

Vorlesungsmitschrift

Theoretische Physik III Elektrodynamik

Dozent Prof. Dr. Ulrich Schwarz

WS 2014/15

Stand January 25, 2015



Universität Heidelberg
Institut für Theoretische Physik

Inhaltsverzeichnis

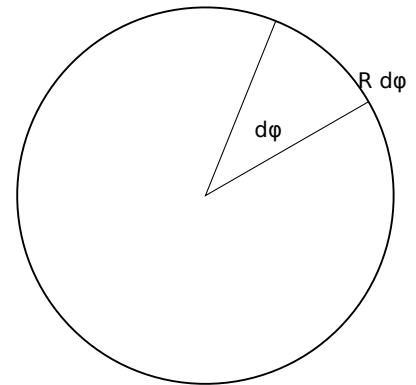
1	Elektrostatik	3
1.1	Notation	3
1.2	Mathematischer Einschub 1: Vektorfelder	5
1.3	Coulombgesetz und Feldgleichungen	19
1.4	Randwertprobleme und Greensche Funktionen	28
1.5	Numerische Loesung des Randwertproblems	34
1.6	Entwicklung in spezielle Funktionen	36
1.7	Mathematischer Einschub 2: Fourier-Entwicklung	37
2	Magnetostatik	48
2.1	Stationaere Stroeme und Magnetfelder	48
2.2	Die Feldgleichungen der Magnetostatik	50
2.3	Lokalisierte Stromverteilungen	54
3	Elektrodynamik	58
3.1	Maxwell-Gleichungen	58
3.2	Potentiale	59
3.3	Einschub: Wellengleichungen	60
3.4	Elektromagnetische Wellen (im Vakuum)	65
3.5	Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes	65
3.6	Dipolstrahlung	67
4	Elektrodynamik in Materie	72
4.1	Makroskopische Maxwellgleichungen	72
4.2	Elektromagnetische Wellen in Materie	76
4.3	Optik: Brechung und Reflexion	77
5	Kovarianz und Lagrangeformalismus	79

1 Elektrostatik

1.1 Notation

- Ortsvektor: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- Skalarprodukt: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta) = \sum_i a_i b_i = a_i b_i$ (Einstein Konvention)
- Linienintegral einer Funktion f entlang einer Raumkurve $\mathbf{r}(t)$: $\int f(\mathbf{r}(t)) dt$

z.B. Kreislinie: $L = \int_0^{2\pi} d\phi R = 2\pi R$

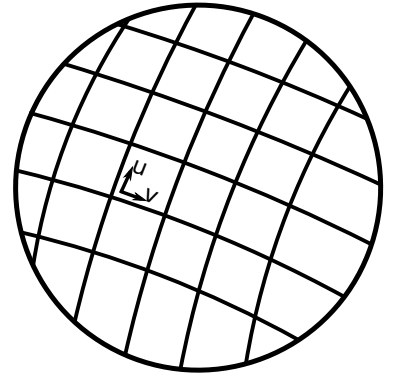


- Oberflächenintegral einer Funktion ueber eine Flaeche. u,v beschreiben die internen Koordinaten der Flaeche $\mathbf{r}(u, v)$: $\int f(\mathbf{r}(u, v)) dudv$

z.B. Kreisflaeche ($u = \phi, v = r$): $A = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr = \pi R^2$

z.B. Kugeloberflaeche : $A = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} R^2 \sin(\theta) d\theta = 4\pi R^2$

$(u = \phi, v = \theta)$



- Normalenvektor der durch \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 aufgespannten Tangentialebene:

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{t}_1(u, v) \times \mathbf{t}_2(u, v)}{|\mathbf{t}_1(u, v) \times \mathbf{t}_2(u, v)|}, \quad \mathbf{t}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u}, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}$$

- $\partial V \cong$ Rand von V , wobei V eine Punktmenge ist, z.B. $V =$ Kugel und $\partial V =$ Kugeloberflaeche.

- z.P. \cong zyklische Permutation

- Partielle Ableitungen: $\frac{\partial}{\partial r_i} = \partial_i, \frac{\partial}{\partial r'_i} = \partial'_i$

- Nabla-Operator: $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}$

- Laplace-Operator: $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \partial_i \partial_i, \Delta' = \partial'_i \partial'_i$

1.2 Mathematischer Einschub 1: Vektorfelder

Eine typische Anwendung von Vektorfeldern ist das Fließen einer Flüssigkeit (Hydrodynamik). Man ist eventuell daran interessiert, wie viele Teilchen pro Zeit durch eine Fläche A gehen. Sei $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit am Ort \mathbf{r} .

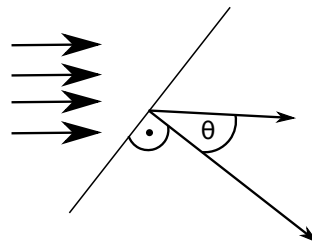
- Im Folgenden Fläche senkrecht zur Geschwindigkeit:

$$\Delta N = \rho \Delta V = \rho A \Delta s = \rho A v \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t A} = \rho v =: j \text{ "Stromdichte"}$$

Der Gesamtstrom durch die Fläche errechnet sich nun zu:

$$I_A = j A = \rho v A = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

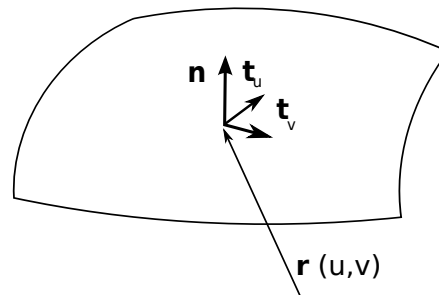
- Gekippte Fläche:



Charakterisiere die Fläche durch den Vektor \mathbf{A} mit $|\mathbf{A}| = A$, $\mathbf{A} \parallel \mathbf{n}$

$$\Rightarrow I_A = \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{j} := \rho \mathbf{v}$$

- Beliebige Flächen:



$$I_A = \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA \approx \sum_{i=1}^N \rho \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_i \frac{\Delta A_i}{V} \text{ ("Riemannsche Diskretisierung des Integrals")}$$

i nummeriert die Plaquettes, in die wir die Fläche aufteilen. Im Folgenden arbeiten wir mit \mathbf{v} als Beispiel fuer ein beliebiges Vektorfeld.

$I_A = \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ ist dann ein Mass fuer die Durchdringung der Fläche A durch das Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$.

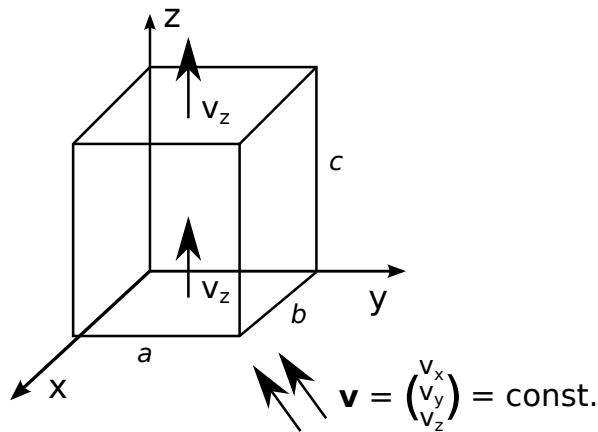
Wir betrachten I_A jetzt fuer **geschlossene** Flaechen A , die ein Volumen einschliessen.

Beispiel 1.

$$\mathbf{v} \equiv \text{const}, \quad V = \text{Quader mit Seitenlaengen } a, b, c$$

Fluss von \mathbf{v} durch die Flaechen A berechnet sich durch:

$$I_A = \oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \approx \sum_{i=1}^6 \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \mathbf{n}_i A_i = v_z ab - v_z ab + v_y ca - v_y ca + v_x bc - v_x bc = 0$$



"Was reinkommt, geht auch wieder raus"

Der Gesamtfluss I_A verschwindet fuer $\mathbf{v} \hat{=} \text{const}$ fuer beliebige geschlossene Flaechen. Der Beweis folgt spaeter.

Beispiel 2 (radialsymmetrisches Feld).

$$\mathbf{v} := v(r) \mathbf{e}_r$$

Wir berechnen den Fluss ueber eine Kugelflaechen mit Radius R

$$I_A = \oint_A \mathbf{v} d\mathbf{A} = \oint_A \mathbf{v}(r) \underbrace{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r}_{=1} dA = v(R) 4\pi R^2$$

$$I_A(R) \equiv \text{const} \Rightarrow v(R) \sim \frac{1}{R^2}$$

Wir wollen nun ein lokales Mass fuer die Durchdringung von geschlossenen Flaechen bzw. ein Mass fuer die lokale Quelledichte eines Vektorfeldes definieren.

Definition (Divergenz des Vektorfeldes).

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) := \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{A=\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}$ ist quellenfrei,

$\operatorname{div} \mathbf{v} > 0 \Rightarrow$ es existieren Quellen,

$\operatorname{div} \mathbf{v} < 0 \Rightarrow$ es existieren Senken.

Bemerkung. $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r})$ ist ein skalares Feld

Im Folgenden berechnen wir die Divergenz mit Hilfe eines Quaders.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{1}{V} \oint_A \mathbf{v} d\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} [v_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z - v_x(x, y, z) \Delta y \Delta z \\ &+ v_y(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z - v_y(x, y, z) \Delta x \Delta z \\ &+ v_z(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y - v_z(x, y, z) \Delta x \Delta y] \\ &= \frac{v_x(x + \Delta x, y, z) - v_x(x, y, z)}{\Delta x} + \frac{v_y(x, y + \Delta y, z) - v_y(x, y, z)}{\Delta y} \\ &+ \frac{v_z(x, y, z + \Delta z) - v_z(x, y, z)}{\Delta z} \xrightarrow{V \rightarrow 0} \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z \\ &= \partial_i v_i = \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}} \end{aligned}$$

Beispiel.

- $\mathbf{v} \equiv \text{const} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$
- $\mathbf{v} = \mathbf{r} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{r} = 3$
- $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$ (Solche Felder haben konstanten Fluss I_A)

Hier gilt fuer $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{r} = \partial_x \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + z.P. \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{x \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + z.P. \\ &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \end{aligned}$$

Achtung: Fuer $\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{0}{0}$ "nicht definiert!"

Wir moechten nun das Integral der Divergenz ueber ein Volumen V mit $\partial V = A$ berechnen. Es gilt:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \Delta V_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \oint_{A_i} \mathbf{v} d\mathbf{A} = \oint_A \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

Bemerkung.

- Wir fuellen unser Volumen V mit hinreichend kleinen Quadern aus.
- Die A_i entsprechen den geschlossenen Oberflaechen dieser Quader.
- Alle internen Flaechenintegrale heben sich weg.

Die vorherige Rechnung begruendet den folgenden Satz:

Theorem (Integralatz von Gauss).

Fuer $A = \partial V$ gilt:

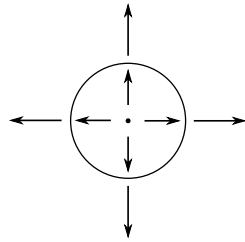
$$\boxed{\oint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV}$$

Bemerkung. Es existieren Mengen V fuer die der Satz nicht gilt! V muss kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n mit stueckweise glattem Rand sein. Zusaetzlich muss das Vektorfeld in einer offenen Menge stetig differenzierbar sein. Wir werden in dieser Vorlesung allerdings nur solche Faelle betrachten, die diese Vorraussetzungen erfuellen, da wir hier physikalische Felder behandeln, die in dieser Hinsicht gut definiert sind.

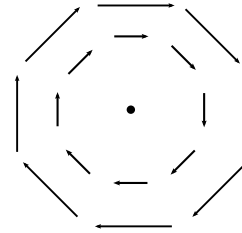
Erste physikalische Anwendung:

Wir wenden den Satz von Gauss auf die Stromdichte $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ an:

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_A &= \oint_{A=\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{j}}_{=\operatorname{div} \mathbf{j}} dV' = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV' = \int_V (-\dot{\rho}) dV' \\ &\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = -\dot{\rho} \Rightarrow \boxed{\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0} \hat{=} \text{"Kontinuitaetsgleichung"} \end{aligned}$$



keine Wirbel



starke Wirbel

Neben der Queldichte von Vektorfeldern ist eine weitere wichtige Eigenschaft ihre Wirbelstärke (d.h. die Existenz von Zirkulationen). Wir möchten diese im Folgenden charakterisieren. Hierzu verwenden wir die Zirkulation entlang eines geschlossenen Weges C , welcher eine planare Fläche A mit Normalenvektor \mathbf{n} berandet und betrachten den Grenzübergang $A \rightarrow 0$. Dies motiviert die folgende

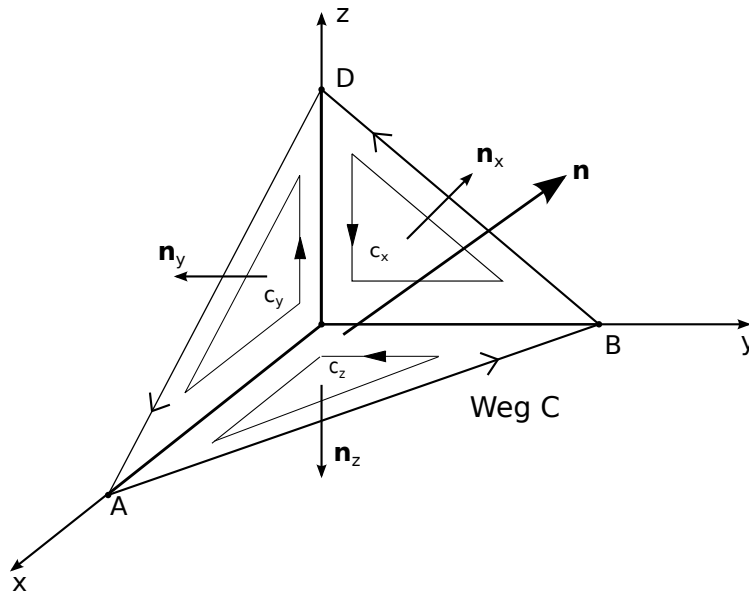
Definition (Rotation des Vektorfelds).

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} := \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{C=\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}, \quad \text{für } \mathbf{A} \parallel \mathbf{n}$$

Bemerkung.

- $\mathbf{n} \hat{=}$ Flächennormale
- $d\mathbf{s} = \mathbf{t} ds \hat{=}$ Linienelement
- $\mathbf{t} \hat{=}$ Tangentialvektor
- Im Gegensatz zur Divergenz ist die Rotation kein skalares, sondern ein vektorielles Vektorfeld, da sie abhängig von der Flächennormale \mathbf{n} ist.

Behauptung: Ein dreidimensionaler Vektor (*rotv*) beschreibt vollstaendig alle moeglichen Linienintegrale dieser Art. Man sagt die Darstellung ist koordinatenunabhaengig. Wir rechnen dies exemplarisch nach:



$$\text{Weg } C = A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$$

Wir zerlegen C in drei Teilwege, wodurch sich die Inneren Teile paarweise wegheben.

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_x} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_y} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_z} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

Es sei $A_x := \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_x = A \cos(\theta_x)$ mit $\theta_x = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{e}_x)$
 A_y, A_z seien analog definiert.

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} &= \lim_{A \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(\theta_x)}{\cos(\theta_x) A_x} \int_{C_x} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\cos(\theta_y)}{\cos(\theta_y) A_y} \int_{C_y} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\cos(\theta_z)}{\cos(\theta_z) A_z} \int_{C_z} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_x) \\ \cos(\theta_y) \\ \cos(\theta_z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lim_{A_x \rightarrow 0} \frac{1}{A_x} \int_{C_x} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \\ \lim_{A_y \rightarrow 0} \frac{1}{A_y} \int_{C_y} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \\ \lim_{A_z \rightarrow 0} \frac{1}{A_z} \int_{C_z} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{v} \\ &\Rightarrow \text{die kartesischen Komponenten genuegen.} \end{aligned}$$

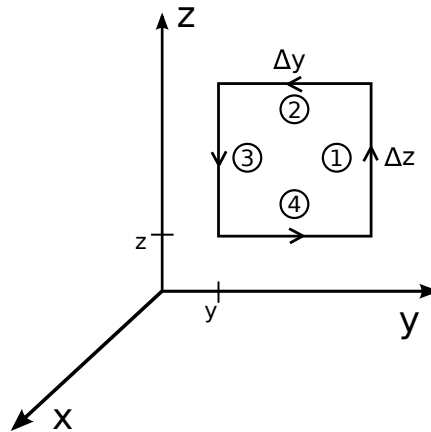
Lemma (Rotation als Differentialoperator).

Fuer die Rotation gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v} \\ (\operatorname{rot} \mathbf{v})_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k \\ \varepsilon_{ijk} &:= \begin{cases} 1, & \text{fuer positive Permutationen,} \\ -1, & \text{fuer negative Permutationen,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis.

Man zeigt komponentenweise die Behauptung:



$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{v})_x &= \frac{1}{\Delta y \Delta z} \oint_{C_x} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \frac{1}{\Delta y \Delta z} [v_z(x, y + \Delta y, z) \Delta z - v_z(x, y, z) \Delta z + v_y(x, y, z + \Delta z) \Delta y + v_y(x, y, z) \Delta y] \\ &= \frac{v_z(x, y + \Delta y, z) - v_z(x, y, z)}{\Delta y} - \frac{v_y(x, y, z + \Delta z) - v_y(x, y, z)}{\Delta z} \\ &= \partial_y v_z - \partial_z v_y \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{v})_y &= \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ (\operatorname{rot} \mathbf{v})_z &= \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{aligned}$$

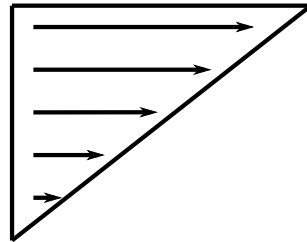
□

Beispiel.

- *Scherfluss*

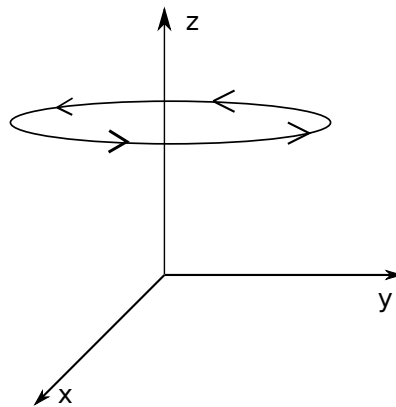
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ az \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Interpretation: Richtung und Betrag der Drehung eines Testteilchens.



- $\mathbf{v} \equiv \text{const} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$

- $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$



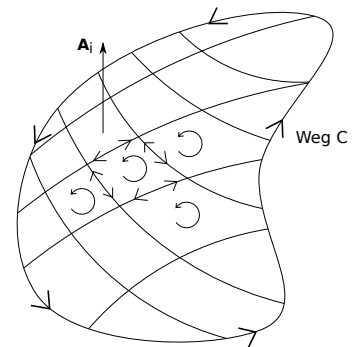
- $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ radialsymmetrisch $\Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fuer ein Vektorfeld ergeben sich also zwei wichtige abgeleitete Groessen:

Name	Divergenz	Rotation
Bedeutung	Quellendichte	Wirbelstaerke
Beispiel	$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{div}\mathbf{v} = 3, \text{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$	$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \text{rot}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{div}\mathbf{v} = 0$
Integraldarstellung	$\text{div}\mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{A=\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$	$(\text{rot}\mathbf{v})_i = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{C=\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ <small>$\mathbf{A} \parallel \mathbf{e}_i$</small>
Differentialdarstellung	$\text{div}\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_i v_i$	$\text{rot}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j v_k$

Theorem (Integralsatz von Stokes).

$$\int_A \text{rot}\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \approx \sum_{i=1}^N \text{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_i dA_i \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \stackrel{(*)}{=} \oint_{C=\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$



$$\Rightarrow \boxed{\int_A \text{rot}\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{C=\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}}$$

(*) "interne Strecken heben sich auf"

Korollar.

- Fuer ein wirbelfreies Vektorfeld ($\text{rot}\mathbf{v} = 0$) sind Linienintegrale wegunabhaengig, d.h.

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_A \nabla \times \mathbf{v} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

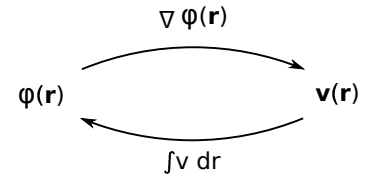
Wir definieren in so einem Fall:

$$\phi(\mathbf{r}) := \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \hat{=} \text{(skalares) potential des Vektorfeldes}$$

- Wegen der Wegunabhängigkeit ist ϕ (bis auf eine Integrationskonstante) eindeutig bestimmt.
- Man kann ϕ und \mathbf{v} wie folgt ineinander ueberfuehren:

$$d\phi = \partial_x \phi dx + \partial_y \phi dy + \partial_z \phi dz = \nabla \phi \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \int_{r_0}^r d\phi = \int_{r_0}^r \nabla \phi \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_0}^r \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \stackrel{\forall C}{\Rightarrow} \mathbf{v} = \nabla \phi$$



- Fuer den Wirbelfluss durch eine geschlossene Flaeche $A = \partial V$, $C = \partial A = 0$ (die Randkurve wird auf einen Punkt zusammengezogen!) gilt:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0 = \oint_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A}$$

D.h. Der Wirbelfluss $\nabla \times \mathbf{v}$ durch eine geschlossene Flaeche verschwindet fuer jedes Vektorfeld \mathbf{v} .

