightarrow Wenn $\text{supp}(f) \subset T(V_x)$, dann gilt (*). $\{T(V_x)\}_{x \in U}$ offene Überdeckung von $K := \text{supp}(f)$ (kompakt)

$\Rightarrow \exists$ Partition der 1: $\phi_1, \dots, \phi_s: \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$, $\text{supp}(\phi_i) \subset T(V_{x_i})$, $\phi_1 + \dots + \phi_s = 1$. $\text{supp}(\phi_i \cdot f) \subset \text{supp}(\phi_i) \subset T(V_{x_i})$

\Rightarrow (*) gilt für $\phi_i \cdot f \forall i$. $f = f \cdot 1 = f \cdot (\phi_1 + \dots + \phi_s) = \sum_{i=1}^s (\phi_i \cdot f) \Rightarrow$ (*) gilt für f (Additivität des Integrals)

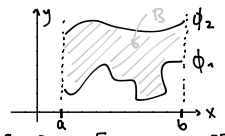
NORMALBEREICHE UND AUSWERTUNG VON MEHRFACHINTEGRALEN

Def: Sei $B \subset \mathbb{R}^2$. B heißt **Normalbereich bzgl der x-Achse**, wenn $B = \{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [\phi_1(x), \phi_2(x)]\}$,

wobei ϕ_1 und $\phi_2: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\phi_1 \leq \phi_2$.

$$\int_B f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f dy \right) dx$$

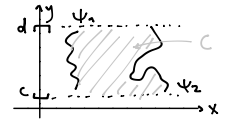
innen zuerst auswerten



Analog: Def: $C \subset \mathbb{R}^2$ ist ein **Normalbereich bzgl der y-Achse**, wenn $C = \{(x,y) \mid y \in [c,d], x \in [\psi_1(y), \psi_2(y)]\}$,

wobei $\psi_1, \psi_2: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\psi_1 \leq \psi_2$

$$\text{Dann } \int_C f dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f dx \right) dy$$



Dies ist konsistent, denn wenn $B=C$ ein Normalbereich bzgl beider Achsen ist, dann gilt

$$\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f dx \right) dy$$

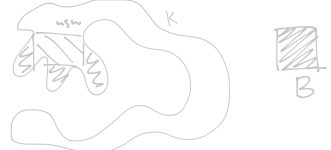
(Vertauschen der Integrationsreihenfolge)

"wir verstehen uns schon"

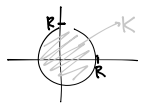
Ist $K \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge, dann versucht man oft eine Transformation $T: B \rightarrow K$ zu finden, T bijektiv,

T C^1 -Immersion, wobei B ein Normalbereich ist.

$$\text{Dann gilt } \int_K f(x,y) dx dy = \int_B f(T(u,v)) \cdot |\det DT(u,v)| du dv$$



Bsp: $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$. $R > 0$



$$\int_K dx dy = ?$$

$T: \text{Rechteck} \rightarrow K$? Polarkoordinaten: $T = (T_1, T_2)$. $x = T_1(r, \theta) := r \cos \theta$ $B = [0, R] \times [0, 2\pi]$
 $y = T_2(r, \theta) := r \sin \theta$

$$\det DT = \det \begin{pmatrix} \partial_r T_1 & \partial_\theta T_1 \\ \partial_r T_2 & \partial_\theta T_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

$$\int_K dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^2$$

INTEGRATION ÜBER UNTERMANNIGFALTIGKEITEN

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dim Untermannigkeit. Wir wollen ein Integral $\int_M f dS$ einer stetigen Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ entlang M einführen. Für $k=1$ soll dies das Kurvenintegral $\int_{M=Y} f ds = \int_a^b f(x(t)) \cdot \|x'(t)\| dt$ sein.
 Wenn $f=1$ auf γ , dann $\int_\gamma ds = L(\gamma)$, die Länge der Kurve, d.h. das "1-dim. Volumen" der Kurve γ .
 Dies soll dann auch allg. gelten: $\int_M dS = \text{vol}(M)$ k -dim Volumen