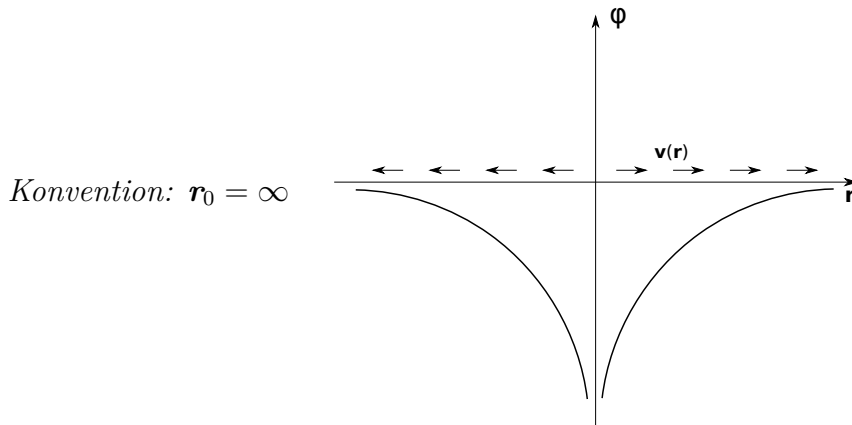
- Das gleiche Ergebnis liefert der Gauss'sche Satz:

$$\oint_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} = \int_V \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})}_{=\epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j v_k = 0} dV = 0$$

Beispiel.

- radialsymmetrisches Vektorfeld: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \mathbf{e}_r \Rightarrow I_A = 4\pi$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{v})_x &= \partial_y \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) - \partial_z \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{z \left(-\frac{3}{2}\right) 2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{y \left(-\frac{3}{2}\right) 2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \\ &\Rightarrow \text{wirbelfrei} \Rightarrow \text{Potential existiert: } \int_{r_0}^r \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dr = \int \frac{1}{r^2} dr = -\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \end{aligned}$$



Probe: $\mathbf{v} = \nabla\phi_i, v_i = \partial_i\left(-\frac{1}{r}\right) = \partial_i\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)_i = \left(\frac{(-1)(-\frac{1}{2})2r_i}{r^3}\right)_i = \frac{r}{r^3} \checkmark$

Theorem (1. Greenscher Satz).

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{r}) \\ \Rightarrow \operatorname{div}\mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a} = \partial_i a_i = \partial_i(\phi\partial_i\psi) = (\partial_i\phi)(\partial_i\psi) + \underbrace{\phi(\partial_i\partial_i\psi)}_{=\Delta} \\ \Rightarrow \int_V [(\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\Delta\psi] dV &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{A=\partial V} \phi \nabla\psi \cdot \mathbf{n} dA \end{aligned}$$

Mit der Normalenableitung: $\nabla\psi \cdot \mathbf{n} = \partial_n\psi = \partial_i\psi n_i = n_i\partial_i\psi = (\mathbf{n} \cdot \nabla)\psi =: \partial_n\psi$

$$\Rightarrow \boxed{\int_V [(\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\Delta\psi] dV = \oint_{A=\partial V} \phi \partial_n\psi dA} \hat{=} \mathbf{1. \textit{Greensche Identitaet}}$$

Theorem (2. Greenscher Satz).

Aus dem 1. Greenschen Satz erhaelt man durch Vertauschen von $\phi \leftrightarrow \psi$ und Subtraktion:

$$\Rightarrow \boxed{\int_V [\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi] dV = \oint_{A=\partial V} [\phi\partial_n\psi - \psi\partial_n\phi] dA} \hat{=} \mathbf{2. \textit{Greensche Identitaet}}$$

z.B. $\phi = 1 \Rightarrow \int_V \Delta\psi dV = \oint_{A=\partial V} \partial_n\psi dA$

Theorem (Zerlegungs und Eindeutigkeitsatz).

Jedes Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ wird eindeutig durch sein Quellenfeld $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r})$ und sein Wirbelfeld $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})$ bestimmt, sofern dieses stetig differenzierbar ist und im Unendlichen hinreichend schnell abfaellt (mindestens wie $\frac{1}{r^2}$).

Beweis. Wir fuehren den Beweis konstruktiv durch, d.h. wir konstruieren zunaechst

die Zerlegung und zeigen im Anschluss deren Eindeutigkeit.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) := \underbrace{\mathbf{v}_D(\mathbf{r})}_{\text{Divergenzanteil}} + \underbrace{\mathbf{v}_R(\mathbf{r})}_{\text{Rotationsanteil}}$$

$$\mathbf{v}_D(\mathbf{r}) := \nabla \underbrace{-\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{:=\alpha(\mathbf{r}) \hat{=} \text{"skalares Potential"}}$$

$$\mathbf{v}_R(\mathbf{r}) := \nabla \times \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{:=\beta(\mathbf{r}) \hat{=} \text{"Vektorpotential"}}$$

Man sieht leicht ein, dass \mathbf{v}_D rotationsfrei und \mathbf{v}_R divergenzfrei sind, denn es gilt:

$$\text{rot} \mathbf{v}_D = \nabla \times \mathbf{v}_D = \nabla \times \nabla \alpha = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \alpha = 0$$

$$\text{div} \mathbf{v}_R = \nabla \cdot \mathbf{v}_R = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \beta_k = \varepsilon_{kij} \partial_i \partial_j \beta_k = 0$$

Die Zerlegung beruht im Wesentlichen auf den speziellen Eigenschaften der Funktion $\frac{1}{r}$!
Wir definieren:

$$f(\mathbf{r}) := \Delta \frac{1}{r}, \quad r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Und betrachten die speziellen Eigenschaften von f:

- Für $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ gilt $f(\mathbf{r}) = 0$, denn:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{r} &= \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) = \nabla \cdot \frac{1}{2(x^2 + y^2 + z^2)} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\partial_i \left(\frac{r_i}{r^3} \right) \\ &= - \left(\frac{\partial_i v_i}{r^3} + \frac{\left(-\frac{3}{2}\right) r_i 2r_i}{r^5} \right) = - \left(\frac{3r^2}{r^5} - \frac{3 \overbrace{r_i r_i}^{=r^2}}{r^5} \right) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

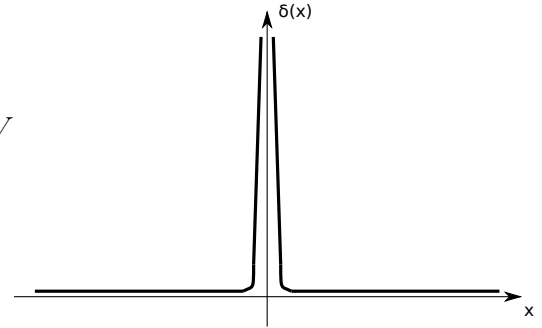
- Falls $\mathbf{0} \in V$ gilt: $\int_V f(\mathbf{r}) dV = -4\pi$. Wir zeigen dies für eine Kugel K im Ursprung:

$$\begin{aligned} \int_K f(\mathbf{r}) dV &= \int_V \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) dV \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{A=\partial K} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{A} \\ &= \int \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dA = -\frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_V f(\mathbf{r}) = \begin{cases} -4\pi, & \text{falls } \mathbf{0} \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist ein Beispiel fuer eine "Distribution" (\rightarrow Funktionalanalysis). Die "Delta-Funktion" ist ebenfalls eine solche und definiert durch:

$$\delta(\mathbf{r}) = 0, \text{ fuer } \mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \quad \int_V \delta(\mathbf{r}) = 1, \text{ fuer } \mathbf{0} \in V$$



$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r}), \text{ wobei } -\frac{1}{4\pi r} \text{ die "Greensche Funktion" fuer die Laplace-Gleichung ist.}$$

Wir berechnen nun:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \int_V \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right)_i &= \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l \int_V \frac{v_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &\stackrel{*}{=} \underbrace{\frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_j \int_V \frac{v_j(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_j \int_V \frac{v_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{1}{4\pi} \partial_i \int_V v_j(\mathbf{r}') \partial_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -\frac{1}{4\pi} \partial_i \int_V \partial'_j \left(v_j(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - (\partial'_j v_j(\mathbf{r}')) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &\stackrel{\text{Gauss}}{=} -\frac{1}{4\pi} \oint_{A=\partial V} \frac{v_j(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA_j - \partial_i \alpha(\mathbf{r}) = -\partial_i \alpha(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$(2) = -\frac{1}{4\pi} \int_V v_i(\mathbf{r}') \underbrace{\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{=-4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} dV' = v_i(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned} * \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \\ \Rightarrow v_i(\mathbf{r}) &= \partial_i \alpha(\mathbf{r}) + A \end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen: $A = \nabla \times \beta(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}
4\pi\beta_i(\mathbf{r}) &= \left(\nabla \times \int_V \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \right)_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \int_V \frac{v_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = -\varepsilon_{ijk} \int_V v_k(\mathbf{r}') \partial_j' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \\
&= -\varepsilon_{ijk} \int_V \partial_j \left(\frac{v_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) + \left(\partial_j' v_k(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dV' \\
&\stackrel{Gauss}{=} 0 + \left(\int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right)_i \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Damit ist die Konstruktion abgeschlossen. Wir muessen lediglich noch die Eindeutigkeit beweisen. Hierzu nehmen wir an, es existieren zwei Vektorfelder die unsere Forderungen erfullen und folgern dass diese gleich sein muessen. Seien also $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ zwei Vektorfelder mit

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{v}_1 &= \nabla \cdot \mathbf{v}_2, \quad \nabla \times \mathbf{v}_1 = \nabla \times \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{D} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{v}_1 - \nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{v}_1 - \nabla \times \mathbf{v}_2 = 0 \\
\stackrel{wirbelfrei}{\Rightarrow} \mathbf{D} &= \nabla\psi \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \Delta\psi = 0
\end{aligned}$$

ψ ist das zu \mathbf{D} gehoernde Potential. Insbesondere ist \mathbf{D} quellen- und wirbelfrei. Mit der 1. Greenschen Identitaet fuer $\phi = \psi$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int_V \left[\underbrace{\psi \Delta\psi}_{=0} + (\nabla\psi)^2 \right] dV' &= \oint_{A=\partial V} \psi \nabla\psi \cdot d\mathbf{A} = 0 \\
\text{Im } \infty \text{ faellt alles ab} &\Rightarrow \int (\nabla\psi)^2 dV = 0 \Rightarrow \nabla\psi = 0 = \mathbf{D} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

□

Korollar.

- Ein wirbelfreies Vektorfeld ist ein Gradientenfeld
- Ein quellenfreies Vektorfeld ist ein Wirbelfeld
- Im allgemeinen Fall haben wir eine Ueberlagerung der Form:

$$\mathbf{v} = \nabla\alpha + \nabla \times \beta$$

- Wichtige Eigenschaften des skalaren Potentials:

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= -\frac{1}{4\pi} \int \Delta \left(\frac{\nabla' \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dV' = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla' \cdot \nabla (-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')) dV' \\
&= \boxed{\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \Delta\alpha}
\end{aligned}$$

- Analog folgt fuer das Vektorpotential:

$$\boxed{\Delta\beta = -\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})}$$

1.3 Coulombgesetz und Feldgleichungen

Experimentelle Grundlagen:

- Die Coulombkraft ist eine Zentralkraft, die quadratisch mit dem Abstand abfaellt. Experimentell bestaetigt von 10^{-12}m bis $10^8\text{m} \hat{=} 20$ Groessenordnungen.
- Die Coulombkraft ist proportional zu den elektrischen Ladungen q_1 und q_2 . Gleichartige Ladungen stossen sich ab, gegengesetzte ziehen sich an (Im Gegensatz zur Gravitation!). $\Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = kq_1q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$
- Die Wechselwirkungsstaerke k haengt vom Masssystem (bzw. von der Einheit der Ladungen) ab.

Zwei Standardsysteme

- SI-System (oder MKSA): A (Ampere) fuer Stromstaerke ist die fundamentale Einheit. $1A = \frac{C}{s}$ mit C fuer Coulomb. Praktisch wird A definiert fuer die Stromstaerke in zwei parallelen Leitern mit Abstand 1m, die sich mit der Kraft $2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$ anziehen.
Elektronenladung:

$$\rho = 1,6 \cdot 10^{-19}C \qquad k \stackrel{*}{=} 10^{-7} \frac{Nc^2}{A^2} \stackrel{**}{\approx} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

* Magnetostatik, $c \hat{=} \text{Lichtgeschwindigkeit}$

** ϵ_0 Dielektrizitaetskonstante des Vakuums

In vielen Buechern: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1q_2}{r^2}$ (z.B. Nolting, typisch fuer Experimentalphysik)

- Gauss-System (oder CGS): Die Ladungseinheit wird so gewaehlt, dass $k = 1$. Ausserdem wird Laenge in cm und Kraft in $dyn = 10^{-5}N$ gemessen. Die Ladungseinheit heisst esu fuer *electrostatic unit* mit $esu = dyn^{1/2}cm = \frac{g^{1/2}cm^{3/2}}{s}$
Die Elektronenladung ist hier: $e = 4,8 \cdot 10^{-10}esu$, $esu = 3,3 \cdot 10^{-10}C$ (z.B. Fliessbach, typisch fuer theoretische Physik)

Vergleich zur Gravitation:

- Die Abstandsabhaengigkeit ist die Gleiche, allerdings ist diese bei der Gravitation deutlich schwaecher. Fuer ein Proton und ein Elektron im Abstand im Bohrradius $0,53\text{\AA}$ gilt:

$$F_C = 8 \cdot 10^{-8}N \qquad F_G = 4 \cdot 10^{-47}N$$

Dies entspricht einem Unterschied von 39 Groessenordnungen! Aber: auf grossen Skalen heben sich negative und positive elektrische Ladungen auf und die Gravitation dominiert!

- Elektrische Ladungen koennen sich gegenseitig schwaechen ("Abschirmung" oder "Screening").

Ab jetzt gelte: $k = 1$

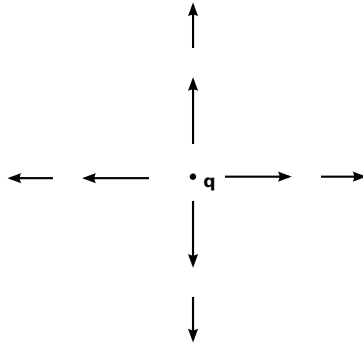
Experimentelle Beobachtung: Die Coulombkraft fuer mehrere Ladungen kann einfach aufsummiert werden (Superpositionsprinzip):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N qq_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} =: q\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad q \hat{=} \text{"Testladung"}$$

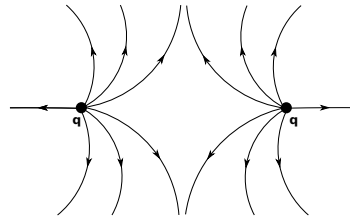
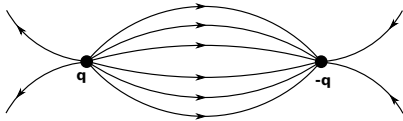
Hierbei entspricht \mathbf{E} der elektrischen Feldstaerke (auch elektrisches Feld oder E-Feld).

Beispiel.

- *Punktladung*



- *Zwei Punktladungen*



Typischerweise betrachtet man $N \gg 1 \Rightarrow$ Kontinuumsbeschreibung
 Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}') = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ auf einer Skala von 100\AA

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Andere Richtung: $\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \underbrace{\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{\phi(\mathbf{r})}, \phi(\mathbf{r}) \hat{=} (\text{skal.}) \text{ elektr. Potential, bis auf } k \in \mathbb{R} \text{ eindeutig}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$$

\mathbf{E} ist ein Gradientenfeld, d.h. es gilt: $\text{rot}\mathbf{E} = 0$. Wir berechnen die Divergenz:

$$\text{div}\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta\phi = -\Delta \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = - \int \rho(\mathbf{r}') (-4\pi) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = 4\pi\rho(\mathbf{r})$$

Somit erhalten wir die **Feldgleichungen der Elektrostatik**, der Spezialfall der **Maxwell-Gleichungen** fuer $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ und $\partial_t \mathbf{E} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{E} &= \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \text{div}\mathbf{E} &= \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Oft ist es viel einfacher mit ϕ statt mit \mathbf{E} zu arbeiten (eine statt drei Komponenten).

Es gilt:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \boxed{\Delta\phi = -4\pi\rho}$$

Dies ist die **Grundgleichung der Elektrostatik ("Poisson-Gleichung")**. Sie ist eine in ϕ lineare, inhomogene, partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. Im Prinzip ist die Lösung das Poisson-Integral:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Aber: meistens hat man Randwertprobleme. Feldgleichungen in integraler Form:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \Rightarrow I_A = \oint_{A=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \stackrel{Gauss}{=} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV' = 4\pi \int_V \rho dV' = 4\pi Q$$

\Rightarrow **Gauss Gesetz:** Der Gesamtfluss eines Vektorfeldes \mathbf{E} durch eine geschlossene Fläche A ist gleich 4π mal der *eingeschlossenen Ladung* Q .

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} \stackrel{Stokes}{=} \oint_{C=\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0}$$

Linienintegrale sind wegunabhängig, es gibt keine geschlossenen Feldlinien.

Wir berechnen die **Energie des elektrostatischen Feldes**. Hierzu bewegen wir eine Testladung q von \mathbf{r}_1 nach \mathbf{r}_2 . Dafür muss Arbeit geleistet werden. Wir nehmen **hier** an, dass die Bewegung von q das elektrostatische Feld nicht verändert:

$$W_{12} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{r}_2 \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{12} = q [\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)]}$$

Die elektrostatische Arbeit entspricht genau der Potentialdifferenz (oder "Spannung" V). Für positives W_{12} wird Energie gespeichert, für negatives W_{12} wird Energie frei. Die Einheit von W ist J für Joule. $q\phi(\mathbf{r})$ ist die elektrostatische Energie der Ladung in einem gegebenen E-Feld. Eine bewegliche Ladung wird in Richtung der Feldlinien beschleunigt und ändert dabei ihre potentielle Energie. Falls sie sich sehr langsam bewegt (überdämpft, keine Masse), dann entsprechen ihre Trajektorien genau den Feldlinien. Eine Verschiebung entlang der Äquipotentiallinien ändert die Energie nicht und benötigt keine Arbeit.

Wir betrachten eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ im externen Feld $\phi_{ext}(\mathbf{r})$:

$$\boxed{W_{ext} = \int \rho(\mathbf{r}') \phi_{ext}(\mathbf{r}') dV'}$$

In Wirklichkeit haben wir aber meistens die Situation, dass das elektrische Feld durch die Ladungen selbst verursacht wird. Was ist die Energie der Ladungsverteilung in ihrem eigenen Feld? Wir bringen N Ladungen q_i sukzessiv vom Unendlichen an die Positionen \mathbf{r}_i :

$$W_{int} \stackrel{*}{=} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \stackrel{i \neq j}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

* Superposition der Coulombkraft und $i = 1$ kostet noch keine Energie.

Würde man im letzten Schritt $i = j$ zulassen, wäre der Term im Nenner 0! In anderen Worten: die Selbstenergie einer Ladung in ihrem eigenen Feld würde divergieren.

$$\xrightarrow{\text{Kontinuumslimes}} \boxed{\frac{1}{2} \int dV \int \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = W_{int}}$$

Dieses Integral ist wohldefiniert, da ρ stetig ist.

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_{int} &= \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') dV' \stackrel{\text{Poisson}}{=} -\frac{1}{8\pi} \int (\Delta\phi) \phi dV' \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{8\pi} \int -\nabla\phi \cdot \nabla\phi dV' = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV' \hat{=} \text{"elektrostatische Energie"} \\ &\Rightarrow \boxed{\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2} \hat{=} \text{"elektrostatische Energiedichte"} \end{aligned}$$

Homogen geladene Kugel

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & \text{falls } r \leq R \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Feldgleichungen können auf drei Wegen gelöst werden:

1. Gauss-Gesetz

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' = \begin{cases} \frac{16\pi^2}{3} \rho_0 r^3 = 4\pi Q \frac{r^3}{R^3}, & \text{falls } r \leq R \\ \frac{16\pi^2}{3} \rho_0 R^3 = 4\pi Q, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wobei $Q = \int \rho(\mathbf{r}) dV' = \rho_0 \frac{4\pi R^3}{3}$ die Gesamtladung ist.

$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{R^3}, & \text{falls } r \leq R \\ \frac{Q}{r^2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Potential erhält man durch Integration ($\phi' = -E$):

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{R} \left(-\frac{r^2}{2R^2} + \frac{3}{2} \right), & \text{falls } r \leq R \\ \frac{Q}{R}, & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Poisson-Gleichung

In Kugelkoordinaten erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$-4\pi\rho(r) = \Delta\phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right)$$

$$r > R : \rho = 0 \Rightarrow \text{homogene GDGL } (r^2\phi')' = 0 \Rightarrow \phi = -\frac{c_1}{r} + c_2$$

$$r \leq R : \rho = \rho_0 \Rightarrow \text{inhomogene GDGL } (\rho^2\phi')' = 0 \Rightarrow \phi = -\frac{2\pi}{3}\rho_0 r^2 - \frac{c_3}{r} + c_4$$

Wir müssen nun allerdings noch die Integrationskonstanten bestimmen! Aus $\phi(\infty) = 0$ folgt $c_2 = 0$. Da wir keine Punktladung im Ursprung haben ist $\phi(0)$ endlich und somit $c_3 = 0$. Ferner hat sowohl $\rho(r)$ als auch $\Delta\phi$ ($r^2\phi'$)' einen Sprung bei $r = R$, ϕ und ϕ' müssen aber in $r = R$ stetig sein. Somit erhalten wir $c_1 = -Q$ und $c_4 = \frac{3Q}{2R}$ und erhalten die gleiche Lösung wie in (1)!

3. Integraldarstellung fuer ϕ

Wir legen \mathbf{r} in z-Richtung und nutzen die Rotationssymmetrie des Problems um die z-Achse aus. Sei also:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}, \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} r' \sin\theta \\ r' \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = r'^2 + r^2 - 2rr' \cos\theta$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 \frac{\rho_0}{(r'^2 + r^2 - 2rr' \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} d(\cos\theta) \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{r} \int_0^R dr' r' (|r + r'| - |r - r'|) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $\frac{2}{a}(b+ax)^{\frac{1}{2}}$ als Stammfunktion von $\frac{1}{(b+ax)^{\frac{1}{2}}}$ verwendet. Wir unterscheiden zwei Fälle:

$$r > R \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3r} = \frac{Q}{r}$$

$$r < R \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\rho_0}{r} \left(\int_0^r r'^2 dr' + \int_r^R rr' dr' \right) = \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Was wieder das gleiche Ergebnis wie (1) und (2) liefert.

Selbstenergie der homogen geladenen Kugel

$$\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 = \frac{Q^2}{8\pi} \begin{cases} \frac{r^2}{R^6} & r \leq R \\ \frac{1}{r^4} & r > R \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_{int} = \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \omega(\mathbf{r}) = \frac{Q^2}{2} \left[\int_0^R r^2 dr \frac{r^2}{R^6} + \int_R^\infty r^2 dr \frac{1}{r^4} \right]$$

$$= \frac{Q^2}{2} \left[\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right] = \boxed{\frac{3}{5} \frac{Q^2}{R} = W_{int}}$$

Nebenbemerkung : Im Feld um die Kugel steckt viel mehr Energie als in der Kugel selbst!

Fuer $R \rightarrow 0$ divergiert die Selbstenergie einer Punktladung, wie wir vorhin schon bemerkt haben. Fuer $R \equiv const$ ist sie konstant \Rightarrow Modell z.B. fuer das Elektron.

Wir setzen W_{int} gleich der Ruheenergie:

$$\frac{3}{5} \frac{e^2}{R_e} = m_e c^2 \Rightarrow R_e = \frac{3}{5} \frac{e^2}{m_e c^2} = 1.7 fm = 1.7 \cdot 10^{-16} m$$

Offensichtlich gibt es aber in diesem Modell keine Kraefte die die Ladungsverteilung zusammenhalten!

Weitere Beispiele

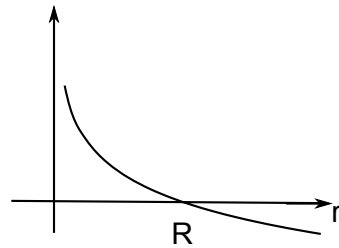
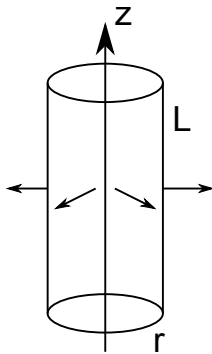
- **Geladene Linie:** Linienladungsdichte $\lambda = \frac{Q}{L}$, z.B. DNA: $\lambda = \frac{-2e}{3.4\text{\AA}}$. Aus dem Gauss-Gesetz folgt:

$$2\pi r L E(r) = 4\pi \lambda L$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{2\lambda}{r}$$

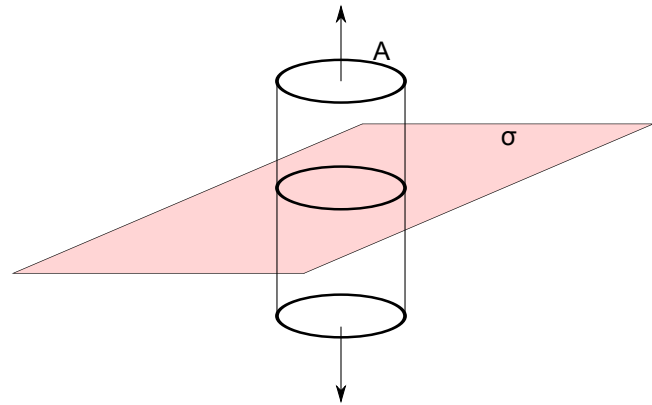
$$\Rightarrow \boxed{\phi(r) = -2\lambda \ln\left(\frac{r}{R}\right)} = -\lambda \ln\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \text{divergiert fuer } r \text{ klein!}$$



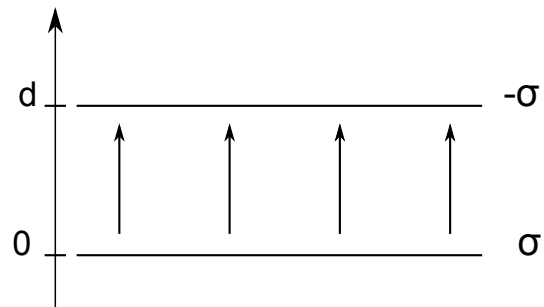
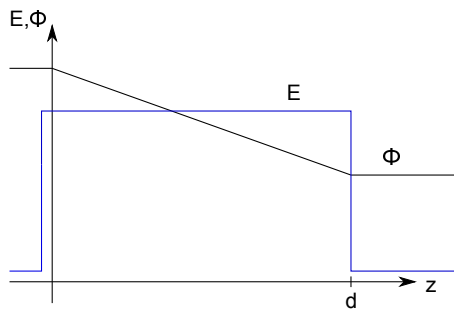
- **Geladene Ebene:** Flachenladungsdichte σ . Nach Gauss liefert nur der Deckel und Boden Beitrage:

$$\begin{aligned}
 2AE_z &= 4\pi\sigma A \\
 \Rightarrow E_z &= 2\pi\sigma \\
 \Rightarrow \phi(z) &= -2\pi\sigma z \\
 \Rightarrow \text{Kraft unabh\u00e4ngig vom Abstand.} \\
 &\text{Potential steigt linear an.}
 \end{aligned}$$



- **Plattenkondensator:** Zwei geladene Ebenen. Feldlinien parallel zwischen den Platten. Im Aussenraum heben sich die beiden Kraefte auf, im Innenraum hingen addieren sich die beiden Kraefte zu $4\pi\sigma$. Fuer die Gesamtladung gilt: $Q_{ges} = Q - Q = 0$. C bezeichne die Kapazitaet des Kondensators. Die **Potentialdifferenz** entspricht der Spannung U :

$$\Delta\phi = U = 4\pi\sigma d = 4\pi\frac{Q}{A}d = 4\pi\frac{d}{A}Q = \frac{1}{C}Q$$



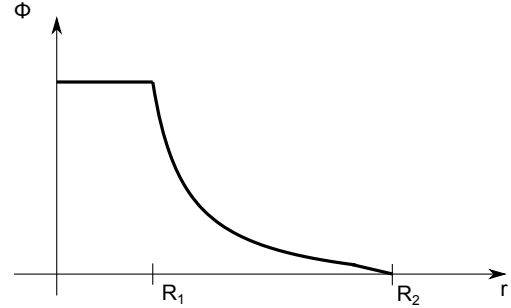
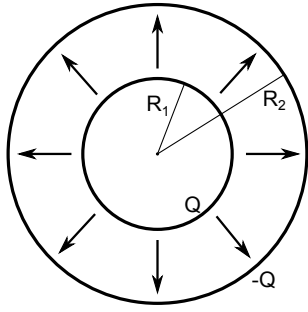
- **Kugelkondensator:** Zwei Kugelschalen mit Radien R_1 und R_2 , Ladungen Q und $-Q$. Kugelsymmetrie und Gauss liefern:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r < R_1 \\ \frac{Q}{r^2} & \text{falls } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{falls } r > R_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \begin{cases} Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) & \text{falls } r < R_1 \\ Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right) & \text{falls } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{falls } r > R_2 \end{cases}$$

$$V = \phi(R_1) - \phi(R_2),$$

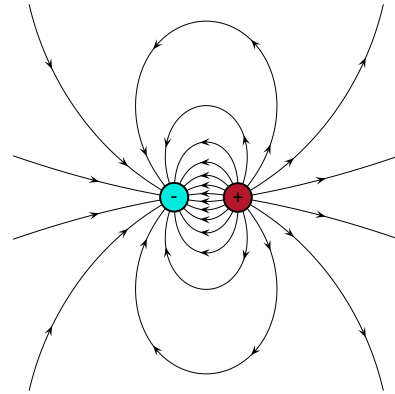
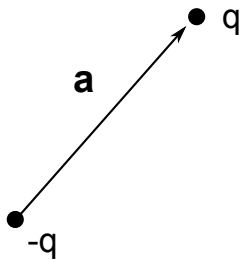
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$



- **Dipol:** Zwei gleichgrosse, aber entgegengesetzte Ladungen sind durch einen Abstandsvektor \mathbf{a} getrennt. Eigentlich ist das Potential bekannt ($\phi(\mathbf{r}) = \frac{-q}{|\mathbf{r}|} + \frac{+q}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}$), wir interessieren uns aber fuer den Grenzfall $|\mathbf{a}| \ll |\mathbf{r}|$. Wir verwenden hierzu die multivariate Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{r} + \mathbf{a}) &= f(\mathbf{a}) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial r_i}(\mathbf{a} = 0) a_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial r_j \partial r_i}(\mathbf{a} = 0) a_i a_j + \dots \\
 &= f(\mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{0}) + \dots
 \end{aligned}$$

Dipol: $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} &= \left((x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{-r_i}{r^3} \right) (-a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{-\delta_{ij}}{r^3} + \frac{3r_i r_j}{r^5} \right) (-a_i) (-a_j) + \dots \\
 \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) &= \frac{-q}{|\mathbf{r}|} + q \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})^2}{r^3} - \frac{\mathbf{a}^2}{r^3} \right) \right) \\
 &= \frac{q\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} + O\left(\frac{\mathbf{a}^2}{r^3}\right) \xrightarrow{\mathbf{a} \rightarrow 0} \frac{(q\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}}{r^3} \\
 \xRightarrow{q\mathbf{a} =: \mathbf{p}} & \boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}}
 \end{aligned}$$

Vergleiche mit $\phi \sim \frac{1}{r}$. Hier: $\phi \sim \frac{1}{r^2}$. Oberste Ordnung hat sich weggehoben. In Kugelkoordinaten gilt:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

Fuer $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$ gilt:

– Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} E_r &= -\partial_r \phi = \frac{2p \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \partial_\theta \phi = \frac{p \sin \theta}{r^3} \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \phi = 0 \end{aligned}$$

– Kartesisch: $E_i = -\partial_i \phi = -\partial_i \left(\frac{r_j p_j}{r^3} \right) = -\left(\frac{\delta_{ij} p_j}{r^3} - \frac{3r_j p_j r_i}{r^5} \right)$

$\Rightarrow \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{p}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r}}{r^5} \right)$ Welche Kraft wirkt auf den Dipol in einem aeußeren Feld $\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r})$?

$$\mathbf{F} = -q\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{0}) + q\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{a}) \stackrel{Taylor}{\approx} -q\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{0}) + q(\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{0}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}))|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}}$$

Wenn $\mathbf{E}_{ext} \equiv const \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{0}$

Drehmoment um $\mathbf{0}$: $\mathbf{M} = -q(\mathbf{0} \times \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{0})) + q(\mathbf{a} \times \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{a})) = \mathbf{0} + q(\mathbf{a} \times \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{a}))$
 \Rightarrow bei $\mathbf{E}_{ext} \equiv const$ dreht sich der Dipol. \mathbf{M} verschwindet fuer $\mathbf{a} \parallel \mathbf{E}_{ext}$. Was ist die zugehoerige Energie? Welche Konfiguration ist sinnvoller ($\uparrow\uparrow$ oder $\uparrow\downarrow$)?

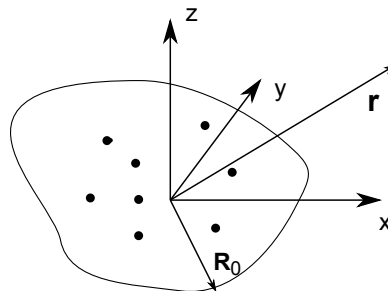
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{ext} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext}) - \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}_{ext}) = -\nabla V \\ &\Rightarrow \boxed{V = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext}} \end{aligned}$$

Die potentielle Energie eines Dipols im aeußeren Feld $\uparrow\uparrow$ ist somit guenstiger.

Kartesische Multipolwicklungen

Wir betrachten eine beliebige Ladungsverteilung, die um den Ursprung lokalisiert ist. Es bezeichne Q die Gesamtladung, \mathbf{p} das Dipolmoment und Q_{ij} den Quadrupoltenor (bzw. das Quadrupolmoment). Fuer das Potential am Ort \mathbf{r} ergibt sich mit dem Poisson-Integral:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$



Entwicklung um $\frac{|\mathbf{r}'|}{R_0} \gg 1$ liefert:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \int \rho(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r} + \sum_i \left(\frac{-r_i}{r^3} \right) (-r'_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \underbrace{\left(\frac{3r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right)}_{=: R_{ij}} (-r'_i) (-r'_j) \right) + \dots dV' \\ &= \frac{1}{r} \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}') dV'}_{=Q} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV'}_{=: \mathbf{p}} = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + ? + \dots \end{aligned}$$

Bemerkung: R_{ij} ist ein spurloser Tensor, d.h. $\sum_{i=1}^3 R_{ii} = 0 = \frac{3r^2}{r^5} - \frac{3}{r^3}$

Wir uebertragen jetzt die Eigenschaft "Spurlosigkeit" auf $r'_i r'_j$ (auch ein Tensor) und erhalten auf Grund der Spurlosigkeit von R_{ij} das gleiche Ergebnis:

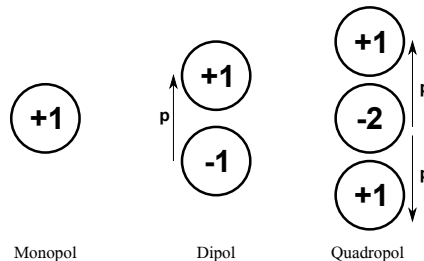
$$\frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}') \left(\sum_{i,j} R_{ij} \right) \left(r'_i r'_j - r'^2 \frac{\delta_{ij}}{3} \right) dV'$$

Deshalb koennen wir den isotropen Teil von R_{ij} weglassen. Es folgt:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}') \sum_{i,j} \left(\frac{3r_i r_j}{r^5} \right) \left(r'_i r'_j - r'^2 \frac{\delta_{ij}}{3} \right) dV' = \frac{1}{2} \frac{r_i r_j}{r^5} \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}') (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) dV'}_{=: Q_{ij}} \\ \Rightarrow \boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} Q_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} + \dots} \end{aligned}$$

↪ Weit draussen sieht man eine Punktladung! Die Ausnahmen sind:

- $Q = 0 \Rightarrow$ Dipol dominiert
- $\mathbf{p} = \mathbf{0} \Rightarrow$ Quadrupol dominiert

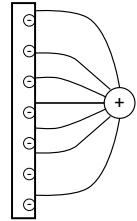


1.4 Randwertprobleme und Greensche Funktionen

Fuer eine gegebene Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ folgt das elektrostatische Potential $p(\mathbf{h})$ im unbegrenzten Raum aus dem Poisson-Integral: $\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ Fuer viele praktische Anwendungen muss man aber das Potential in einem Raumbereich berechnen, der durch Oberflaechen berandet ist, die ganz bestimmte elektrostatische Eigenschaften haben.

Der Standardfall sind metallische Leiter, also z.B. eine Punktladung vor einer Metalplatte:

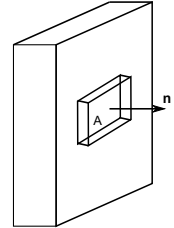
In einem Metall gibt es frei bewegliche Elektronen \Rightarrow im Gleichgewicht muss im Metall gelten: $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\phi \equiv \text{const}$. Wie sind die Gegebenheiten direkt an der Oberfläche? Hier sammeln sich Ladungen mit einer Flächendichte $\sigma(\mathbf{r})$ an.



Wir legen einen flachen Quader um die Oberfläche und erhalten mit dem Gauss-Gesetz:

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int \left(\underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2}_{\text{Deckel}} - \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1}_{\text{Boden}} \right) dA = 4\pi\sigma(\mathbf{r}) A$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{n}(\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_1(\mathbf{r})) = 4\pi\sigma(\mathbf{r})}$$

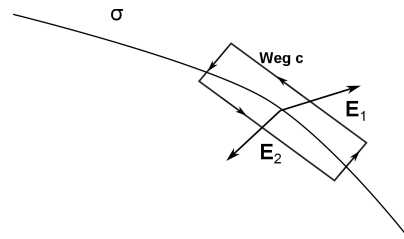


Die Normalkomponente von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ macht an einer Oberfläche mit Flächendichte $\sigma(\mathbf{r})$ einen Sprung von $4\pi\sigma(\mathbf{r})$.

Nun legen wir eine flache Schleife senkrecht durch die Oberfläche und verwenden den Satz von Stokes:

$$0 = \int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A}$$

$$= \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \boxed{\mathbf{l}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0}$$



Die Tangentialkomponente von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ist stetig über eine Oberfläche mit der Flächendichte $\sigma(\mathbf{r})$.

Da für einen metallischen Leiter $\mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$ im Inneren gilt, haben wir insgesamt: das elektrische Feld \mathbf{E} steht senkrecht auf der Leiteroberfläche und springt von innen nach außen von Null auf $4\pi\sigma$.

Das Randwertproblem mit der Bedingung $\phi \equiv \text{const}$ auf ∂V gelöst werden ("Dirichlet-Randbedingungen", im allgemeinen Fall wird $\phi(\mathbf{r})$ auf dem Rand vorgegeben). Die Flächendichte folgt dann als: $\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{-4\pi} (\mathbf{n} \cdot \nabla\phi) = -\frac{1}{4\pi} \partial_n \phi(\mathbf{r})$.

Ist die Flächendichte gegeben, dann löst man das Problem mit vorgegebenem $\partial_n \phi(\mathbf{r})$ auf dem Rand ("Neumann-Randbedingungen"). Die Vorgabe beider Randbedingungen wäre eine Überbestimmung.

Wir gehen jetzt allgemeine Lösungsformeln für diese Randwertprobleme an. Gegeben sei $\rho(\mathbf{r})$ in V . Gesucht wird eine Lösung mit $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$ in V und $\phi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ auf ∂V (Dirichlet) oder $\partial_n \phi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ auf ∂V (Neumann).

Da die Poisson-Gleichung eine lineare PDE ist und somit das Superpositionsprinzip gilt,

verwenden wir die Methode der "Greenschen Funktion". Diese ist fuer die Poisson-Gleichung definiert durch $\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Da $\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ symmetrisch in \mathbf{r} und \mathbf{r}' ist gilt auch $\Delta'G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Ist G bekannt, dann folgt die allgemeine Loesung als (ohne Randbedingungen!):

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \int \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ \Rightarrow \Delta\phi(\mathbf{r}) &= \int \rho(\mathbf{r}') \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = \int \rho(\mathbf{r}') (-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) dV' = -4\pi\rho(\mathbf{r})\end{aligned}$$

Green'sche Funktionen existieren fuer alle linearen PDEs und ODEs (Wellengleichungen, Waermeleitungsgleichung, Schroedingergleichung etc.)!

Ausnahme: Green'sche Funktionen gibt es nicht fuer nicht-lineare PDEs wie bspw. die Poisson-Boltzmann-Gleichung (oder die Navier-Stokes-Gleichung) $\Delta\phi = e^{-\phi}$.

Zurueck zur Poisson-Gleichung: allgemeine Loesung = spezielle Loesung + homogene Loesung:

$$\boxed{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}$$

Im unendlichen Raum (d.h. keine Randbedingungen) folgt $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \mathbf{0}$.