Zunächst Ebenen in \mathbb{R}^3 : Sei $\varphi = A: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ lin. und inj. (d.h. $\text{Rg} A = 2$)

$M^2 := A(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$. $Q := [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, $P := A(Q)$ Parallelogramm "Flächeninhalt" $\text{vol}(P) = ?$

Idee: Es gibt eine Rotation $R \in O(3)$ mit $R(P) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y,z) = (x,y)$.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Def: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{B} \mathbb{R}^2$ $B := \pi \circ R \circ A$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^2 \\ A \downarrow & & \uparrow \pi \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{R} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Transformationsregel: $\int_{B(Q)} dx dy = \int_Q |\det DB| dt$ $B(Q) = \pi R A(Q) = \pi R(P)$
 $\int_{B(Q)} dx dy = \int_{\pi R(P)} dx dy = \text{vol}(\pi R(P)) = \text{vol}(P)$

$\Rightarrow \int_P dS = \text{vol}(P) = \int_Q |\det DB| dt$

Also berechnen wir det DB

Zunächst R : Seien v_1, v_2, v_3 die Zeilenvektoren von R . $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

$M = \mathbb{R}^3 - \text{span}\{A_1, A_2\}$

$N := A_1 \times A_2 \Rightarrow N \perp A_1, N \perp A_2$

$\Rightarrow N \perp M \xrightarrow{R \text{ orthogonal}} R(N) \perp R(M) = \mathbb{R}^2 \times 0$

$\begin{pmatrix} \langle v_1, N \rangle \\ \langle v_2, N \rangle \\ \langle v_3, N \rangle \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 \perp N, v_2 \perp N$ Gram-Schmidt:

$v_1 := \frac{A_1}{\|A_1\|}$, $R_2 = A_2 - \langle A_2, v_1 \rangle v_1$, $v_2 = R_2 / \|R_2\| \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ orthogonal. $v_3 = N / \|N\| \Rightarrow$ Damit ist R vollst. best.

01/07/15 $M^k \subset \mathbb{R}^n$, $\int_M f dS = ?$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

Spezialfall: Ebene $M^2 = A(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$, $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear + injektiv. $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. $P := A(Q)$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{B} \mathbb{R}^2$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $R \in O(3)$ orthogonal, $R(M) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. $R = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Zeilenvektoren

$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ Rotationsmatrix die M zurück rotiert in xy -Ebene

$B = \pi \circ R \circ A$

Kommutativ

$$\int_P dS = \int_Q |\det DB| dt, \quad t = (t_1, t_2) \in Q \quad B \text{ lin} \Rightarrow DB = B \Rightarrow \text{nur noch } \det \text{ von } B \text{ bestimmen}$$

$$v_1 = \frac{A_1}{\|A_1\|} \quad R_2 := A_2 - \langle A_2, v_1 \rangle v_1, \quad v_2 := \frac{R_2}{\|R_2\|}, \quad v_3 := \frac{N}{\|N\|}, \quad N = A_1 \times A_2$$

Normalenvektor



$$\det B = ? \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot (A_1 | A_2) = \begin{pmatrix} \langle v_1, A_1 \rangle & \langle v_1, A_2 \rangle \\ \langle v_2, A_1 \rangle & \langle v_2, A_2 \rangle \\ \langle v_3, A_1 \rangle & \langle v_3, A_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det B = \underbrace{\langle v_1, A_1 \rangle}_{=0} \cdot \langle v_2, A_2 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{A_1}{\|A_1\|}, A_1 \right\rangle = \|A_1\|$$