Fuer die allgemeine Formel fuer G folgt mit der 2. Green'schen Identitaet:

$$\int_V \phi(\mathbf{r}') \Delta\psi(\mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}') \Delta\phi(\mathbf{r}') dV' = \int_{\partial V} \phi(\mathbf{r}') \partial'_n \psi(\mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}') \partial'_n \phi(\mathbf{r}') dA'$$

Waehle $\psi(\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ und $\phi(\mathbf{r}')$ als Loesung der Poisson-Gleichung, also $\Delta\phi(\mathbf{r}') = -4\pi\rho(\mathbf{r}')$

$$\begin{aligned}\Rightarrow & \int_V \phi(\mathbf{r}') (-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (-4\pi\rho(\mathbf{r}')) dV' \\ &= \int_{\partial V} \phi(\mathbf{r}') \partial'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial'_n \phi(\mathbf{r}') dA' = -4\pi\phi(\mathbf{r}) + \int_V 4\pi dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \\ \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) &= \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \underbrace{(\phi \partial'_n G)}_{:=I} - \underbrace{G \partial'_n \phi}_{:=II} dA'\end{aligned}$$

- **Dirichlet'sches Randwertproblem:**

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \text{ fuer } \mathbf{r} \in \partial V \text{ (durch Wahl von F)}$$

\Rightarrow Term II verschwindet

\Rightarrow in Term I einsetzen und $\phi(\mathbf{r})$ ausrechnen: $\phi(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}')$

- **Neumann'sches Randwertproblem:** Im Prinzip wollen wir: $\partial'_n G_N = 0$, also dass Term I verschwindet. Aber:

$$\begin{aligned}\int_V \Delta'G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' &= \int_V -4\pi\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = -4\pi = \int_{\partial V} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \underbrace{\nabla \cdot d\mathbf{A}'}_{=dA\partial'_n} \\ \Rightarrow \partial'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &\neq 0\end{aligned}$$

Loesung des Problems: $\partial'_n G_N \equiv const = -\frac{4\pi}{|A|}$

$$\Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \int_V G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial'_n \phi(\mathbf{r}') dA'$$

Zusammenfassung: Wir finden eine vollstaendige Loesung, wenn G_D (bzw. G_N) bekannt ist. Beide haengen nicht von $\rho(\mathbf{r})$ oder $f(\mathbf{r})$ bzw. $g(\mathbf{r})$ ab und sind rein geometrischer Natur. Der dritte Term wird wegen der Eichfreiheit vernachlaessigt. $\partial_n \phi(\mathbf{r}')$ auf dem Rand ist als $f(\mathbf{v})$ vorgegeben.

Green'sche Funktion: Lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\phi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) &\Rightarrow \mathcal{L}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \xrightarrow{\text{Loesung}} \phi(\mathbf{r}) &= \int f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \end{aligned}$$

Gilt nur wenn keine Randbedingungen erfuehlt sein muessen, also wenn ueber den gesamten Raum integriert wird.

Die Green'sche Funktion "transportiert Information von \mathbf{r}' nach \mathbf{r} ". \rightsquigarrow "Propagator"

Beispiel (Waermeleitungsgleichung).

$$\begin{aligned} (\partial_t - \lambda \Delta) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0, 0) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \xrightarrow{\text{Loesung}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') &= \frac{\Theta(t - t')}{(4\pi\lambda(t - t'))^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4\lambda(t - t')}\right) \end{aligned}$$

Poisson-Gleichung:

$$\begin{aligned} \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) &= \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\mathbf{r}') \partial_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial_n \phi(\mathbf{r}') dA' \end{aligned}$$

Wie kann man G_D und G_N richtig waehlen?

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underbrace{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{\text{partikulaere Loesung}} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \Delta F = 0$$

Metalle: Dirichlet-Problem, $\phi \equiv const$ auf Oberflaeche, geerdete Metallplatte: $\phi = 0 \Rightarrow$ keine Oberflaechenterme (Term I faellt auch weg, da $\phi = 0$ auf dem Rand).

Zwei wichtige Eigenschaften von G_D

- Symmetrie unter $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}'$. Mit der 2. Green'schen Identität folgt nämlich für $\phi(\mathbf{r}'') = G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')$ und $\psi(\mathbf{r}'') = G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$

$$\begin{aligned} \int_V G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \underbrace{\Delta'' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')}_{=4\pi\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')} - G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \underbrace{\Delta'' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')} dV' &= -4\pi (G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})) \\ &= \int_{\partial V} \underbrace{G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')}_{=0} \partial_n'' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') - \underbrace{G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')}_{=0} \partial_n'' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') dA' = 0 \\ &\Rightarrow G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \end{aligned}$$

- Eindeutigkeit von G_D :

Seien ϕ_1, ϕ_2 zwei Lösungen. Setze $\psi := \phi_1 - \phi_2$. Es gilt $\Delta\psi = 0$ sowie $\forall r' \in \partial V : \psi(\mathbf{r}') = 0$.

Wir zeigen nun mit Hilfe der 1. Green'schen Identität (mit $\phi = \psi$), dass $\psi \equiv 0$ und somit $\phi_1 = \phi_2$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_V \psi \underbrace{\Delta\psi}_{=0} + (\nabla\psi)^2 dV' - \int_{\partial V} \underbrace{\psi}_{=0} \partial_n\psi dA' &= 0 \\ \Rightarrow \int_V (\nabla\psi)^2 dV' = 0 \Rightarrow \nabla\psi = 0 \Rightarrow \psi \text{ ist konstant, aber: } \psi = 0 \text{ auf } \partial V \Rightarrow \forall \mathbf{r} : \psi = 0 \end{aligned}$$

Dies ist auch der Beweis für die Nichtexistenz eines E-Felds im Faraday'schen Käfigs.

Beispiele

- **Geerdete Metalplatte**

Wir benötigen Dirichlet'sche Greenfunktion $G_D = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

Von F ist bekannt: $\forall \mathbf{r} \in V : \Delta F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ sowie $\forall \mathbf{r} \in \partial V : G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$

Einfacher Trick: Eine Lösung von $\Delta\phi = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ hat automatisch $\Delta\phi = 0$ wenn $\mathbf{r}' \notin V$

\Rightarrow Generiere dadurch $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Rightarrow$ "Methode der Bildladung" ("method of images")

Nutze Symmetrie des Systems: Platziere Bildladung mit umgekehrtem Ladungsvorzeichen am Spiegelpunkt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{-1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_B|} \\ &= \frac{1}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left((x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

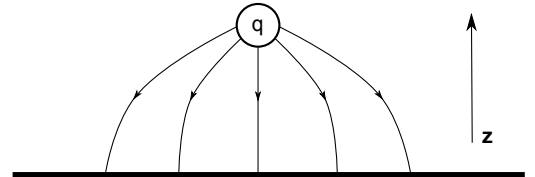
Fuer $z = 0 \Rightarrow G_D \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}' \right) = 0 \quad \checkmark \quad \phi = 0$ auf $\partial V \Rightarrow$ keine Oberflaechenterme

Wir legen die Punktladung auf die z -Achse $\Rightarrow \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix}, \mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -z' \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

$$\phi(\mathbf{r}) = qG(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = q \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}'|} \right)$$

$$\Rightarrow E(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = q \left[\frac{(x, y, (z - z'))}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x, y, (z + z'))}{(x^2 + y^2 + (z + z')^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$\Rightarrow E(z = 0) = q \frac{(0, 0, -2z')}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \sim -\mathbf{e}_z \frac{1}{r^3}$$



Das E-Feld steht senkrecht auf der Metalplatte und zerfaellt lateral wie ein Dipol ($\sim \frac{1}{r^3}$).

- **Induzierte Oberflaechenladung** (nur an $z = 0$)

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{4\pi} E((x, y, z = 0)) = -\frac{q}{2\pi} \frac{z'}{(r^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{Radialkoordinaten}$$

- **Berechnen der gesamtinduzierten Ladung**

$$Q_B = \int_{z=0} \sigma(x, y) dA = 2\pi \int_0^\infty r \frac{z'}{(r^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{q}{2\pi} \right) dr$$

$$= +qz' \int_0^\infty \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{(r^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \right) dr = -q$$

Also: Es wird genau die Ursprungsladung induziert!

- **Ursprungsladung und induzierte Ladung ziehen sich an!**
 \rightsquigarrow "Bildkraft": Kraft auf Ursprungsladung = -Kraft auf Metalplatte (Newton III)

Kraft auf Metallplatte: "summieren kleine Bildkraefte auf die induzierten Ladungen auf, um Kraft auf Leiter zu erhalten"

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_B &= \int_{z=0} d\mathbf{F}_B = \int dA \sigma \frac{1}{2} \mathbf{E}(z=0) \\ &= \int \frac{1}{2} \sigma \underbrace{4\pi\sigma}_{E_z} \mathbf{e}_z dA = -q^2 \mathbf{e}_z \frac{1}{(2z')^2} \end{aligned}$$

↪ Coulombgesetz fuer zwei Ladungen q und $-q$ im Abstand $2z'$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist noetig, um eine Doppelzaehlung der Ladungen in der Verteilung zu vermeiden (induzierte Ladungen bauen sich sukzessive auf). Genauere Begrueundung ueber "Maxwell-Tensor" fuer Impulsuebertrag.

1.5 Numerische Loesung des Randwertproblems

Wir betrachten drei verschiedene Ansatzze.

- ① **Finite Differenzen**

Die Poisson-Gleichung $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$ wird auf einem Gitter diskretisiert. Wir betrachten der Einfachheit halber den Fall $d = 1$:

$$\phi''(x) = -4\pi\phi(x)$$

Die zweite Ableitung kann folgendermassen berechnet werden:

$$\phi(x + \Delta x) = \phi(x) + \phi'(x) \Delta x + \frac{1}{2} \phi''(x) \Delta x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

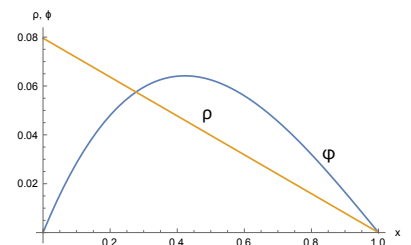
$$\phi(x - \Delta x) = \phi(x) - \phi'(x) \Delta x + \frac{1}{2} \phi''(x) \Delta x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\Rightarrow \phi''(x) = \frac{\phi(x + \Delta x) + \phi(x - \Delta x) - 2\phi(x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\xrightarrow{\text{Gitter}} \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i}{h^2} = -4\pi\phi(x_i), \hat{=} \text{"Drei-Punkte-Formel"}, h = \text{Gitterkonstante}$$

Wir wollen Dirichlet'sche Randbedingungen: $\phi_0 = \phi_{N+1} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho_N \end{pmatrix}$$



Dieses lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\phi = \rho$ (mit Tridiagonalmatrix \mathbf{A}) kann fuer $\det A \neq 0$ algebraisch geloeset werden.

- **② Variationsverfahren**

Wir starten von der Beobachtung, dass die Lösung der Poisson-Gleichung, $\Delta\phi = -4\pi\rho$, auch das Minimum eines Energiefunktional ist:

$$E[\phi] = \frac{1}{8\pi} \int (\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 dV - \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV$$

Beweis. Beispiel fuer eine Variationsrechnung \rightsquigarrow Euler-Lagrange-Gleichung fuer $E[\phi]$. Variation: $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$, $\delta\phi|_{\partial V} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta E &= \frac{1}{8\pi} \int (\nabla\phi + \nabla\delta\phi)^2 - (\nabla\phi)^2 dV - \int \rho[(\phi + \delta\phi) - \phi] dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \nabla\phi \cdot \nabla\delta\phi dV - \int \rho\delta\phi dV + \mathcal{O}(\delta\phi^2) \\ &\stackrel{pI}{=} \frac{1}{4\pi} \int (-\Delta\phi - 4\pi\rho) \delta\phi dV + \int \underbrace{\delta\phi}_{\partial V=0} \partial_n\phi dA + \mathcal{O}(\delta\phi^2) \\ &\Rightarrow \Delta\phi = -4\pi\rho \end{aligned}$$

□

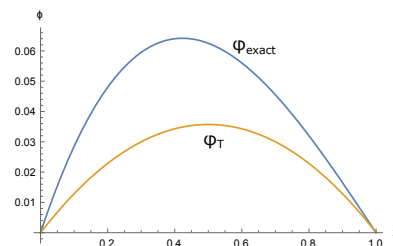
Es ergibt sich folgende numerische Loesungsstrategie: Verwende eine Testfunktion. Beispielsweise ein Polynom $\phi_\tau(\{a_i\}_{1 \leq i \leq n+1}) = \sum_{j=0}^n a_{j+1} X^j$. Werte nun $E[\phi]$ fuer unsere Testfunktion ϕ_τ aus und minimiere E bezueglich der Parameter a_i .

Beispiel: $\rho = \frac{1}{4\pi}(1-x) \Rightarrow \phi = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

$$\phi_\tau = aX(1-X) \Rightarrow 12 \cdot 8\pi E[\phi_\tau] = 7a^2 - 2a \Rightarrow a_{min} = \frac{1}{7} \Rightarrow E_{min} = \frac{-1}{8\pi} \frac{1}{84}$$

Die exakte Loesung $\phi = \frac{1}{3}X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3$ ergibt hingegen:

$$E[\phi] = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{45} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{45} = \frac{-1}{8\pi} \frac{2}{90}$$



- **③ Finite-Elemente-Methode (FEM)**

Kombiniert Elemente von ① und ②. Wir transformieren die PDE in ihre "schwache Form" durch Multiplikation mit einer Testfunktion $w(x)$ und Integration ueber das

Intervall $[a, b]$. Es gilt fuer jede Testfunktion w :

$$I = \int_a^b w(x) \underbrace{[\phi'' + 4\pi\rho]}_{\hat{=} \text{Residuum } R} = 0$$

$$I = w\phi'|_a^b - \int_a^b w'\phi' dx + \int_a^b w4\pi\rho dx = 0$$

Die schwache Form haengt nur noch von ersten Ableitungen ab und kann deshalb unter schwaecheren Bedingungen geloest werden. Nach Diskretisierung kann diese Gleichung algebraisch und unabhaengig von w geloest werden.

Galerkin-Methode:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i N_i(x) =: \phi \cdot \mathbf{N}(x)$$

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i N_i(x) =: \omega \cdot \mathbf{N}(x)$$

Sowohl ϕ als auch ω werden nach "Formfunktionen" (Polynome der Ordnung $n-1$) ("shape functions") entwickelt.

$$I = \omega \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\phi'|_a \\ 0 \\ \phi'|_b \end{pmatrix}}_{=: f_{ext}} - \omega \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{N}}{dx} \times \frac{d\mathbf{N}}{dx} dx \right)}_{=: \mathbf{K}} \phi + \omega \int_a^b \mathbf{N}(x) 4\phi\rho(x) dx = 0$$

$$\mathbf{f} := f_{int} + f_{ext} \Rightarrow \omega \cdot \mathbf{K} \cdot \phi = \omega \cdot \mathbf{f}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{K} \cdot \phi = \mathbf{f}} \text{ kann algebraisch geloest werden!}$$

Im Dirichlet-Fall sind Teile von ϕ gegeben. Im Neumann-Fall hingegen ist f_{ext} bekannt. Dementsprechend muss anders aufgeloest werden.

Software fuer FEM:

- Comsol Multiphysics (userfreundlich)
- Abaqus, Ansys, Adina (Spezialprogramm)
- dune, deal.II (open software aus Heidelberg)

Bemerkung: Die Theorie der Testfunktionen, sowie die Existenz und Eindeutigkeit von Loesungen der hier behandelten PDEs wird in der Funktionalanalysis untersucht.

1.6 Entwicklung in spezielle Funktionen

Laplace- und Poisson-Gleichungen muessen oft mit bestimmten Symmetrien geloest werden. Dies gelingt in der Regel mit einem Separationsansatz mit Transformation in

geeignete Koordinaten (z.B. Legendre-Polynome $p_l(X)$, Kugelflaechenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$).

Motivation:

Elektrostatisches Problem: $\Delta\phi = 0$ in V , $\phi(x, y) = 0$ an den Raendern links, rechts, unten. $\phi(x, y) = \phi_0(x)$ am oberen Rand.

Separationsansatz: $\phi(x, y) = f(x)g(y)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta\phi &= (\partial_x^2 f)g + f(\partial_y^2 g) = 0 \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{f}(\partial_x^2 f)}_{\text{haengt nur von } x \text{ ab}} + \underbrace{\frac{1}{g}(\partial_y^2 g)}_{\text{haengt nur von } y \text{ ab}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{g}(\partial_y^2 g) &= \alpha^2 = -\frac{1}{f}(\partial_x^2 f) \\ \Rightarrow g(y) &= g_1 e^{\alpha y} + g_2 e^{-\alpha y} = g_3 \cosh(\alpha y) + g_4 \sinh(\alpha y) \\ g_3 &= g_1 + g_2, \quad g_4 = g_1 - g_2 \\ f(x) &= f_1 \cos(\alpha x) + f_2 \sin(\alpha x) \end{aligned}$$

Aus den Randbedingung berechnet man:

$$\begin{aligned} \phi(0, y) = 0 &\Rightarrow f_1 = 0 \\ \phi(x, 0) = 0 &\Rightarrow g_3 = 0 \\ \phi(x_0, y) = 0 &\Rightarrow \alpha = \alpha_n = \frac{n\pi}{x_0}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

allg. $\xrightarrow{\text{Loesung}}$ $\boxed{\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right)}$

Die Koeffizienten c_n werden durch die restlichen Randbedingungen festgelegt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \phi(x, y_0) = \phi_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y_0\right) \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \\ \Rightarrow c_n &= \frac{2}{x_0 \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y_0\right)} \int_0^{x_0} \phi_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) dx \end{aligned}$$

Dies entspricht der Fourier-Entwicklung von $\phi_0(x)$. Falls die Reihe konvergiert, so sind die Koeffizienten eindeutig bestimmt und somit ist insbesondere die Fourierentwicklung einer Funktion im Falle der Existenz eindeutig.

1.7 Mathematischer Einschub 2: Fourier-Entwicklung

Erinnerung: Die Taylor-Reihe ist eine Entwicklung in Polynome: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$

Nun entwickeln wir in 2π -periodische Funktionen:

$$f(x + 2\pi) = f(x) \Rightarrow \text{Entwicklung in } \sin \text{ und } \cos$$

Ansatz: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\cos(nx)}_{\text{gerade Fktn.}} + b_n \underbrace{\sin(nx)}_{\text{ungerade Fktn.}}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = 0$$

$$\int \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int \cos((n+m)x) + \cos((n-m)x) dx = \pi \delta_{nm}$$

$$\int \sin(nx) \sin(mx) dx = \frac{1}{2} \int \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x) dx = \pi \delta_{nm}$$

$$\int \sin(nx) \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int \sin((n+m)x) + \sin((n-m)x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \sin(nx) \text{ und } \cos(mx) \text{ sind orthogonal zueinander. } \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x) dx = 2\pi a_0$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Satz von Dirichlet: Die Fourierreihe konvergiert, wenn $f(x)$ und $f'(x)$ stueckweise stetig sind.

Man kann die Fourierreihe auch mit Hilfe der Euler Formel $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ in komplexer Form schreiben. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\cos(nx) + i\sin(nx)) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (\cos(-nx) + i\sin(-nx)) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\cos(nx) + i\sin(nx)) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (\cos(nx) - i\sin(nx)) \\ &= \underbrace{c_0}_{=a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{(c_n + c_{-n})}_{=a_n} \cos(nx) + i \underbrace{(c_n - c_{-n})}_{=b_n} \sin(nx) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad (n \geq 1)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) = \bar{c}_n, \quad (n < 0)$$

Also ist $f(x)$ genau dann reell, wenn $c_{-n} = \bar{c}_n$ gilt. Weiter gilt:

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(nx) - i\sin(nx)] f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx$$

Wir machen nun den Uebergang von periodischen zu beliebigen Funktionen. Hierzu fuehren wir fuer eine Funktion f eine Periodenlaenge T ein und betrachten danach den

Fall $T \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
 f(t+T) = f(t) &\Rightarrow f(t) = \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega_n t} \\
 \omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad c_n &= \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_n t} f(t) dt}_{= \tilde{f}(\omega_n)} \\
 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} &\boxed{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt = \tilde{f}(\omega)} \cong \text{"Fourier-Integral"} \\
 \Rightarrow f(t) &= \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(\omega_n) e^{i\omega_n t} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\left(\frac{2\pi}{T}\right)}_{=\Delta\omega} \tilde{f}(\omega_n) e^{i\omega_n t} \\
 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} &\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega) d\omega = f(t)} \cong \text{"Fourier-Transformierte"}
 \end{aligned}$$

Die Fouriertransformation weist folgende interessante und nützliche Eigenschaften auf:

$f(t)$	$\tilde{f}(\omega)$	
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 \tilde{f}_1(\omega) + a_2 \tilde{f}_2(\omega)$	Linear
$f'(t)$	$i\omega \tilde{f}(\omega)$	Ableitung \rightsquigarrow Multiplikation
$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(t-s) g(s) ds$	$\tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)$	Parsival Theorem: Faltung \rightsquigarrow Produkt

Wo verwendet man Fouriertransformationen in der Physik?