$v_2 \perp v_1, v_3$ Vielfaches A_1
 $\Rightarrow v_2 \perp A_1 \Rightarrow = 0$

$$\langle R_2, R_2 - A_2 \rangle = \langle R_2, -\langle A_2, v_1 \rangle v_1 \rangle = -\langle A_2, v_1 \rangle \cdot \underbrace{\langle R_2, v_1 \rangle}_{=0 \text{ da } R_2 \perp v_1} = 0$$

$$\|R_2\|^2 = \langle R_2, A_2 \rangle = \langle \|R_2\| \cdot v_2, A_2 \rangle \Rightarrow \langle v_2, A_2 \rangle = \|R_2\|$$

$$\Rightarrow \det B = \|A_1\| \cdot \|R_2\| \quad (\det B)^2 = \|A_1\|^2 \cdot \langle R_2, A_2 \rangle = \|A_1\|^2 \cdot \langle A_2 - \langle A_2, v_1 \rangle v_1, A_2 \rangle$$

$$= \|A_1\|^2 \cdot (\|A_2\|^2 - \|A_1\|^2 \cdot \langle A_2, v_1 \rangle^2) = \|A_1\|^4 \cdot (\|A_2\|^2 - \langle A_1, A_2 \rangle^2) = \|A_1 \times A_2\|^2$$

$$|\det B| = \|A_1 \times A_2\| = \|N\| \quad \Rightarrow \int_P dS = \int_Q \|A_1 \times A_2\| dt_1 dt_2$$

Eine andere Perspektive: Parametrisierungen $\varphi: T \rightarrow M$.

Im Fall der Ebene: $T = \mathbb{R}^2, \varphi = A$. $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$. $D_i \varphi := \begin{pmatrix} \partial_i \varphi_1 \\ \partial_i \varphi_2 \\ \partial_i \varphi_3 \end{pmatrix}, i = 1, 2$.

Def: $g_{ij}(t) = \langle (D_i \varphi)(t), (D_j \varphi)(t) \rangle \quad 1 \leq i, j \leq 2$ \uparrow 4 Fktn in 2×2 Matrix $G = (g_{ij})_{i,j}$ "Metrisensor"

$\det(g_{ij}(t)) = \det G =: g(t)$ "Gramsche Determinante"

$$G = (D\varphi)^T \cdot (D\varphi) = A^T \cdot A$$

Wir zitieren folgende Prop. aus LA:

Prop: Sei $k \leq n$ und seien A, B $(n \times k)$ -Matrizen. Für $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ bezeichne $A_{i_1 \dots i_k}$ die $(k \times k)$ -Matrix bestehend aus den Zeilen i_1, \dots, i_k von A . (Analog für B .) Dann gilt:

$$\det \underbrace{(A^T B)}_{k \times k} = \sum_{i_1, \dots, i_k} \det(A_{i_1 \dots i_k}) \cdot \det(B_{i_1 \dots i_k})$$

$$\Rightarrow g = \det G = \det((D\varphi)^T \cdot (D\varphi)) = \det(A^T A) = \det^2(A_{1,2}) + \det^2(A_{1,3}) + \det^2(A_{2,3})$$

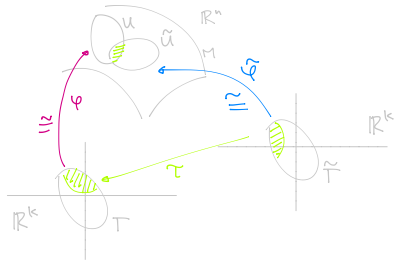
$$= \det^2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det^2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \det^2 \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \|A_1 \times A_2\|^2 = \|N\|^2$$

$$\int_P dS = \int_Q \sqrt{g(t)} dt_1 dt_2$$

Def. Bereich d. Karte

Der allg. Fall: Sei $M^k \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dim Untermannigkeit und (U, φ) eine Karte von M . U offen in M , $\varphi: T \xrightarrow{\cong} U$ und C^1 -Immersion. $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_k \\ \vdots \end{pmatrix}$ ($\partial_i \varphi(t) := \begin{pmatrix} \partial_i \varphi_1 \\ \vdots \\ \partial_i \varphi_k \\ \vdots \end{pmatrix}$) $i=1, \dots, k$.
 $g_{ij}(t) := \langle \partial_i \varphi(t), \partial_j \varphi(t) \rangle \in \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} g_{ij}: T \rightarrow \mathbb{R}$. ($1 \leq i, j \leq k$).
 $G = (g_{ij}(t))_{i,j}$ $k \times k$ -Matrix, der "Maßstensor"
 $g(t) := \det G(t)$ "Gramsche Determinante". $G = (D\varphi)^T (D\varphi)$

Wie verhält sich die Gramsche Det. unter Kartenwechsel? Sei $\tilde{\varphi}: \tilde{T} \rightarrow U$ eine weitere Karte, $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$



$$\tau := \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}: \tilde{T} \xrightarrow{\mathbb{R}^k} T \xrightarrow{\mathbb{R}^k} U$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi \circ \tau$$

$$D\tilde{\varphi} = D\varphi \cdot D\tau$$

$$\tilde{G} = (D\tilde{\varphi})^T (D\tilde{\varphi}) = (D\tau)^T (D\varphi)^T \cdot (D\varphi) \cdot (D\tau) = (D\tau)^T \cdot G \cdot (D\tau)$$

$$\Rightarrow \tilde{g} = \det \tilde{G} = \det (D\tau)^2 \cdot \det G = \det (D\tau)^2 \cdot g$$

$$\tilde{g}(\tilde{t}) = (\det (D\tau)(\tilde{t}))^2 \cdot g(\tau(\tilde{t})) \quad \text{Transformationsregel}$$

Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\text{supp}(f) \subset U = \varphi(T)$. Dann setzen wir $\int_M f(x) dS(x) := \int_T f(\varphi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} dt$
 Dies ist tatsächlich unabh. von der Wahl der Karte $\varphi: (U = \tilde{U})$.
 $\int_T f(\varphi(\tilde{t})) \cdot \sqrt{\tilde{g}(\tilde{t})} d\tilde{t} = \int_T f(\varphi(\tau(\tilde{t}))) \cdot \sqrt{(\det (D\tau)(\tilde{t}))^2 \cdot g(\tau(\tilde{t}))} \cdot d\tilde{t} \stackrel{\text{Transform. regel}}{=} \int_T f(\varphi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} dt$ } gleich

Wir behandeln nur den Fall, in dem sich M durch endl. viele Karten $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_r, \varphi_r)$ überdecken lässt.
 Dann \exists eine Partition d. 1, $\psi_1, \dots, \psi_r: M \rightarrow [0, 1]$, $\text{supp}(\psi_i) \subset U_i$, $\psi_1 + \dots + \psi_r = 1$.
 $f(\psi_1 f) + \dots + f(\psi_r f)$, $\text{supp}(\psi_i f) \subset U_i \Rightarrow \int_M \psi_i f dS$ ist schon erklärt.

Def: $\int_M f dS := \sum_{i=1}^r \int_M \psi_i f dS$

03/07/15 $\varphi: T \xrightarrow{\cong} U$ k -dim. Untermannf. $M \subset \mathbb{R}^n$. Wenn $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{supp}(f) \subset U$:

$$\int_M f(x) dS(x) := \int_T f(\varphi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} dt \quad t \in T, t = (t_1, \dots, t_k)$$

Für allg. f : Wenn $M = U_1 \cup \dots \cup U_r$, (φ_i, U_i) Karten für M , dann wählen wir eine Partition der Eins $\psi_1 + \dots + \psi_r = 1$ überall. $f = 1 \cdot f = (\psi_1 + \dots + \psi_r) \cdot f = \sum \psi_i f$. Wir setzen $\int_M f(x) dS(x) := \sum_{i=1}^r \int_M \psi_i f(x) dS(x)$. Dies ist wohldef., d.h. unabh. von der Wahl der ψ_i : Sei $\beta_1, \dots, \beta_s: M \rightarrow [0, 1]$ eine weitere Partition d. 1, so $\text{supp}(\beta_j) \subset \tilde{U}_j$, $\sum \beta_j = 1$, $M = \tilde{U}_1 \cup \dots \cup \tilde{U}_s$, $(\tilde{\varphi}_j, \tilde{U}_j)$ Karten von M .

$$\sum \psi_i \beta_j = \beta_j \quad \sum \psi_i \beta_j = \psi_i \quad \sum_i \int_M \psi_i f dS = \sum_i \sum_j \int_M \psi_i \beta_j f dS = \sum_{i,j} \int_M \psi_i \beta_j f dS = \sum_j \int_M \beta_j f dS = \sum_j \int_M \beta_j f dS$$