Ortsraum: $f(t) \longleftrightarrow \tilde{f}(\omega)$ Fourierraum/reziproker Raum, ω Frequenz

Ortsraum: $f(x) \longleftrightarrow \tilde{f}(k)$ Fourierraum/reziproker Raum, k Wellenvektor

Bemerkung: Die Fouriertransformierte $\tilde{f}(\omega)$ existiert fuer jede L^1 Funktion f . Falls $f \in L^2$ gilt, so ist auch $\tilde{f} \in L^2$.

Hierbei ist $f \in L^p : \iff \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

In Worten bedeutet dies etwa so viel wie: Eine Funktion liegt in L^p genau dann, wenn sie p -fach integrierbar ist. Fuer $p = 1$ "integrierbar", fuer $p = 2$ "quadratintegrierbar" etc.

Einsetzen von $\tilde{f}(\omega)$ in das Fourier-Integral liefert:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t} \int_{\mathbb{R}} dt' e^{-i\omega t'} f(t') = \int_{\mathbb{R}} dt' f(t') \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega(t-t')} = \int_{\mathbb{R}} f(t') \delta(t-t') dt'$$

$$\Rightarrow \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} dt$$

$$\Rightarrow \delta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} d\omega}_{\tilde{\delta}(\omega) = \frac{1}{2\pi}}$$

Bemerkung: Das Resultat fuer die Delta-Funktion haengt allerdings vom Vorfaktor ab. Die Wahl die wir fuer die Transformation getroffen haben hat unter Anderem den Vorteil, dass man die Inverse der Fouriertransformation relativ einfach bestimmen kann. In der Funktionalanalysis hingegen ist (haeufig) die Fourier-Transformierte der Delta-Funktion die 1. In der Tat stellt diese ein neutrales Element des Faltungsraums (erweitert auf Distributionen) dar.

Funktionen, welche in beiden Raeumen die gleiche Form haben sind die Gauss-Funktionen. Verallgemeinert man die Transformation auf vektorwertige Funktionen, so gilt:

$$f(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) dV$$

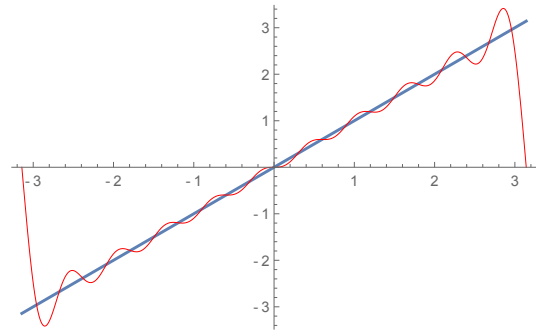
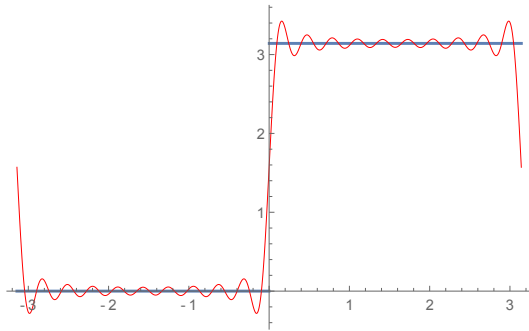
Beispiele

- **Fourier-Integral**

	$f(t)$	$\tilde{f}(\omega)$
Gauss'sche Funktion	$e^{-a\frac{t^2}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$
Exponentialfunktion	$e^{-a t }$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$

- **Fourier-Reihe**

	$f(t)$	c_n
Stufenfunktion	$\begin{cases} 0 & -\pi \leq t \leq 0 \\ \pi & 0 < t \leq \pi \end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n} [(-1)^n - 1]$
Saegezahn	t fuer $-\pi < t \leq \pi$	$\sqrt{2\pi} i \frac{(-1)^n}{n}$



Vollstaendige orthonormale Funktionensysteme (VONS)

Ein VONS ist eine Menge von Funktionen $\{u_n(x)\}$ auf einem Intervall $[a, b]$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\int_a^b \overline{u_n}(x) u_m(x) dx = \delta_{nm}$
- Vollstaendig: $\sum_n \overline{u_n}(x) u_n(x) = \delta(x - y)$

Dies entspricht der Definition einer Orthonormal-Basis eines Vektorraums. Unsere Vektoren sind hier allerdings Funktionen! Ferner definiert das Integral aus der ersten Eigenschaft ein Skalarprodukt zwischen zwei L^p -Funktionen und man erhaelt somit den *Hilbertraum* der L^p -Funktionen auf $[a, b]$.

Allgemein ist ein Hilbertraum ein Vektorraum mit Skalarprodukt, welcher bezueglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm vollstaendig ist, d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert. Die Vollstaendigkeit hat nichts mit der Basis zu tun!

Fuer jedes $f \in L^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_n c_n u_n(x), \quad c_n = \int_a^b \overline{u_n}(x) f(x) dx \\
 \Rightarrow f(x) &= \sum_n \left(\int_a^b \overline{u_n}(x') f(x') dx' \right) u_n(x) = \int_a^b f(x') \sum_n \overline{u_n}(x') u_n(x) dx \\
 &= \int_a^b f(x') \delta(x - x') dx = f(x) \\
 \int |f(x)|^2 dx &= \int \overline{f}(x) f(x) dx = \sum_{n,m} \overline{c_n} c_m \underbrace{\int_a^b \overline{u_n}(x) u_m(x) dx}_{=\delta_{nm}} = \sum_n \overline{c_n} c_n = \sum_n |c_n|^2 < \infty
 \end{aligned}$$

Die Fouriertransformation war nun ein Beispiel fuer eine Zerlegung nach Wellen. Man

kann Funktionen aber auch auf andere Weisen zerlegen, z.B. auf der Kugeloberflaeche:

$$\text{In Kugel-KO: } f(\mathbf{r}) = f(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm}(r) \underbrace{Y_{lm}(\theta, \phi)}_{\text{"Kugelflaechenfunktion"}}$$

$$\text{Orthonormalitaet: } \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \overline{Y_{l'm'}(\theta, \phi)} Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

$$\text{Vollstaendigkeit: } \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \overline{Y_{lm}(\theta', \phi')} Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\cos\theta - \cos\theta')$$

Entwicklung in Kugelflaechenfunktionen

Wir schreiben die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten:

$$\frac{1}{r} \partial_r^2(r\phi) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta(\sin\theta \partial_\theta \phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\phi^2 \phi = 0$$

Ein geschickter Separationsansatz lautet:

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, \varphi) &= \frac{u(r)}{r} P(\cos\theta) Q(\varphi) \\ \Rightarrow \frac{PQ}{r} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{uQ}{r^3 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{uP}{r^3 \sin^2\theta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} &= 0 \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2}}_{\equiv: -m^2} &= \underbrace{-r^2 \sin^2\theta \frac{1}{u} \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{\sin\theta}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right)}_{\text{haengt nicht von } \varphi \text{ ab}} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Rightarrow Q'' + m^2 Q = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \boxed{Q_m(\varphi) = e^{im\varphi}} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

(*) Achtung: hier geht ein, dass $Q(\varphi)$ 2π -periodisch sein muss! Wir betrachten nun die rechte Seite von (1):

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{r^2}{u} \frac{d^2 u}{dr^2}}_{\equiv: \lambda} = \underbrace{-\frac{1}{P \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta}}_{\text{haengt nicht von } r \text{ ab}} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{\lambda}{r^2} u = 0 \quad (3)$$

Die verbleibende Differentialgleichung schreiben wir um mit $\cos\theta = x$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dx} &= \frac{1}{-\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Wir betrachten zunaechst nur den Fall $m = 0$ (Zylindersymmetrie):

$$\Rightarrow (1-x^2) P'' - 2xP' + \lambda P = 0 \quad (5)$$

Wir suchen Loesungen fuer den Bereich $-1 \leq x \leq 1$. Ein Taylor-Ansatz zeigt, dass es konvergierende Loesungen nur fuer $\lambda = l(l+1)$ mit $\lambda \in \mathbb{N}_0$ geben kann.

$$\Rightarrow \boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - l)^2} \quad (\text{"Legendre Polynome", Konvention: } P_l(1) = 1)$$

Das Legendre Polynom P_l ist vom Grad l und je nach Wahl von l entweder gerade oder ungerade.

$$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$$

Die Funktionen $\left\{ \left(\frac{2l+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} P_l(x) \right\}$ bilden ein VONS auf $[-1, 1]$:

- $\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$
- $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(x') = \delta(x-x')$

Die Radialgleichung (3) lautet somit:

$$\frac{r^2}{u} \frac{d^2 u}{dr^2} = l(l+1) \Rightarrow \boxed{u_l(r) = a_l r^{l+1} + \frac{b_l}{r^l}}$$

Die allgemeine Loesung der Laplace-Gleichung bei Zylindersymmetrie lautet aufgrund des Superpositionsprinzips:

$$\boxed{\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)}$$

Die Koeffizienten $\{a_l\}_l$ und $\{b_l\}_l$ werden durch die Randbedingungen festgelegt. Wenn $\mathbf{0} \in V$ gilt und sich keine Punktladung in V befindet, dann ist $b_l = 0$. Wenn $\infty \in V$ und $\phi(\infty) = 0$, dann ist $a_l = 0$.

Beispiele

- **Punktladung** q bei \mathbf{r}_0 in z -Richtung \Rightarrow Zylindersymmetrie:

$$\Delta\phi = 0 \text{ gilt fuer } V_1 := \{\mathbf{r}|r < r_0\} \text{ und } V_2 := \{\mathbf{r}|r > r_0\}$$

$$\Rightarrow \text{wir bestimmen die Koeffizienten fuer beide Entwicklungen}$$

In V_1 gilt auf der z -Achse ($r < r_0$):

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = r_0 - r \Rightarrow \phi(r, 0) = \frac{q}{r_0 - r} = \frac{q}{r_0 \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} \stackrel{\text{Taylor}}{=} \frac{q}{r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^l$$

$$P_l(\theta = 0) = 1 \Rightarrow a_l = \frac{q}{r_0^{l+1}}, b_l = 0$$

Die Betrachtung der z -Achse reicht zur Bestimmung der Koeffizienten!

In V_2 gilt auf der z -Achse ($r > r_0$):

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = r - r_0 \Rightarrow \phi(r, 0) = \frac{q}{r - r_0} = \frac{q}{r} \left(\frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}}\right) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \frac{q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^l$$

$$P_l(\theta = 0) = 1 \Rightarrow a_l = 0, b_l = qr_0^l$$

Mit den Definitionen $r_> := \max(r, r_0)$, $r_< := \min(r, r_0)$ lassen sich beide Entwicklungen in einer Formel zusammenfassen:

$$\boxed{\phi(r, \theta) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta)}$$

Insbesondere sieht man, dass diese Formel auch fuer $r \rightarrow r_0$ eindeutig ist.

- **Leitende Kugel im homogenen Feld**

Das homogene Feld E_0 in z -Richtung koennte z.B. durch einen Plattenkondensator erzeugt werden. Die Randbedingungen lauten dann:

$$\phi(R, \theta) \equiv \text{const} = \phi_0$$

$$\phi(r \rightarrow \infty, \theta) = -E_0 z + \text{const} = -E_0 r \cos\theta + \phi_1$$

Zylindersymmetrie und die erste Randbedingung liefern:

$$\phi(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l R^l + \frac{b_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) = \phi_0 = \phi_0 P_0(\cos\theta)$$

Multiplikation mit $P_n(\cos\theta)$, Integration ueber θ und Verwendung der Orthogonalitaet ergibt:

$$n = 0 : a_0 + \frac{b_0}{R} = \phi_0 \Rightarrow b_0 = R(\phi_0 - a_0)$$

$$n > 0 : a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}} = 0 \Rightarrow b_n = -a_n R^{2n+1}$$

Mit der zweiten Randbedingung folgt:

$$a_0 = \phi_1, \quad a_1 = -E_0, \quad a_2 = a_3 = \dots = 0$$

$$\Rightarrow b_0 = R(\phi_0 - \phi_1), \quad b_1 = E_0 R^3, \quad b_2 = b_3 = \dots = 0$$

$$\Rightarrow \phi(r, \theta) = \underbrace{\phi_1}_{\text{unwichtige Konstante}} + \underbrace{(\phi_0 - \phi_1) \frac{R}{r}}_{\text{Gesamtladung auf der Kugel}} - \underbrace{E_0 r \cos \theta}_{\text{homogenes Feld}} + \underbrace{E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta}_{\text{Feld der induzierten Ladungen, Dipol}}$$

Wir berechnen die induzierte Gesamtladung vom letzten Term:

$$r = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_R = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_R = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \theta$$

\Rightarrow Positive Ladungen oben, negative Ladungen unten, die Summe verschwindet und die Kugel ist effektiv ein Dipol mit Dipolmoment $\mathbf{p} = E_0 R^3 \mathbf{e}_z$.

\Rightarrow Polarisierbarkeit $\alpha = \frac{p}{E_0} = R^3$ fuer eine leitende Kugel.

Zurueck zur Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten ohne Zylindersymmetrie. Fuer $m \neq 0$ lautet die Differentialgleichung fuer $P(\cos \theta)$:

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P(x) = 0$$

Sie wird geloest durch die "zugeordneten Legendre-Polynome". Sei $P_l^m(x)$ mit $\lambda = l(l+1)$ wie zuvor und $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

Man kann zeigen, dass P_l^m und P_l^{-m} zueinander proportional sind: $P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^{-m}(x)$
 Fuer $m = 0$ ergeben sich wieder die Legendre-Polynome: $P_l^0(x) = P_l(x)$

- Beispiele:

$$P_0^0 = 1, \quad P_1^0 = x, \quad P_1^1 = -\sqrt{1-x^2}, \quad P_1^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2},$$

$$P_2^0 = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_2^1 = -3x\sqrt{1-x^2}, \quad \dots$$

\Rightarrow die zugeordneten Legendre-Polynome sind gar keine Polynome!

Die Abhaengigkeit von θ und φ wird in neuen Funktionen Funktionen zusammengefasst:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l-m}(\theta, \varphi)$$

("Kugelflaechenfunktionen")

- Beispiele:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi},$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1), \quad Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{\pm i\varphi}, \quad \dots$$

In kartesischen Koordinaten:

$$rY_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z, \quad rY_{1,\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\mp x - iy), \quad r^2Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (2z^2 - x^2 - y^2),$$

$$r^2Y_{2,\pm 1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (\mp x - iy) z, \quad \dots$$

Insbesondere sieht man in der kartesischen Darstellung, dass die Terme $r^l Y_{lm}$ unter $\Delta = \partial_i \partial_j$ verschwinden. Wie oben angegeben, bilden die Kugelflaechenfunktionen ein VONS fuer Funktionen $f(\theta, \varphi)$. Die allgemeine Loesung von $\Delta\phi = 0$ in Kugelkoordinaten lautet somit also:

$$\boxed{\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi)}$$

Bemerkung: In der Quantenmechanik ist $l \hat{=}$ Modulus des Drehimpuls. $m \hat{=}$ z -Komponente des Drehimpuls.

Wir entwickeln jetzt $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ nach Kugelflaechenfunktionen. Die Abhaengigkeit von (θ, φ) entwickeln wir nach $\{Y_{lm}\}$ und die von (θ', φ') nach $\{Y_{lm}^*\}$, welches auch ein VONS bildet.

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l,l',m,m'} A_{ll'mm'}(r,r') Y_{l'm'}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\Rightarrow \Delta \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l,l',m,m'} \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) A_{ll'mm'}(r,r') Y_{l'm'}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$= -4\pi \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r-r') \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

$$= -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r-r') \sum_{l,m} Y_{lm}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\stackrel{\text{Koeffizientenvergleich}}{\Rightarrow} A_{ll'mm'}(r,r') = A_{lm}(r,r') \delta_{l'l} \delta_{mm'}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) A_{lm}(r,r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r-r')$$

Eine genaue Untersuchung ergibt $A_{lm}(r,r') = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$

Ein Vergleich mit der Entwicklung in Legendre-Polynomen ergibt das Additionstheorem fuer Kugelflaechenfunktionen (Θ Winkel zwischen (θ, φ) und (θ', φ')):

$$P_l(\cos\Theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Wir betrachten eine in $r < R_0$ lokalisierte Ladungsverteilung und machen eine Multipolentwicklung fuer das Fernfeld in Kugelkoordinaten mit $r_< = r'$, $r_> = r$:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \stackrel{r > R_0}{=} \int \rho(\mathbf{r}') \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) dV' \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{q_{00}}{r} + \frac{q_{10}}{r^2} \cos\theta \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q_{1,\pm 1}}{r^2} \sin\theta e^{\pm i\varphi} + \dots \\ &\Rightarrow \boxed{q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') dV'} \quad (\text{sphaerische Multipolmomente}) \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der kartesischen Multipolentwicklung ergibt:

$$q_{00} = q, \quad q_{10} = p_3, \quad q_{1,\pm 1} = \frac{\mp p_1 + ip_2}{\sqrt{2}}, \quad q_{20} = \frac{Q_{33}}{2}, \quad \text{etc.}$$

Fuer die hoeheren Ordnungen gibt es weniger sphaerische als kartesische Komponenten, was die Rechnung eleganter macht und vereinfacht.

2 Magnetostatik

2.1 Stationaere Stroeme und Magnetfelder

Mikroskopische Erklarung fuer Magneten: Kreisstroeme.

Moderne Erklarung (Quantenmechanik): Spin der Elektronen

Anwendungen: magnetische Speichermedien (Festplatten), MRT (z.B. 7T-Tomograph am DKFZ), Kompass, Magnetsinn von Organismen (Voegel, Fische, Bakterien), Plasma-physik, Astrophysik, etc.

Weltrekord: 91, 4T am HZ Dresden-Rossendorf mit 200kg schwerer Kupferspule

Kuehlschrankmagnet: 0.05T, **Erde:** $5 \cdot 10^{-5}T$

Elektrostatik: Eine ruhende Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ erzeugt ein elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$; eine Testladung q erfahrt dann eine elektrische Kraft $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$.

Magnetostatik: Ein elektrischer Strom (d.h. bewegte Ladungen) erzeugt ein magnetisches Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$; eine bewegte Ladung q erfahrt dann eine magnetische Kraft \mathbf{F}_m .

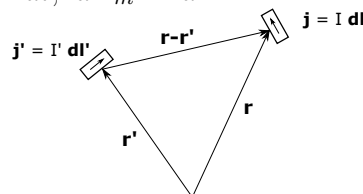
Achtung: Der magnetische Kompass richtet seine Nadel in Richtung des *geographischen* Nordens; da dies seine "Nordseite" ist und sich gegenseitige Pole anziehen, ist der geographische Norden ein magnetischer Sueden!

	Elektrostatik	Magnetostatik	
Quelle	$dq = \rho dV$	$\mathbf{j}dV = I d\mathbf{l}$	Ursache
Feld	$dE(\mathbf{r}) = dq \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{ \mathbf{r}-\mathbf{r}' ^3}$	$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = ?$	Wirkung
Kraft	$d\mathbf{F}_e = dq\mathbf{E}$	$d\mathbf{F}_m = ?$	Wirkung

$I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$ Strom durch eine Flaechе, z.B. durch einen Draht \Rightarrow in der Magnetostatik ist die Quelle vektoriell, nicht skalar! Ladungserhaltung \Rightarrow Kontinuitaetsgleichung $\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. In der Magnetostatik betrachten wir nur *stationaere* Stroeme: $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ (keine Zeitabhaengigkeit), $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$.

Die Formeln fuer \mathbf{B} und \mathbf{F}_m folgen aus experimentellen Befunden: ein stromdurchflossener Leiter an \mathbf{r}' erzeugt ein Feld \mathbf{B} an \mathbf{r} , welches dann die Kraft \mathbf{F}_m bewirkt. Fuer die Kraft findet man experimentell $dF_m \sim I$, $dF_m \sim dl$, $d\mathbf{F}_m \perp d\mathbf{l}$

$$\Rightarrow d\mathbf{F}_m = \frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$



Diese Gleichung kann als *Definition* von \mathbf{B} betrachtet werden ($d\mathbf{F}_m$, I und $d\mathbf{l}$ sind *Messgroessen*). Eine Geschwindigkeit ist aus Dimensionsgruenden noetig. Experi-

mentell findet man die Lichtgeschwindigkeit c .

Fuer \mathbf{B} findet man (experimentell) $dB \sim I'dl'$, $d\mathbf{B} \perp dl'$, $d\mathbf{B} \perp (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$,
 $dB \sim \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}$ (wie dE !)

$$\Rightarrow \boxed{d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I'}{c} dl' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}}$$

Fuer eine gegebene stationaere Stromverteilung kann das Magnetfeld also folgendermassen berechnet werden:

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'} \quad (\text{"Gesetz von Biot-Savart"})$$

Vergleich mit dem Ergebnis aus der Elektrostatik:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'} \quad (\text{"Poisson-Integral"})$$

Lorentz-Kraft auf ein bewegtes Elektron: $\mathbf{j} = q\mathbf{v}$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Aber: \mathbf{B} kann so *nicht* berechnet werden, da ein *einzelnes* Elektron ein *zeitabhaengiges* magnetisches Feld erzeugt.

Das Analogon zum Coulomb-Feld ist nicht die Wechselwirkung zwischen zwei bewegten Ladungen, sondern zwischen zwei unendlich langen, stromdurchflossenen Leitern.

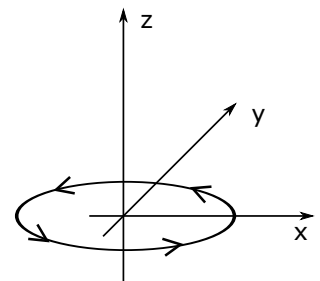
Wir berechnen zunaechst das magnetische Feld um einen Leiter: $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = I\delta(x')\delta(y')\mathbf{e}_z$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{I'}{c} \int \frac{\delta(x')\delta(y')\mathbf{e}_z \times [(x-x')\mathbf{e}_x + (y-y')\mathbf{e}_y + (z-z')\mathbf{e}_z]}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} dV' \\ &= \frac{I'}{c} \int_{\mathbb{R}} \frac{x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x}{(r^2 + (z-z')^2)^{\frac{3}{2}}} dV' \\ &= \boxed{\frac{2I'}{cr}\mathbf{e}_\varphi = B(\mathbf{r})} \quad \text{mit } \mathbf{e}_\varphi := \frac{x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x}{y} \end{aligned}$$

$B \sim \frac{1}{r}$ wie beim elektrischen Feld um eine geladene Linie. Die Feldlinien sind Kreise um den Leiter in einer Ebene senkrecht dazu.

Wir berechnen nun die Kraft auf den zweiten Leiter:

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \frac{1}{c} Idz\mathbf{e}_z \times \left(\frac{2I'}{cr}\mathbf{e}_\varphi\right) = \frac{2II'}{c^2r} dz\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\varphi = \frac{2II'}{c^2r} dz \frac{1}{r}\mathbf{e}_x (x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x) \\ &= \frac{2II'}{c^2r} dz \frac{1}{r} (-x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y) = \frac{2II'}{c^2r} dz (-\mathbf{e}_r) \\ \Rightarrow \boxed{\frac{d\mathbf{F}}{dz} = \frac{-2II'}{c^2r}\mathbf{e}_r} \end{aligned}$$



Zwei gleichgerichtete Draehete ziehen sich mit dieser Kraft pro Laenge an. Die Kraefte wirken parallel zur kuerzesten Verbindung.

Analog zum Coulomb-Gesetz: $F_C = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ aber anders als Abstandsgesetz wegen Integration!

Einheitentest: $[F_m] = \frac{A^2 s^2}{m^2} = \frac{C^2}{m^2} = [F_e] \checkmark$

SI-System: $F = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$ fuer $I_1 = I_2 = 1A$, $R = 1m$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$[B] = \frac{kg}{As^2} = 1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss}, \quad c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$$

2.2 Die Feldgleichungen der Magnetostatik

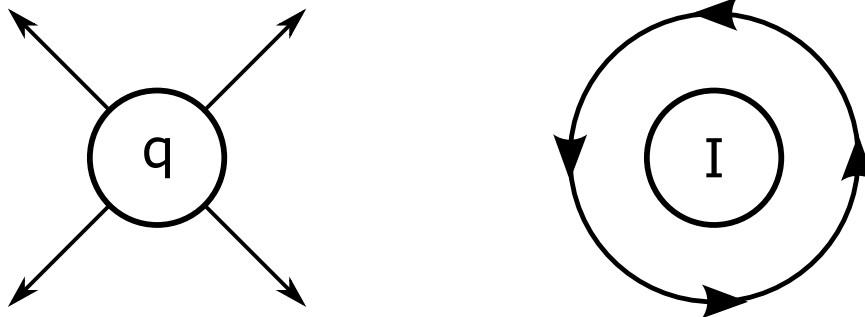
Analog zum skalaren Potential $\phi(\mathbf{r})$ der Elektrostatik fuehren wir jetzt ein Vektorpotential \mathbf{A} fuer die Magnetostatik ein (vgl. Zerlegungs- und Eindeutigkeitssatz fuer Vektorfelder).

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{-(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &\Rightarrow \boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'} \end{aligned}$$

Dies ist analog zu $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, $\phi = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$.

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (\text{analog zu } \nabla \times \mathbf{E} = 0)$$

Das magnetische Feld hat keine Quellen und seine Feldlinien sind geschlossen. Es gibt keine magnetischen Monopole (experimentelle Beobachtung)! Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Flaechе verschwindet: $0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV' = \int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$



Wir berechnen die Rotation:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \underbrace{\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)}_{=-\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} dV' \\ &= \frac{1}{c} \int \underbrace{(\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'))}_{=0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = 0 && \text{("Coulomb-Eichung")} \\ \Delta \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \underbrace{\Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = \frac{-4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ \Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r})} && \text{("Amperesches Gesetz")} \end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis folgt auch aus dem Zerlegungssatz und der Definition von \mathbf{A} . Mit $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r})$ ist $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ eindeutig bestimmt! Das Randwertproblem der Magnetostatik lautet $\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r})$.

Integrale Form des Ampereschen Gesetz: wir integrieren ueber eine beliebige Flaechen A mit Rand $\partial A = C$:

$$\begin{aligned} \int_A (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} I_A \\ \Rightarrow \boxed{I_A = \frac{c}{4\pi} \int_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}} && \text{("Amperesches Durchflutungsgesetz")} \end{aligned}$$

Dies ist analog zum Gauss'schen Gesetz in Integralform: $Q_V = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$.

Hierbei war der elektrische Fluss $\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ frueher auch als I_A definiert. Jetzt bezeichnen wir damit den magnetischen Fluss.

Der Gesamtstrom durch die Flaechen I_A ergibt sich aus dem Wegintegral. Er verschwindet fuer geschlossene Flaechen A.

Beispiele

- duenner, stromdurchflossener Leiter

Es gilt: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

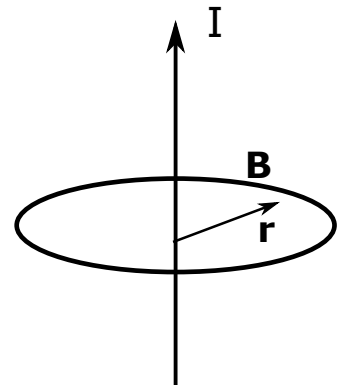
\Rightarrow Feldlinien geschlossen.

Zylindersymmetrie

\rightsquigarrow Kreise mit Radius r um den Leiter

$$\Rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = 2\pi r B(r) = \frac{4\pi}{c} I$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{2I}{cr} \text{ wie oben } \checkmark$$



- dicker, homogen durchflossener Leiter (Analogon zur homogen geladenen Kugel in der Elektrostatik)

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{e}_z \frac{I}{\pi R^2}, & \text{falls } r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \Rightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{e}_z$$

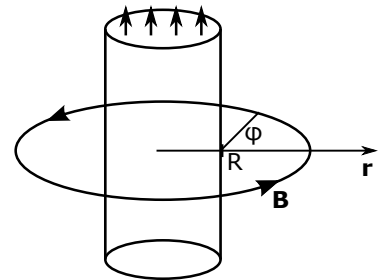
$$\Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(r) \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A(r) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$$= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \underbrace{\partial_\varphi A_z}_{=0} - \underbrace{\partial_z A_\varphi}_{=0} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\underbrace{\partial_z A_r}_{=0} - \partial_r A_z \right)$$

$$+ \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \left(\partial_r \left(r \underbrace{A_\varphi}_{=0} \right) - \underbrace{\partial_\varphi A_r}_{=0} \right)$$

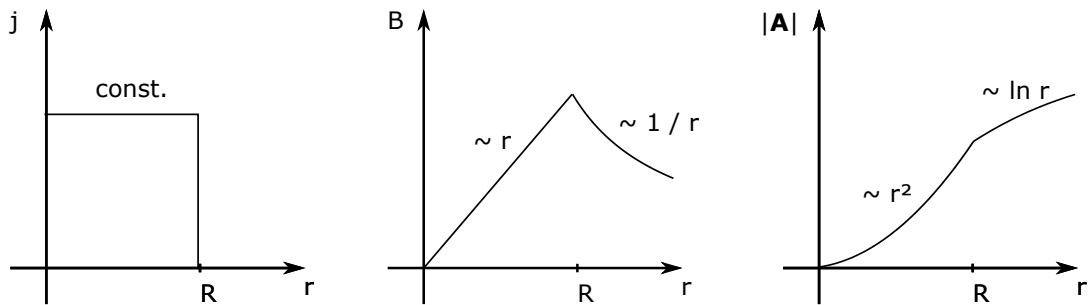
$$= -A'(r) \mathbf{e}_\varphi = B(r) \mathbf{e}_\varphi$$



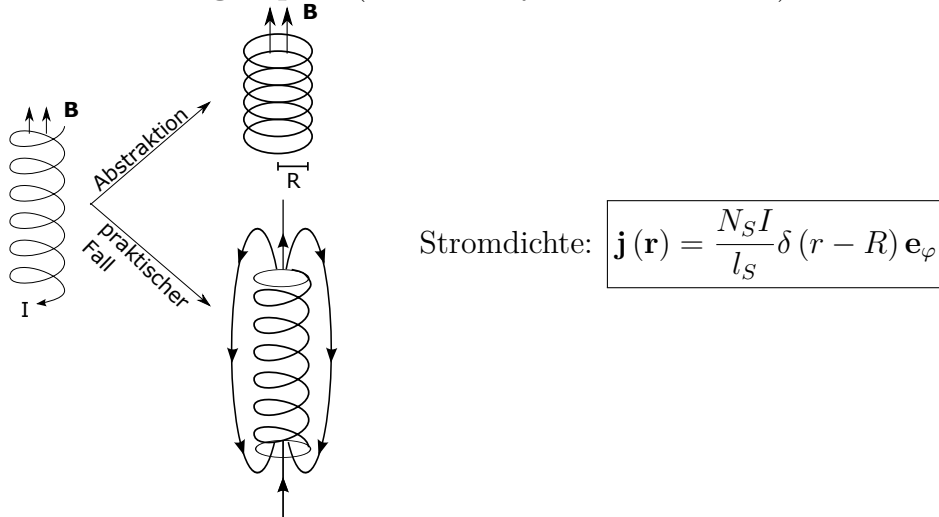
Wie zuvor werten wir nun das Ampersche Durchflutungsgesetz auf einem Kreis mit Radius r aus:

$$\oint B dr = 2\pi r B(r) = \frac{4\pi}{c} I_A = \begin{cases} \frac{I r^2}{R^2}, & \text{falls } r \leq R \\ I, & r > R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}(r) = \frac{2I}{c} \mathbf{e}_\varphi \begin{cases} \frac{r}{R^2} & r \leq R \\ \frac{1}{r} & r > R \end{cases}$$



• **Unendlich lange Spule** (wieder in Zylinderkoordinaten)



$$\mathbf{j} \perp \mathbf{e}_z \Rightarrow \mathbf{A} \perp \mathbf{e}_z \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

Zylindersymmetrie: $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_r(r) \mathbf{e}_r + A_\varphi(r) \mathbf{e}_\varphi$

$$0 = \text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \partial_r (r A_r) \Rightarrow A_r = \frac{c}{r}$$

\mathbf{A} darf bei $r \rightarrow 0$ nicht divergieren $\Rightarrow c = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = A_\varphi(r) \mathbf{e}_\varphi$

Für das Magnetfeld folgt: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \partial_r (r A(r)) = B(r) \mathbf{e}_z = \mathbf{B}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} &= -B'(r) \mathbf{e}_\varphi \\ &= -\partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_r (r A(r)) \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{4\pi}{c} \frac{N_S I}{l_S} \delta(r - R) \end{aligned}$$

1. Integration liefert: $\frac{1}{r} \partial_r (rA(r)) = \frac{4\pi}{c} \frac{N_S I}{l_S} (\Theta(r-R) + c_1)$
2. Integration liefert: $rA(r) = \frac{-4\pi}{c} \frac{N_S I}{l_S} \left[\frac{(r^2 - R^2)\Theta(r-R)}{2} + c_1 \frac{r^2}{2} + c_2 \right]$

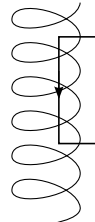
Wegen $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$ muessen $A(0) = 0$ und $A(\infty) = 0$ sein und somit $c_1 = -1$ und $c_2 = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{A(\mathbf{r}) = A(r) \mathbf{e}_\varphi = \frac{4\pi}{c} \frac{N_S I}{l_S} \mathbf{e}_\varphi \begin{cases} \frac{r}{2} & r \leq R \\ \frac{R^2}{2r} & r > R \end{cases}}$$

Das Magnetfeld ist dann:

$$\boxed{B(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \partial_r (rA(r)) \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \begin{cases} \frac{4\pi}{c} \frac{N_S I}{l_S} & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}}$$

Im Inneren der Spule ist es konstant, ausserhalb der Spule verschwindet es! Also ist die Spule die Standardloesung fuer die Erzeugung eines homogenen Magnetfelds (analog zum Plattenkondensator in der Elektrostatik). Wenn dieses allgemeine Ergebnis bekannt ist, koennen die Details mit dem integralen Ampere-Gesetz hergeleitet werden. Wir verwenden die Schleife C fuer das Wegintegral:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = l_S B_0 = \frac{4\pi}{c} I_A = \frac{4\pi}{c} N_S I \Rightarrow B_0 = \frac{4\pi}{c} \frac{N_S I}{l_S} \checkmark$$


Fuer eine endliche Spule muss der endliche Fluss $I_A = \pi R^2 \frac{4\pi}{c} \frac{N_S I}{l_S}$ ueber den gesamten Aussenraum zurueckfliessen, ist dort also sehr klein.

2.3 Lokalisierte Stromverteilungen

Bisher haben wir unendlich ausgedehnte Leiter betrachtet. Jetzt untersuchen wir den Fall, dass die Stroeme nur in einem beschraenkten Gebiet $|\mathbf{r}'| < R$ fluessen. Fuer $|\mathbf{r}| > R$ verwenden wir eine kartesische Multipolentwicklung:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \left[\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{r'^2}{r^3}\right) \right] dV'$$

Der erste Term verschwindet, da:

$$\begin{aligned} \nabla(r_l \mathbf{j}) &= \partial_k (r_l j_k) = j_l + r_l \underbrace{(\partial_k j_k)}_{\nabla \cdot \mathbf{j} = 0} \\ \Rightarrow \int j_l(\mathbf{r}') dV' &= \int \nabla' (r_l' \mathbf{j} r') dV' = r_l' \mathbf{j} r' \Big|_{Rand} = 0 \end{aligned}$$

Ausserdem haben wir:

$$0 = \int \partial_k (r_l' j_k(\mathbf{r}') r_{m'}) dV' = \int \left[\underbrace{(\partial_k r_l')}_{=\delta_{kl}} j_k r_{m'} + r_l' \underbrace{(\partial_k j_k)}_{=0} r_{m'} + r_l' j_k \underbrace{(\partial_k r_{m'})}_{=\delta_{km}} \right] dV'$$

$$\Rightarrow \int r_{m'} j_l(\mathbf{r}') dV' = - \int r_l' j_m(\mathbf{r}') dV'$$

Damit lautet der 2. Term der Multipolentwicklung:

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \frac{1}{r^3} r_l \int r_l' j_k(\mathbf{r}') dV' = \frac{r_l}{2cr^3} \int r_l' j_k(\mathbf{r}') - r_k' j_l(\mathbf{r}') dV'$$

$$= \frac{1}{2cr^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') j_k(\mathbf{r}') - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) r_k' dV' = \frac{1}{2cr^3} \int ((\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \times \mathbf{r})_k dV'$$

Wir definieren das magnetische Dipolmoment

$$\boxed{\mathbf{m} := \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}$$

in Analogie zum elektrischen Dipolmoment $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}}$$

analog zum Potential eines elektrischen Dipols $\phi(\mathbf{r}') = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3}$.

Die Stromdichte zum magnetischen Dipol ergibt sich formal als:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{c}{4\pi} \Delta \mathbf{A} = -\frac{c}{4\pi} \Delta \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{c}{4\pi} \Delta (\mathbf{m} \times \nabla) \frac{1}{r} = -c (\mathbf{m} \times \Delta) \delta(\mathbf{r})$$

$\Rightarrow \mathbf{j}$ verschwindet fuer $\mathbf{r} \neq 0$, es handelt sich um einen *Punktdipol*. \mathbf{j} ist eine Distribution und kann in Integralen verwendet werden. Insbesondere gilt:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -\mathbf{m} \times \int (\nabla' \delta(\mathbf{r}')) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$= \mathbf{m} \times \int \delta(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \int \delta(\mathbf{r}') \left(-\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'$$

$$= \int \delta(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \checkmark$$

Das magnetische Feld folgt als

$$\begin{aligned}
 B_i &= (\nabla \times \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \frac{1}{r^3} m_l r_m = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} m_l \partial_j \left(\frac{r_m}{r^3} \right) \\
 &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} m_l \left(\frac{\delta_{jm}}{r^3} - \frac{3r_m r_j}{r^5} \right) = \frac{3m_i}{r^3} - \frac{3m_i r^3}{r^5} - \frac{m_i}{r^3} + \frac{3r_i (m_l r_l)}{r^5} \\
 &\Rightarrow \boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{r\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}}
 \end{aligned}$$

analog zum elektrischen Feld eines elektrischen Dipols $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}$.
 Fuer einen konstanten Strom I in einer Ebene haben wir einen geschlossenen Weg $C = \partial A$
 so, dass:

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2c} \int (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}') dV' = -\frac{1}{2c} I \oint_C d\mathbf{r}' \times \mathbf{r}' = \frac{I}{c} \int_A d\mathbf{A} = \frac{I}{c} A \mathbf{e}_z$$

Fuer eine Leiterschleife mit Radius R : $\boxed{\mathbf{m} = \frac{I\pi R^2}{c} \mathbf{e}_z}$. Man erhaelt dieses Ergebnis auch folgendermassen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}(\mathbf{r}') &= I \delta(r' - R) \delta(z') \mathbf{e}_\varphi \\
 \Rightarrow \mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \int_0^\infty r' dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^\infty dz' (r' \mathbf{e}_r + z' \mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_\varphi I \delta(r' - R) \delta(z') \\
 &= \frac{I}{2c} 2\pi r'^2 \underbrace{(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi)}_{=\mathbf{e}_z} \Big|_{r'=R} = \frac{I\pi R^2}{c} \mathbf{e}_z \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Systeme, die sich wie magnetische Dipole verhalten: Magnet, Spule, Leiterschleife, Erde, Elektron, Proton, Neutron, etc.

Gyromagnetisches Verhaeltnis

Fuer einen rotierenden starren Koerper aehneln das magnetische Dipolmoment \mathbf{m} dem Drehimpuls \mathbf{L} . Sei ω der Rotationsvektor und \mathbf{r} der Ortsvektor

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \omega \times \mathbf{r} \\
 \Rightarrow \mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \int \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r})) dV
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{L} = \int \rho_m(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r})) dV$$

Wenn beide Dichten im Koerper gleich verteilt sind, $\frac{\rho}{q} = \frac{\rho_m}{m}$, dann folgt $\mathbf{m} = \frac{q}{2mc} \mathbf{L}$

$$\Rightarrow \frac{|\mathbf{m}|}{|\mathbf{L}|} = \frac{gq}{2mc} \quad (\text{gyromagnetisches Verhaeltnis, "g-Faktor"})$$

z.B. fuer ein Elektron: $|\mathbf{L}| = \frac{\hbar}{2} \Rightarrow |\mathbf{m}| = \frac{ge\hbar}{4m_e c}$

Experimentell findet man $g \approx 2.002$. Die *relativistische* Dirac-Gleichung ergibt $g = 2$ und mit der QED kann man Korrekturen ausrechnen, die bis auf 10 Nachkommastellen mit dem experimentellen Wert uebereinstimmen!!!

Fuer Proton und Neutron findet man $g_p \approx 5.58$, $g_n \approx -3.82$ (bei fiktiver Ladung e).

\Rightarrow alle g -Faktoren sind von der Groessenordnung 1, d.h. die Masse sagt zumindest die Groessenordnung des magnetischen Moments von Elementarteilchen voraus.

Welche Kraft \mathbf{F} und welches Drehmoment \mathbf{M} wirken auf einen magnetischen Dipol im aeusseren Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$? Es gilt $\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV'$. Wir entwickeln \mathbf{B} um $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}') = \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{r}' \cdot \nabla_0) \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) + \dots$$

$$\Rightarrow F_i = \frac{1}{c} \int \underbrace{\varepsilon_{klm} j_l(\mathbf{r}') B_m(\mathbf{r}_0)}_{=0} dV' + \frac{1}{c} \int \varepsilon_{klm} j_l(\mathbf{r}') (r'_n \partial_n^0) B_m(\mathbf{r}_0) dV'$$

Dieses Integral hat also den gleichen Charakter wie oben der 2. Term der Multipolentwicklung!