BEISPIELE

① Kurven: $k=1$. $\varphi(t) = \gamma(t)$, $\gamma: T \xrightarrow{\mathbb{R}^2} M = \gamma(T)$. $g_{tt}(t) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \|\gamma'(t)\|^2$. $G = (g_{tt})$ 1×1 Matrix,
 $g(t) = \|\gamma'(t)\|^2 \Rightarrow \sqrt{g(t)} = \|\gamma'(t)\|$.
 $\int_M F(x) dS(x) = \int_T F(\gamma(t)) \cdot \sqrt{g(t)} dt = \int_T F(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_\gamma F ds$.

② Flächen: $k=2$. Wir haben gesehen, dass in diesem Fall $g(t) = \|\partial_t \varphi \times \partial_z \varphi\|^2$. $\varphi: T \rightarrow M$, $T \subset \mathbb{R}^2$.
 $\int_{M^2} F(x) dS(x) = \iint_T F(\gamma(t_1, t_2)) \cdot \|\partial_{t_1} \varphi \times \partial_{t_2} \varphi\| dt_1 dt_2$. **"Flächenintegral"**

• Oft werden Flächen parametrisiert durch $\varphi(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ h(t_1, t_2) \end{pmatrix}$ $h: T \rightarrow \mathbb{R}$



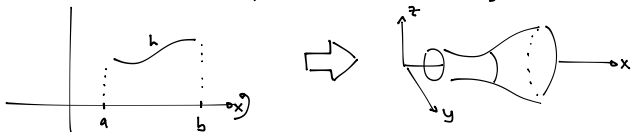
$M^2 = \text{Graph von } h \text{ über } T$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_1 h & \partial_2 h \end{pmatrix}, \quad G = (D\varphi)^T (D\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \partial_2 h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_1 h & \partial_2 h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (\partial_1 h)^2 & \partial_1 h \partial_2 h \\ \partial_1 h \partial_2 h & 1 + (\partial_2 h)^2 \end{pmatrix}$$

$$g(t) = \det G = (1 + (\partial_1 h)^2)(1 + (\partial_2 h)^2) - (\partial_1 h \partial_2 h)^2 = 1 + (\partial_1 h)^2 + (\partial_2 h)^2$$

$$\Rightarrow \int_M F dS = \iint_T F(t_1, t_2, h(t_1, t_2)) \cdot \sqrt{1 + (\partial_1 h)^2 + (\partial_2 h)^2} dt_1 dt_2$$

► **Rotationsflächen**: Sei $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt einer Variablen. Rotiert man den Graph von h um die x -Achse, dann entsteht eine sog. Rotationsfläche M^2 :



Folgende Parametrisierung bietet sich an: $\varphi(x, \theta) = (x, h(x) \cdot \cos \theta, h(x) \cdot \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $x \in [a, b]$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h' \cos \theta & -h \sin \theta \\ h' \sin \theta & h \cos \theta \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h'^2 & h' h'' \\ 0 & h' h'' & h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + h'^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

abh. nach x abh. nach θ hängt nicht von θ ab

$$g(t) = h^2 (1 + h'^2) \cdot \iint_T dS = \int_0^{2\pi} \int_a^b |h| \cdot \sqrt{1 + h'^2} dx d\theta = 2\pi \cdot \int_a^b |h(x)| \cdot \sqrt{1 + h'(x)^2} dx$$

Rot. Fläche

DIE KLASSISCHEN INTEGRALSÄTZE VON GREEN, STOKES UND GAUSS

① **Satz von Green in der Ebene** (über Normalbereiche B).

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich $B = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [\phi(x), \psi(x)]\}$, $\phi, \psi: [a, b] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, $\phi \leq \psi$

Sei ∂B der Rand von B . $\square \partial(X \times Y) = (\partial X) \times Y \cup X \times (\partial Y)$ (Produktregel \Rightarrow deshalb Abhängigkeitssymbol)

Wir orientieren ∂B gegen den Uhrzeigersinn. $\partial B = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ (stückweise C^1)

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $B \subset U$ und $P: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 Fkt. 1-Form $\omega = P dx + 0 dy$.