Wir verwenden wieder $\int r'_m j_l(\mathbf{r}') dV' = - \int r'_l j_m(\mathbf{r}') dV'$ und verdoppeln damit den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{2c} \int [(\mathbf{r}' \cdot \nabla_0) \mathbf{j}(\mathbf{r}') - \mathbf{r}' (\nabla_0 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'))] \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) dV' \\ &= \frac{1}{2c} \int [(\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \times \nabla_0] \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \\ &= (\mathbf{m} \times \nabla_0) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \nabla_0 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)) - \underbrace{\mathbf{m} (\nabla_0 \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_0))}_{=0} \\ &\Rightarrow \boxed{\mathbf{F} = -\nabla_0 V_m} \text{ mit } V_m := -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \quad (\text{Feldgleichung fuer externes Feld}) \end{aligned}$$

In einem homogenen Magnetfeld verschwindet diese Kraft (analog zum elektrischen Feld). Das Drehmoment $\mathbf{M} = \frac{1}{c} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) dV$ errechnet sich in einer aehnlichen

Weise zu

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}}$$

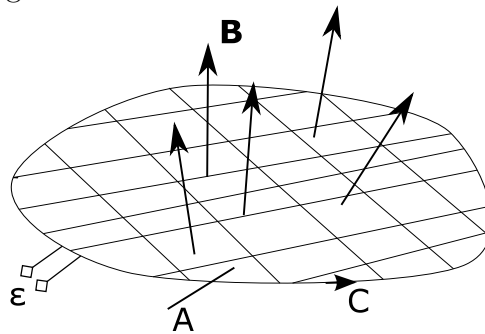
analog zum Drehmoment $\mathbf{p} \times \mathbf{E}$, das ein elektrisches Dipol im aeusseren Feld erfahrt.

3 Elektrodynamik

3.1 Maxwell-Gleichungen

Bei dynamischen Prozessen sind \mathbf{E} und \mathbf{B} gekoppelt.
Bisheriger Stand: entkoppelte Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{aligned}$$



Faradaysche Ergaenzung 1831: Induktionsgesetze

$$\text{magnetischer Fluss: } I_A = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

experimentelle Beobachtung: Aenderung von I_A erzeugt einen Strom in der Schleife

$$\text{Ringspannung: } \mathcal{E} := \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{dI_A}{dt}$$

Lenzsche Regel: der induzierte Strom erzeugt ein Magnetfeld, das dem Alten entgegenwirkt.

$$\begin{aligned} \text{Stokes: } \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = -\frac{1}{c} \frac{dI_A}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{1}{c} \int \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{A} \\ &\Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}} \end{aligned}$$

Diese neue Gleichung erzeugt eine Inkonsistenz! \Rightarrow Maxwellsche Ergaenzung 1865

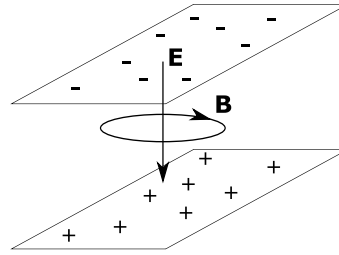
Problem: Kontinuitaetsgleichung (Ladungserhaltung) soll erfuehrt sein: $\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

$$\dot{\rho} = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \right) = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = -\nabla \cdot \mathbf{j} \Rightarrow \nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{E}} \right) = 0$$

Widerspruch zur Magnetostatik: $\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$

$$\Rightarrow \text{verbesserte Feldgleichung: } \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{E}}}_{\text{''Verschiebungsstrom''}} \right)$$

exp. Beispiel: Kondensator
wird kurzgeschlossen $\Rightarrow \mathbf{E}$
wird abgebaut \Rightarrow erzeugt
Magnetfeld, Testmagnet be-
wegt sich



Voller Satz Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Check Kontinuitaetsgleichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \left(\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})}_{=0} - \frac{1}{c} \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} \right) = -\frac{1}{4\pi} \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\dot{\rho} \quad \checkmark$$

3.2 Potentiale

Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$) haben Wellenloesungen!

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad | \nabla \times$$

$$\mathbf{0} = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} - \Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c}\partial_t \underbrace{(\nabla \times \mathbf{E})}_{=-\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B}} = -\Delta \mathbf{B} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \text{Wellengleichung: } \boxed{\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right) \mathbf{B} =: \square \mathbf{B} = \mathbf{0}} \quad (\text{"d'Alembert Operator"})$$

$$\mathbf{0} = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{E})}_{=0} - \Delta \mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t \underbrace{(\nabla \times \mathbf{B})}_{=\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E}} = -\Delta \mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\square \mathbf{E} = \mathbf{0}}$$

Die elektromagnetischen Wellen wurden 1886-1888 von Heinrich Hertz nachgewiesen.
Zur Vereinfachung der Rechnungen fuehren wir Potentiale ein:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \Rightarrow \mathbf{0} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A}\right) =: \nabla \times (-\nabla\phi) -$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A}} \Rightarrow \text{Reduktion von 6 auf 4 Variablen!}$$

Ausserdem: "Eichfreiheit"

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda$$

$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda \Rightarrow$ veraendert Maxwell-Gleichungen und somit \mathbf{E}, \mathbf{B} nicht

4. Maxwell-Gleichung umschreiben auf \mathbf{A} und ϕ :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{c} \partial_t (\nabla \phi + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ &= \underbrace{-\Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A}}_{=\square \mathbf{A}} + \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi)}_{=0} \end{aligned} \quad (\text{"Lorentz-Eichung"})$$

Gleichung fuer Lorentz-Eichung bei Eichtransformation:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} + \Delta \Lambda + \frac{1}{c} \partial_t \phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Lambda &= 0 \\ \Rightarrow \square \Lambda = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi & \quad (\text{"inhom. Wellengleichung"}) \end{aligned}$$

\Rightarrow kann immer geloest werden! (kommt spaeter)

\Rightarrow Lorentz-Eichung kann vorausgesetzt werden

$$\Rightarrow \boxed{\square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}} \quad (\text{"Wellengleichung fuer } \mathbf{A} \text{"})$$

$$1. \text{ Maxwell-Gleichung: } -\Delta \phi - \frac{1}{c} \partial_t \left(-\frac{1}{c} \partial_t \phi \right) = -\Delta \phi + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi = 4\pi \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\square \phi = 4\pi \rho} \quad (\text{"Wellengleichung fuer } \phi \text{"})$$

\Rightarrow Im Vakuum breiten sich $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \phi, \mathbf{A}$ mit Lichtgeschwindigkeit aus!

3.3 Einschub: Wellengleichungen

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \right) u(\mathbf{r}, t) = 0$$

Behauptung: Die Wellengleichung hat Loesungen der Form $f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$ fuer $f(x)$ und Normalenvektor \mathbf{n} beliebig.

Beweis:

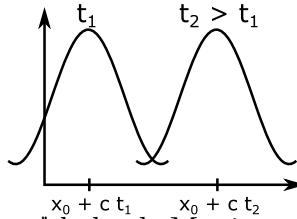
$$\partial_t^2 f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) = c^2 f''(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$$

$$\nabla f = \mathbf{n} f'$$

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \mathbf{n}^2 f'' = f''$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \partial_t^2 f - \Delta f = f'' - f'' = 0 \quad \checkmark$$

Bedeutung: $f(x)$ habe ein Maximum bei $x_0 \Rightarrow$ bewegt sich nach rechts mit der Zeit



In 3d: Maximum bei $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = ct \Rightarrow$ "Wellenfront" behält Maximum \Rightarrow Welle breitet sich in Richtung \mathbf{n} aus \Rightarrow keine "Dispersion" (Welle läuft nicht auseinander), da $c \equiv const$

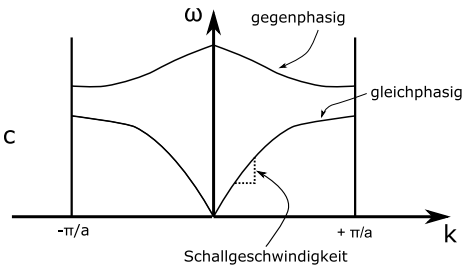
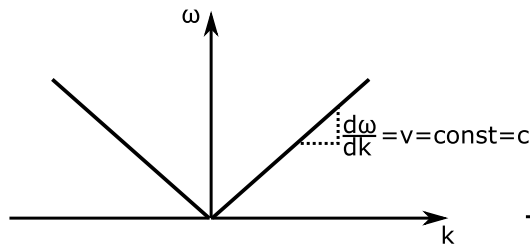
Das wichtigste Beispiel ist: $f(x) = e^{ikx}$ ("harmonische oder ebene Wellen")

$\Rightarrow u(\mathbf{r}, t) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega t}$
 Komplexer Fourieransatz: Einsetzen in Wellengleichung $\Rightarrow Re(u(\mathbf{r}, t))$ wird als physikalische Lösung genommen. Dabei ist \mathbf{k} "Wellenvektor", $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ Ausbreitungsrichtung, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ räumliche Periode, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ zeitliche Periode.

Einsetzen in Wellengleichung: $\Rightarrow \underbrace{\left(-\frac{1}{c^2}\omega^2 + k^2\right)}_{=0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega t} = 0$

$\Rightarrow \boxed{|\omega| = kc}$

("Dispersionsrelation fuer Photonen")



Zum Vergleich: harmonische Kette = einfachste mechanische Schwingung

$$\begin{aligned} F_n &= m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = K(u_{n+1} - u_n) - K(u_n - u_{n-1}) \\ &= a^2 K \frac{u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n}{a^2} \approx a^2 K \Delta u_n \\ &\Rightarrow \Delta u_n - \underbrace{\frac{m}{a^2 K}}_{=\frac{1}{v^2}} \partial_t^2 u_n = 0 \end{aligned}$$

("Wellengleichung")

Das ist aber nur eine Naehering. Exakte Loesung:

$$u_n(x, t) = u_k(t) e^{ikx}, \quad x = na$$

$$\Rightarrow m \ddot{u}_k e^{ikx} = K(e^{ika} + e^{-ika} - 2)e^{ikx} u_k(t) = 2K(\cos(ka) - 1)e^{ikx} u_k(t)$$

$$\text{Ansatz: } u_k(t) = A_k e^{i\omega_k t} \Rightarrow \omega_k^2 = \frac{2K}{m} (1 - \cos(ka)) = \frac{2K}{m} \left(1 - \cos\left(\frac{ka}{2} + \frac{ka}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2K}{m} 2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_k = 2 \sqrt{\frac{K}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|}$$

("Dispersionsrelation fuer harmonische Kette")

Fuer $ka \ll 1$: $v = \frac{\partial \omega_k}{\partial k} = \sqrt{\frac{K}{m}} a$ wie bei Naehung

Zurueck zur allgemeinen Wellengleichung $\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta\right) u(\mathbf{r}, t) = 0$

\rightsquigarrow Fourieransatz (im Raum): $u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \tilde{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k$

Einsetzen in Wellengleichung:

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \ddot{\tilde{u}} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (\text{"Helmholtz-Gleichung"})$$

\rightsquigarrow Fourieransatz (in Zeit): $\tilde{u}(\mathbf{k}, t) = \alpha(\mathbf{k}) e^{i\omega t} + \beta(\mathbf{k}) e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left(\alpha(\mathbf{k}) e^{i\omega t} + \beta(\mathbf{k}) e^{-i\omega t}\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k$$

Anfangsbedingungen: $u(\mathbf{r}, t=0) = a(\mathbf{r}), \dot{u}(\mathbf{r}, 0) = b(\mathbf{r})$

$$\Rightarrow u(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int (\alpha + \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \dot{u}(\mathbf{r}, 0) \tilde{a} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \tilde{a}, \quad i\omega(\alpha - \beta) = \tilde{b}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \tilde{a} + \frac{1}{2\omega i} \tilde{b}, \quad \beta = \frac{1}{2} \tilde{a} - \frac{1}{2\omega i} \tilde{b}$$

Damit ist die allgemeine Loesung der Wellengleichung bekannt. Eine besondere Loesung ist der sogenannte "Wellenausbreitungskern" $D(\mathbf{r}, 0) = 0, \dot{D}(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r})$

Behauptung: Die allgemeine Loesung ist dann:

$$u(\mathbf{r}, t) = \int a(\mathbf{r}') \dot{D}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t) + b(\mathbf{r}') D(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t) d^3r'$$

D ist ein "Propagator": propagiert die Welle von r' nach r

Beweis.

$$\square D = 0 \Rightarrow \square u = \int a(\mathbf{r}') \underbrace{\square \dot{D}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t)}_{=\partial_t \square D=0} + b(\mathbf{r}') \underbrace{\square D(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t)}_{=0} d^3r' = 0$$

$$u(\mathbf{r}, t=0) = \int a(\mathbf{r}') \underbrace{\dot{D}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', 0)}_{=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} + b(\mathbf{r}') \underbrace{D(\mathbf{r}-\mathbf{r}', 0)}_{=0} d^3r' = a(\mathbf{r}) \quad \checkmark$$

$$\dot{u}(\mathbf{r}, t=0) = \int a(\mathbf{r}') \underbrace{\ddot{D}}_{=c^2 \Delta D=0} + b(\mathbf{r}') \underbrace{\dot{D}}_{=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3r' = b(\mathbf{r}) \quad \checkmark$$

□

Behauptung: Die Greens-Funktion fuer die inhomogene Wellengleichung folgt aus D .

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta\right) G(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}) \delta(t) \Rightarrow \boxed{G(\mathbf{r}, t) = c^2 \Theta(t) D(\mathbf{r}, t)}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\dot{G}(\mathbf{r}, t) &= \underbrace{c^2 \delta(t) D(\mathbf{r}, t)}_{=0} + c^2 \Theta(t) \dot{D}(\mathbf{r}, t) \\
\ddot{G}(\mathbf{r}, t) &= \underbrace{c^2 \delta(t) \dot{D}(\mathbf{r}, t)}_{=\delta(t)\delta(\mathbf{r})} + c^2 \Theta(t) \ddot{D}(\mathbf{r}, t) \\
&\Rightarrow \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \right) G = \delta(t) \delta(\mathbf{r}) + \Theta(t) \ddot{D}(\mathbf{r}, t) - c^2 \Theta(t) \underbrace{\Delta D}_{\frac{1}{c^2} \ddot{D}} \\
&= \delta(t) \delta(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

□

Also koennen wir auch die inhomogene Wellengleichung loesen: $\square u = -h(\mathbf{r})$ (h Quelle)

$$u(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \int h(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') dt'$$

Die Lorentzzeichnung bewirkt eine inhomogene Wellengleichung \rightsquigarrow mit Greens-Formalismus loesbar

Zum Schluss rechnen wir den Wellenleitungskern explizit aus:

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{r}, t=0) &= 0, \quad \dot{D}(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}) \Rightarrow \tilde{a}(\mathbf{k}) = 0, \quad \tilde{b}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \\
\Rightarrow D(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2\omega i} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3 k \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2\omega i} \int_{-1}^1 dx e^{ikrx} \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2\omega i} \frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k^2 dk \frac{-1}{2k^2 r c} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{-1}{2rc} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\
&= \frac{-1}{2rc(2\pi)^2 2} \int_{\mathbb{R}} dk \left[e^{i(kr+\omega t)} - e^{i(-kr+\omega t)} - e^{i(kr-\omega t)} + e^{i(-kr-\omega t)} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi c^2 r} \left[\delta\left(t - \frac{r}{c}\right) - \delta\left(t + \frac{r}{c}\right) \right] \sim \frac{1}{r} \quad \text{wie bei Laplace-Gleichung}
\end{aligned}$$

⇒ haengt nur von \mathbf{r} ab \rightsquigarrow Kugelwelle mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit c !

$$\boxed{D(r, t) = \frac{1}{4\pi c^2 r} \left[\delta\left(t - \frac{r}{c}\right) - \delta\left(t + \frac{r}{c}\right) \right]} \quad (*)$$

Mit Green'scher Funktion:

$$\Rightarrow \boxed{G(r, t) = \Theta(t) \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right)} \quad (\text{"retardierter Propagator"})$$

(*) Welle in negativer Zeitrichtung ist unphysikalisch (akausal) → kann weggelassen werden!

Maxwell-Gleichung mit Wellen

$$\begin{aligned} 4\pi\rho &= \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \right) \\ &= -\Delta\phi - \frac{1}{c} \partial_t \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{= -\frac{1}{c} \partial_t \phi} = -\Delta\phi + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi = \square\phi \end{aligned}$$

\rightsquigarrow inhomogene Wellengleichung $\Rightarrow \phi(\mathbf{r}, t) = \int dt' \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') 4\pi\rho(\mathbf{r}', t') dV'$

$$\boxed{\phi = \int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) dV'} \quad (\text{"retardiertes Potential"})$$

ohne Zeitabhaengigkeit:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (\text{"Poisson-Integral der Elektrostatik"})$$

Dito fuer Vektorpotential: $\square\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) dV'}$$

Bemerkung zur Fouriertransformation:

allgemeine Form: $u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int d\omega \tilde{u}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\omega t}$

Elektrodynamik: Wellengleichung ergibt Dispersionsrelation $|\omega| = kc \Rightarrow \omega$ -Integration faellt weg

$$\Rightarrow u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \left[\alpha(\mathbf{k}) e^{i\omega t} + \beta(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

3.4 Elektromagnetische Wellen (im Vakuum)

Fourieransatz:

$$E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

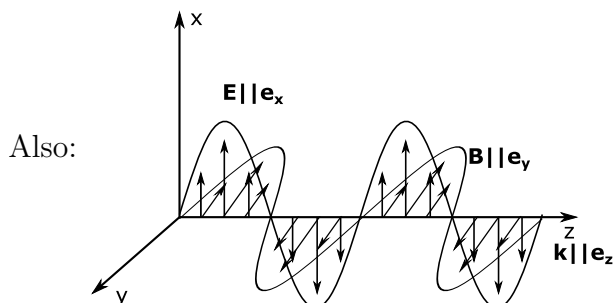
$$B(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} \Rightarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{c}(-i\omega)\mathbf{B}_0 \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}_0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{\omega}{c}\mathbf{E}_0$$



Lineare Gleichungen: Ueberlagerung moeglich
 Ueberlagerung von zwei Wellen:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = [E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$$

Fuer $E_i = |E_i| e^{i\varphi_i}$ unterscheiden wir 3 Faelle:

- $\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \mathbf{E}$ gedrehte Richtung, aber Richtung ist konstant, "linear polarisiert"
- $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2}$, $|E_2| = |E_1| \Rightarrow E_2 = \pm i E_1 \Rightarrow \text{Re}(E)$ rotiert, "zirkular polarisiert"
- $\varphi_2 \neq \varphi_1$, $\varphi_2 \neq \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ "elliptisch polarisiert"

3.5 Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes

Lorentz-Kraft auf geladenes Teilchen:

$$\mathbf{F}_L = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

Bei Ortsveraenderung $d\mathbf{r}$ wird folgende Arbeit am Teilchen verrichtet:

$$dW = \mathbf{F}_L \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}_L \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = F_L \cdot \mathbf{v} dt = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt$$

Das Magnetfeld verrichtet keine Arbeit.

Teilchen im Magnetfeld: $m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

kinetische Energie: $T = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2) = m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow T \equiv const, |\dot{\mathbf{r}}| \equiv const$

Kontinuumsversion: $\mathbf{j} = q\mathbf{v}$

Leistung:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) dV = \int \mathbf{E} \frac{c}{4\pi} \left(\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \right) dV \\ &= \frac{c}{4\pi} \int \left[-\nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \underbrace{(\nabla \times \mathbf{E})}_{= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}} - \mathbf{E} \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \right] dV \end{aligned}$$

Bilanz: Energieerhaltung:

$$0 = \underbrace{\frac{dW}{dt}}_* + \underbrace{\frac{c}{4\pi} \int \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV}_{**} + \underbrace{\frac{d}{dt} \int \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) dV}_{***}$$

* = "Energieuebertrag durch auesseres Feld pro Zeit"

** = "Oberflaechenbeitrag (= $\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$)"

*** = "Energiedichte des elektromagnetischen Feldes"

$$\boxed{\mathbf{S} := \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}$$

("Poynting-Vektor")

Kontinuitaetsgleichung:

$$\frac{d\omega}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{S} + \dot{\omega}_{em} = 0$$

Mechanischer Impuls eines Teilchens:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_{mech}}{dt} &= \mathbf{F}_L q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \\ \longrightarrow \frac{d\mathbf{P}_{mech}}{dt} &= \int \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{B} dV = \dots = \int -\frac{d}{dt} \mathbf{g}_{em} + \partial_j T_{ji} \mathbf{e}_i dV \end{aligned}$$

Definition:

$$\mathbf{g}_{em} := \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \quad (\text{"Impulsdichte em-Feld"})$$

$$T_{ij} := \frac{1}{4\pi} \left(E_{ij} + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right)$$

Bilanz: Impulserhaltung

$$0 = \left(\frac{d\mathbf{P}_{mech}}{dt} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{g}_{em} dV \right)_i - \int \frac{\partial}{\partial V} T_{ji} dA_j$$

$T_{ji} n_j$ ist i -te Komponente der Kraft pro Flaeche, die auf $d\mathbf{A}$ ausgeuebt wird.