Wir berechnen $\int_B \omega$. Parametrisierungen: $C_1: \gamma_1(x) = (x, \phi(x))$, $x \in [a, b]$

$$C_2: \gamma_2(y) = (b, y), y \in [\phi(b), \psi(b)]$$

$$-C_3: \gamma_3(x) = (x, \psi(x)), x \in [a, b]$$

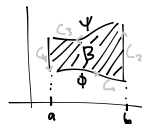
$$-C_4: \gamma_4(y) = (a, y), y \in [\phi(a), \psi(a)]$$

$$\gamma_1'(x) = (1, \phi'(x))$$

$$\gamma_2'(y) = (0, 1)$$

$$\gamma_3'(x) = (1, \psi'(x))$$

$$\gamma_4'(y) = (0, 1)$$



$$\int_{C_1} \omega = \int_a^b P dx = \int_a^b \left(P(\gamma_1(x)) \cdot \underbrace{\gamma_1'(x)}_{=1} + 0 \cdot \left(\gamma_2'(x) \right) \right) dx = \int_a^b P(x, \phi(x)) dx$$

$$w = P dx + Q dy$$

hier Q=0

$$\int_{C_2} \omega = \int_{\phi(a)}^{\psi(b)} P(\gamma_2(y)) \cdot \underbrace{\gamma_2'(y)}_{=0} + 0 \cdot \dots dy = 0$$

$$\int_{C_3} \omega = - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx \quad \int_{C_4} \omega = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial B} \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega + \int_{C_3} \omega + \int_{C_4} \omega = \int_a^b \underbrace{(P(x, \psi(x)) - P(x, \phi(x)))}_{\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} -\partial_y P dy} dx = \iint_B -\partial_y P dx dy$$

Wir haben gezeigt:

Lemma 1: $\int_{\partial B} P dx = \iint_B -\partial_y P dx dy$

Analog zeigt man für $w = Q dy, Q: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$:

Lemma 2: $\int_{\partial B} Q dy = \iint_B \partial_x Q dx dy$ (kein Minus)

SATZ VON GREEN: $\oint_{\partial B} \underbrace{(P dx + Q dy)}_{1\text{-Form } \omega} = \iint_B (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy$ Bew.: Lemma 1 + 2

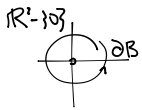
Bem: Der Satz von Green stimmt auch für Bereiche B , die sich in endl. viele Normalbereiche zerlegen lassen:



Korollar: $Q = x, P = -y \Rightarrow \iint_B (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy = \iint_B 2 dx dy = 2 \cdot (\text{Fläche von } B)$
 $\Rightarrow \text{Fläche von } B = \frac{1}{2} \oint_{\partial B} (x dy - y dx)$

reell wertige Fkt mit 2 Variablen

8/7/15 Satz von Green in der Ebene: $B \subset \mathbb{R}^2, \text{Rand } \partial B. \oint_{\partial B} (P dx + Q dy) = \iint_B (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy$ (*)

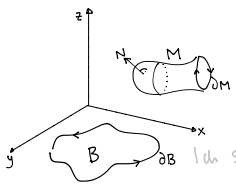


Ist C eine einfach geschlossene Kurve in $U \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^2$, wobei U der Def-Bereich von $w = P dx + Q dy$ ist, und ist w geschl., dann gilt $\partial_x Q - \partial_y P = 0$. Gibt es einen Komp. Bereich B mit $\partial B = C$ & der Greensche Satz gilt für B , dann folgt aus (*), dass $\oint_{\partial B} w = 0$.

Eine Verallgemeinerung des Satzes von Green ist der Satz von Stokes, bei dem man nicht nur Flächen $B \subset \mathbb{R}^2 \times 0 \subset \mathbb{R}^3$ betrachtet, sondern allgemeiner Flächen (kompakt) $M \subset \mathbb{R}^3$.

Situation: $T \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^2$, $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^2 -Immersion, $\varphi: T \rightarrow \varphi(T)$ Homöom. Sei $B \subset T$ ein Komp. Bereich auf dem der Satz von Green anwendbar ist, zB ein Normalbereich. $M = \varphi(B) \Rightarrow M$ ist komp. Fläche in \mathbb{R}^3 . ∂M sei der Rand von M , ∂B der Rand von B . $\partial M = \varphi(\partial B)$

Wir orientieren ∂B entgegen dem Uhrzeigersinn. Über $\varphi: \partial B \rightarrow \partial M$ induziert diese Orientierung eine Orientierung von ∂M . Wir setzen $N := \partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi$ (Normalenvektor auf M). $n := \frac{N}{\|N\|}$ (n der Einheitsnormalenvektor auf M) $\rightarrow (N_1, N_2, N_3)$



M zu meiner Linken

∂y vs. ∂z ?
 \downarrow bei $M \rightarrow -x, y, z$
 \downarrow bei $B \rightarrow -1, 2$

Ich spaziere auf Rand \Rightarrow Fläche immer links.

SATZ VON STOKES

Sei $V = (V_1, V_2, V_3): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld, wobei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $M \subset U$.

Dann gilt: $\int_{\partial M} (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz) = \iint_M \langle \text{rot } V, n \rangle dS$

Bew: Zunächst für $V = (V_1, 0, 0)$ (dh $V_2 = V_3 = 0$)

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung von ∂B . (γ soll die Orientierung von ∂B respektieren).

Dann ist $\alpha(t) := (\varphi \circ \gamma)(t)$, $t \in [a, b]$, eine Parametrisierung von ∂M , die die Orientierung von ∂M respektiert.

$\int_{\partial M} V_1 dx = \int_a^b V_1(\alpha(t)) \cdot \alpha'_1(t) dt$ \star

$\alpha'(t) = (D\varphi)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \partial_2 \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & \partial_2 \varphi_2 \\ \partial_1 \varphi_3 & \partial_2 \varphi_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_1 \varphi_1)(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + (\partial_2 \varphi_1)(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) \\ * \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \alpha'_i(t)$

$\star = \int_a^b \left[(V_1 \circ \varphi)(\gamma(t)) \cdot \partial_1 \varphi_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + (V_1 \circ \varphi)(\gamma(t)) \cdot \partial_2 \varphi_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) \right] dt$

$= \int_{\partial B} \left[\underbrace{(V_1 \circ \varphi)(t_1, t_2) \cdot \partial_1 \varphi_1(t_1, t_2)}_P dt_1 + \underbrace{(V_1 \circ \varphi)(t_1, t_2) \cdot \partial_2 \varphi_1(t_1, t_2)}_Q dt_2 \right] = 1\text{-Form auf } B$

$\stackrel{\text{Satz von Green}}{=} \iint_B (\partial_1 Q - \partial_2 P) dt_1, dt_2$

$\partial_1 Q = \partial_1 ((V_1 \circ \varphi) \cdot \partial_2 \varphi_1) \stackrel{\text{Prod. Regel}}{=} \partial_1 (V_1 \circ \varphi) \cdot \partial_2 \varphi_1 + (V_1 \circ \varphi) \cdot \partial_1 \partial_2 \varphi_1$
 $\partial_2 P = \partial_2 ((V_1 \circ \varphi) \cdot \partial_1 \varphi_1) \stackrel{\text{Prod. Regel}}{=} \partial_2 (V_1 \circ \varphi) \cdot \partial_1 \varphi_1 + (V_1 \circ \varphi) \cdot \partial_2 \partial_1 \varphi_1$
 $\ominus = \partial_1 (V_1 \circ \varphi) \cdot \partial_2 \varphi_1 - \partial_2 (V_1 \circ \varphi) \cdot \partial_1 \varphi_1$

gleichs nach Schwarz da $\phi \in C^2$

$\partial_1 (V_1 \circ \varphi) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \partial_x V_1 \cdot \partial_1 \varphi_1 + \partial_y V_1 \cdot \partial_1 \varphi_2 + \partial_z V_1 \cdot \partial_1 \varphi_3$

$\partial_2 (V_1 \circ \varphi) = \partial_x V_1 \cdot \partial_2 \varphi_1 + \partial_y V_1 \cdot \partial_2 \varphi_2 + \partial_z V_1 \cdot \partial_2 \varphi_3$

$\partial_1 Q - \partial_2 P = \partial_x V_1 \cdot \partial_1 \varphi_1 \cdot \partial_2 \varphi_1 + \partial_y V_1 \cdot \partial_1 \varphi_2 \cdot \partial_2 \varphi_1 + \partial_z V_1 \cdot \partial_1 \varphi_3 \cdot \partial_2 \varphi_1$
 $- \partial_x V_1 \cdot \partial_2 \varphi_1 \cdot \partial_1 \varphi_1 + \partial_y V_1 \cdot \partial_2 \varphi_2 \cdot \partial_1 \varphi_1 + \partial_z V_1 \cdot \partial_2 \varphi_3 \cdot \partial_1 \varphi_1$
 $= -\partial_y V_1 (\partial_2 \varphi_2 \cdot \partial_1 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_2 \cdot \partial_2 \varphi_1) + \partial_z V_1 (\partial_2 \varphi_3 \cdot \partial_1 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_3 \cdot \partial_2 \varphi_1)$
 $= -\partial_y V_1 \cdot N_3 + \partial_z V_1 \cdot N_2$

Bew: $\int_{\partial M} V_i dx = \iint_B (-\partial_z V_i \cdot N_3 + \partial_z V_i \cdot N_z) dt_1 dt_2$

$$\begin{aligned} \iint_M \langle \text{rot } V, n \rangle dS &= \iint_M \langle \text{rot } (V_i, 0, 0), n \rangle dS = \iint_M \langle 0, \partial_z V_i, -\partial_y V_i \rangle \cdot (n_1, n_2, n_3) dS = \iint_M (\partial_z V_i \cdot n_2 - \partial_y V_i \cdot n_3) dS \\ &= \int_B \left(\partial_z V_i \cdot \frac{N_2}{\|N\|} - \partial_y V_i \cdot \frac{N_3}{\|N\|} \right) \cdot \|N\| \cdot dt_1 dt_2 = \iint_B (\partial_z V_i \cdot N_2 - \partial_y V_i \cdot N_3) dt_1 dt_2 = \int_{\partial M} V_i dx \quad \square \end{aligned}$$

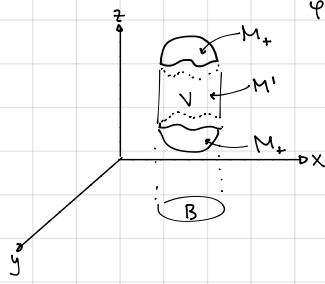
dann $(0, V_2, 0)$ und $(0, 0, V_3)$ analog.

Aus der Beziehung $\text{rot}(V_1, V_2, V_3) = \text{rot}(V_1, 0, 0) + \text{rot}(0, V_2, 0) + \text{rot}(0, 0, V_3)$ folgt dann der Satz für allg. V . \blacksquare

Eine zu Green bzw Stokes analoge Aussage für "Vollkörper" V mit Randfläche ∂V ist der **DIVERGENZSATZ v. GAUSS**

Stokes	Gauss
Fläche M	Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$
Randkurve ∂M	Randfläche ∂V
Kurvenintegral	Flächenintegral
rot	div

Situation: Sei V ein "Normalbereich" bzgl der xy -Ebene, d.h. $V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B, z \in [\varphi(x, y), \psi(x, y)] \} \subset \mathbb{R}^3$ wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ komp ist, ∂B Rand C^1 . $\varphi, \psi: B \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}, \varphi \leq \psi \quad \forall x \in B$.



$$\begin{aligned} \partial V &= M_- \cup M' \cup M_+ \\ M_+ &= \{ (x, y, \psi(x, y)) \mid (x, y) \in B \} \\ M_- &= \{ (x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in B \} \\ M' &= \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in \partial B, z \in [\varphi(x, y), \psi(x, y)] \} \end{aligned}$$