3.6 Dipolstrahlung

Aehnlich Multipolentwicklung: Quellen räumlich begrenzt, $|\mathbf{r}'| < R$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}') e^{i\omega t}, \quad \omega = kc \quad (\text{"Dispersionsrelation"})$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}, \quad \forall |\mathbf{r}'| > R$$

Fernfeld und Langwellennaeherung: $|\mathbf{r}| \gg R, R \ll \lambda \ll |\mathbf{r}|$

Inhomogene Wellengleichung:

$$\square \mathbf{A} = \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \right) \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

$$= e^{-i\omega t} \frac{1}{c} \int j(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

Taylorreihe in $\left| \frac{\mathbf{r}'}{\mathbf{r}} \right| \ll 1$:

$$e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = e^{ikr} e^{-ik\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right) \right)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} = \frac{1}{r} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right) \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \frac{1}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \underbrace{e^{-ik\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'}}_{=1} dV'$$

Langwellennaeherung: $R \ll \lambda \ll |\mathbf{r}|$

$$kr' \sim \frac{r'}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow e^{-ik\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} \approx 1$$

Magnetostatik: $\int \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = 0$, weil $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

Hier: $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\dot{\rho} = i\omega \rho e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = \int (\mathbf{j} \cdot \nabla') \mathbf{r}' dV' \stackrel{p.I.}{=} - \int \mathbf{r}' (\nabla' \cdot \mathbf{j}) dV' = -i\omega e^{-i\omega t} \underbrace{\int \mathbf{r}' \rho dV'}_{\text{Dipolmoment } \mathbf{p}(\mathbf{r})}$$

$$\Rightarrow A(\mathbf{r}, t) = -ik \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r}$$

Skalares Potential: aus der Lorentz-Eichung

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = -\frac{ic}{\omega} \nabla \cdot \mathbf{A}$$

EM-Felder: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = ik \nabla \times B$$

Alle Operatoren wirken nur auf $\frac{e^{ikr}}{r}$ (räumlicher Faktor bzgl. \mathbf{A})! Somit:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{e^{ikr}}{r} &= \mathbf{e}_r \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \mathbf{e}_r \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \stackrel{\text{Fernfeld}}{\approx} \mathbf{e}_r ik \frac{e^{ikr}}{r} \\ &\Rightarrow \nabla \text{ kann ersetzt werden durch } ik \mathbf{e}_r \\ &\Rightarrow \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{ic}{\omega} (ik \mathbf{e}_r) (-ik) \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} = -ik \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \\ &\Rightarrow \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ &\Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{e}_r, \quad B \sim \frac{1}{r} \\ &\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -(\mathbf{e}_r \times B) \end{aligned}$$

\mathbf{E} und \mathbf{B} sind gleichphasig. \mathbf{E} und \mathbf{B} stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. \Rightarrow wie bei ebener Welle.

Also: Problem gelöst fuer Fernfeld und Langwelle.

Achtung: Im Nahfeld gibt es zwischen \mathbf{E} und \mathbf{B} Phasenverschiebung!

Energiebilanz: Transport von Energie und Impuls wird durch Poynting-Vektor beschrieben.

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \sim \mathbf{e}_r \frac{1}{r^2}$$

Transportierte Gesamtleistung:

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} \sim r^2 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r \frac{1}{r^2} \equiv \text{const}$$

\rightsquigarrow Energiefluss pro Zeit ist konstant \rightsquigarrow Energieerhaltung fuer Kugelwelle

Genaue Rechnung mit Winkeln \rightsquigarrow Abstrahlcharakteristik. Fuer \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} \left[\text{Re} \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right) \times \text{Re} \left(\mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= \frac{c}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \right) \times \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{B}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \right) \right] \\ &\Rightarrow \text{Terme der Art 1 und } e^{\pm 2i\omega t}. \text{ Interessant ist nur der zeitlich gemittelte } \mathbf{S}. \\ \langle \mathbf{S} \rangle_t &:= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \\ &\Rightarrow \langle \mathbf{S} \rangle_t = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{B}] = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) \\ &= \frac{c}{8\pi} \text{Re} \left[- \left(\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \right) \times \left((\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}^*) k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] \\ &= \frac{ck^4}{8\pi r^2} [((\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \times \mathbf{e}_r) \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}^*)] \end{aligned}$$

Energietransport in einem bestimmten Raumwinkel $d\Omega = d(\cos\theta)d\varphi$

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \mathbf{e}_r \mathbf{S} = \frac{ck^4}{8\pi} \mathbf{e}_r \cdot [\dots]$$

Spatprodukt: $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a})$

Kontraktion: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}|^2 = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\mathbf{p}|^2 \sin^2\theta}$$

\Rightarrow Dipol strahlt vor Allem senkrecht zu seiner Ausrichtung ab!

Integrierte Strahlungsleistung:

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\mathbf{p}|^2 \int_{-1}^1 (1 - \cos^2\theta) d(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{\omega^4}{3c^3} |\mathbf{p}|^2} \quad (\text{"Dipolformel"})$$

Beispiele:

- Abstrahlung auf Kreisbahn

Wichtige Anwendungen:

- Elementarteilchenphysik (LHC) \rightsquigarrow Abstrahlung unerwünscht
- Synchrotronstrahlung \rightsquigarrow Abstrahlung gewünscht
- Elektronen in der Atomhülle (klassisch)

Kreisbewegung:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(x - R\cos\omega t)\delta(y - R\sin\omega t)\delta(z)$$

$$\mathbf{p}(t) = \int \mathbf{r}\rho(\mathbf{r}, t) dV = qR(\mathbf{e}_x \cos\omega t + \mathbf{e}_y \sin\omega t) = \text{Re}(\mathbf{p}e^{-i\omega t})$$

$$\mathbf{p} = qR(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)$$

$$\xrightarrow{\text{Dipolformel}} P = \frac{\omega^4}{3c^3} |\mathbf{p}|^2 = \frac{2\omega^4 q^2 R^2}{3c^3} \quad (\text{"Gesamte abgestrahlte Leistung"})$$

$$P = \frac{2a^2 q^2}{3c^3} \quad (\text{"allg. Formel fuer beschl. Ladung"})$$

Beispiel: Atom

$$R = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0,53 \text{ \AA} \quad (\text{"Bohrscher Radius"})$$

$$v = \alpha c, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}, \quad (\text{"Feinstrukturkonstante"})$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{2\pi R} = 4 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

$$P = \frac{2}{3} \alpha^3 \omega \frac{e^2}{R}$$

$$\text{Lebenszeit: } \tau = \frac{E}{P} = \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha^3 \omega} = 10^{-10} \text{ s}$$

\rightsquigarrow QM erklart Stabilitaet von Atomen

- Lichtstreuung

Das einfallende Licht bringt die Elektronen in der Atomhuelle zum Schwingen \rightsquigarrow Abstrahlung in alle Richtungen \rightsquigarrow blaues Licht (hoeheres ω) wird staerker abgestrahlt als rotes Licht.

Genaue Rechnung: Lorentz-Modell \rightsquigarrow Elektron = gedaempfter, getriebener harmonischer Oszillator, der durch die Welle getrieben wird:

$$m_e \ddot{\mathbf{r}} + m_e \Gamma \dot{\mathbf{r}} + m_e \omega_0^2 \mathbf{r} = -e \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda} R \ll 1$$

kurze Zeiten: ungedaempfte Schwingung $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow (-\omega^2 - i\Gamma\omega + \omega_0^2) \mathbf{a} = \frac{-e}{m_e} \mathbf{E}_0$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}(t) = -e \mathbf{a} e^{-i\omega t} = \frac{\frac{e^2}{m_e} \mathbf{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} e^{-i\omega t} = \alpha_e \mathbf{E}$$

Polarisierbarkeit: $\alpha_e(\omega) = \frac{\frac{e^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta |\mathbf{E}_0|^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (\text{"Lorentzkurve"})$$

Im Teilchenbild: differentieller Streuquerschnitt fuer Photonen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{\#gestreute Teilchen pro Zeit pro } d\Omega}{\text{\#einfallende Teilchen pro Zeit}} = \frac{1}{\langle |S| \rangle_t} \frac{dP}{d\Omega}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega}$$

$$\sigma = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4} \quad (\text{"Rayleigh-Streuung"})$$

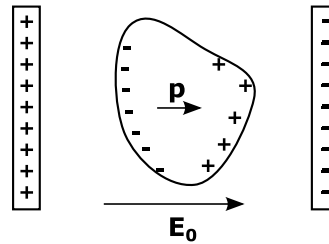
$$\rightsquigarrow \frac{\omega_{blau}}{\omega_{rot}} = 1,8 \Rightarrow \frac{\sigma_{blau}}{\sigma_{rot}} \approx 10$$

Im Streulicht ist 10 mal so viel blau wie rot.

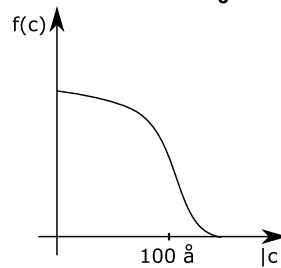
4 Elektrodynamik in Materie

4.1 Makroskopische Maxwellgleichungen

Polarisierung schwächt das
äußere Feld.



Idee: Mittelung ueber die
"mikroskopischen" elek-
trischen und magnetischen
Felder, $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ und $i(\mathbf{r}, t)$,
auf einer Skala von 100\AA .



makroskopisches Feld ($f(\mathbf{c})$ "Abstandsfunktion"):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \rangle = \int f(\mathbf{c}) \mathbf{e}(\mathbf{r} + \mathbf{c}, t) d^3c, \quad \int f(\mathbf{c}) d^3c = 1, \quad f(\mathbf{c}) = f(-\mathbf{c})$$

Maxwell-Gleichung: $\nabla \cdot \mathbf{e} = 4\pi\eta$

$$\Rightarrow \langle \nabla \cdot \mathbf{e} \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{e} \rangle = \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \langle \eta \rangle$$

$$\langle \eta(\mathbf{r}, t) \rangle = \int f(\mathbf{c}) \sum_n \sum_j q_{nj} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{nj}(t) + \mathbf{c}) d^3c$$

$$= \sum_n \sum_j q_{nj} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{nj}(t))$$

$$\stackrel{Taylor}{=} \sum_n \sum_j q_{nj} [f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) - \mathbf{d}_{nj}(t) \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) + \dots]$$

$$= \sum_n [q_n f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) - \mathbf{p}_n(t) \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))]$$

$$= \sum_n \left[\int f(\mathbf{c}) q_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t) + \mathbf{c}) d^3c - \nabla \cdot \int f(\mathbf{c}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t) + \mathbf{c}) \mathbf{p}_n(t) d^3c \right]$$

$$= \rho(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

Dabei war n Index Molekuel, j Index Ladung

$\mathbf{P} \hat{=} \text{Dipolmomentdichte oder Polarisation}$

Makroskopische Maxwell-Gleichung: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \langle \eta \rangle = 4\pi(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P})$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \underbrace{(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P})}_{=: \mathbf{D}} = 4\pi\rho}, \quad \mathbf{D} \hat{=} \text{"elektrische Verschiebung"}$$

Andere Maxwell-Gleichung fuer \mathbf{E} bleibt gleich: $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B} = 0$

Problem: Wegen der Einfuehrung von \mathbf{P} bzw. \mathbf{D} sind die Gleichungen nicht mehr geschlossen! Beziehung zwischen \mathbf{E} und \mathbf{P} ?

Loesung: Lorentz-Modell fuer Dipole:

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)}$$

$\mathbf{P} \sim \mathbf{E}$ "linear response", χ_e elektrische Suszeptibilitaet

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \mathbf{E} + 4\pi\chi_e\mathbf{E} = \underbrace{(1 + 4\pi\chi_e)}_{=: \varepsilon(\omega)} \mathbf{E}$$

$\varepsilon(0)$ dielektrische Konstante

typische Werte:

- Vakuum $\varepsilon = 1$
- Luft $\varepsilon = 1,00059$
- Glas $\varepsilon = 5,5$
- Wasser $\varepsilon = 80$ (permanente Dipole)
- Metall $\varepsilon = \infty$

Makroskopische Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho \rightarrow \text{Korrektur} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B} &= 0 \rightarrow \text{unveraendert} \end{aligned}$$

Aehnliche Rechnungen fuer anderen beiden Maxwell-Gleichungen, Ergebnis:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \partial_t \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + c\nabla \times \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} \hat{=} \text{"magnetische Dipoldichte"} \\ \Rightarrow \nabla \times \underbrace{(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M})}_{=: \mathbf{H}} - \frac{1}{c}\partial_t \underbrace{(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P})}_{=: \mathbf{D}}, \quad \mathbf{H} \hat{=} \text{"magnetische Erregung"} \end{aligned}$$

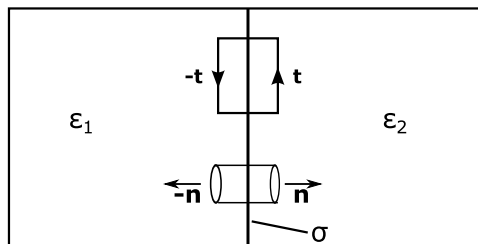
Linear response: $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu(\omega)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$

Fuer die meisten Materialien ist $\mu \approx 1$, $1 - \mu \approx \pm 10^{-3}$

$\mu(\omega)$ heisst Permeabilitaetsfunktion, $\mu(\omega, T) \rightsquigarrow$ statistische Physik
 \rightsquigarrow makroskopische Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{D} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \end{aligned}$$

\mathbf{E} und \mathbf{B} sind wirkliche Felder \rightsquigarrow wirken als Kraefte auf Testteilchen.
 Anwendung auf eine Grenzflaeche:



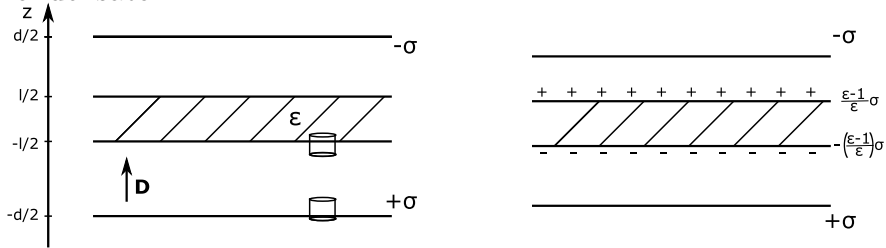
Anwendung der Integralsaetze: Gauss auf $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \Rightarrow \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = An(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)$

$\Rightarrow \Delta\mathbf{D}_\perp = 4\pi\sigma \rightsquigarrow \mathbf{D}$ springt wenn $\sigma \neq 0$ und $\Delta\mathbf{D}_\perp = 0$ kontinuierlich fuer $\sigma = 0$ aber nicht \mathbf{E} ! $\left(E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1}, E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2}\right)$

Stokes auf $\nabla \times \mathbf{E} = 0 (\partial_t\mathbf{B} = 0) \Rightarrow \Delta\mathbf{E}_\parallel = 0 \rightsquigarrow \mathbf{E}_\parallel$ stetig, aber nicht \mathbf{D}_\parallel !

Beispiele:

- Kondensator



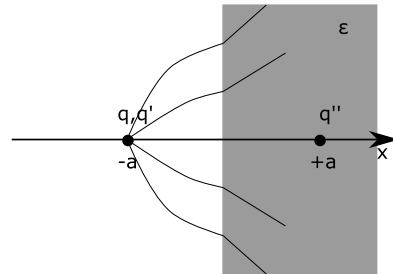
keine Ladung! $\mathbf{D} = 4\pi\sigma\mathbf{e}_z$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\sigma_{ind} \Rightarrow \sigma_{ind} = \pm \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$$

- Punktladung vor Grenzflaeche
Methode der Bildladungen q', q''
Maxwell-Gleichungen abschnittsweise:

$$x < 0 : \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi q \delta(\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x), \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$x > 0 : \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \text{ keine Ladungen}$$



Stetigkeit: \mathbf{E}_{\parallel} stetig, \mathbf{D}_{\perp} stetig

Ansatz:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} q \frac{\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x}{|\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x|^3} + q' \frac{\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x}{|\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x|^3} & x < 0 \\ q'' \frac{\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x}{|\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x|^3} & x > 0 \end{cases}$$

Stetigkeit fuer \mathbf{D}_{\perp} : $\mathbf{E}(x < 0) \cdot \mathbf{e}_x \Big|_{x=0} = \varepsilon \mathbf{E}(x > 0) \cdot \mathbf{e}_x \Big|_{x=0}$

$$\Rightarrow q \frac{a}{(y^2 + z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + q' \frac{-a}{(y^2 + z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \varepsilon q'' \frac{a}{(y^2 + z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{q - q' = \varepsilon q''}$$

Stetigkeit fuer \mathbf{E}_{\parallel} : $\boxed{q + q' = q''}$, insgesamt also:

$$\boxed{\begin{aligned} q' &= -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} q \\ q'' &= \frac{2}{\varepsilon + 1} q \end{aligned}}$$

Grenzfaelle:

- Vakuum $\varepsilon = 1 \rightsquigarrow q' = 0, q'' = q$
- Metall $\varepsilon = \infty \rightsquigarrow q' = -q, q'' = 0$

4.2 Elektromagnetische Wellen in Materie

Fourieransatz: $E(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t})$, $\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$ analog!

$$\begin{aligned} \xrightarrow{MG} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} + \frac{i\omega\mu\varepsilon}{c} \mathbf{E} = 0 \end{aligned}$$

Aus 2. und 4. Formel folgt mit der Identität $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = -\nabla^2 \mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a})$:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \times \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\Delta \mathbf{E} + \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})}_{=0} - \frac{i\omega}{c} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\Delta \mathbf{E} - \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{c^2} \mathbf{E} = 0 \\ \Rightarrow \left(\Delta + \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{c^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\Delta + \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

\rightsquigarrow Wellengleichungen wie im Vakuum.

Aber: Neue Dispersionsrelation

$$\boxed{\omega^2 = \frac{c^2 k^2}{\varepsilon \mu} := \frac{c^2 k^2}{n^2}}$$

\rightsquigarrow keine Dispersion, wenn $\omega \sim \pm k$ (also wenn ε, μ nicht von ω abhängigen)

\rightsquigarrow Typischerweise ist ε, μ von ω abhängig \Rightarrow Dispersion

$$\begin{aligned} \boxed{n(\omega) := \sqrt{\varepsilon(\omega) \mu(\omega)}} & \quad (\text{"komplexer Brechungsindex"}) \\ n(\omega) = n_r(\omega) + ik(\omega), & \quad (n_r: \text{"reeller Brechungsindex"}) \end{aligned}$$

Mit n ist auch \mathbf{k} komplex.

Einfache Annahme: $\mathbf{k} = n\mathbf{k}_0$

Raumlicher Fourier-Ansatz: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{in\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{MG} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 &= 0, \quad \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \\ \mathbf{k}_0 \times (n\mathbf{E}_0) &= k_0 \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{k}_0 \times \mathbf{B}_0 = -k_0 (n\mathbf{E}_0) \\ \Rightarrow \mathbf{k}_0 \perp \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{k}_0 \perp \mathbf{B}_0 &\rightsquigarrow \text{transversale Welle} \\ \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left(\mathbf{E}_0 e^{i(n_r \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) e^{-\kappa \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \end{aligned}$$

κ bewirkt Absorption von Energie im Medium \rightsquigarrow Wärme

Energiedichte: $w_{lm} \sim e^{-\alpha x}$

$$\boxed{\alpha \approx \frac{\omega}{c} \frac{\text{Im}(\varepsilon)}{\sqrt{\text{Re}(\varepsilon)}}} \quad (\text{"Absorptionskoeffizient"})$$

Die meisten Materialien haben $\mu \approx 1$, $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$.

Lorentz-Modell: $\mathbf{p} = \chi_e \mathbf{E}$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e = 1 + 4\pi n_0 \alpha_e = 1 + \frac{4\pi n_0 \frac{e^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}$$

Formel fuer induzierte Dipole, dann kommen noch Effekte von permanenten Dipolen

$$\omega_p^2 := 4\pi n_0 \frac{e^2}{m_e} \quad (\text{"Plasmafrequenz"})$$

$$\text{Re}(\varepsilon) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}$$

$$\text{Im}(\varepsilon) = \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}$$

4.3 Optik: Brechung und Reflexion

Hier: Geometrische Optik

Wellenansatz:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (\text{einfallend})$$

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r} - \omega' t)} \quad (\text{gebrochen})$$

$$\mathbf{E}''(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r} - \omega'' t)} \quad (\text{reflektiert})$$

Maxwell-Gleichungen (makroskopisch) schraenken $\mathbf{E}, \mathbf{E}', \mathbf{E}''$ stark ein, aufgrund der Stetigkeitsbedingungen:

\mathbf{D}_\perp und \mathbf{E}_\parallel muessen stetig sein!

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \xrightarrow{\text{Stokes}} \nabla \times \mathbf{E} \approx 0, \text{ da Grenzflaeche sehr scharf}$$

$$\Rightarrow \dot{I}_A \approx 0, \text{ da } A \text{ klein sein kann}$$

$$\mathbf{E} := \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}_\parallel + E_z \mathbf{e}_z$$

$$\Rightarrow \mathbf{e}_z \times \mathbf{E} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_\parallel$$

$$\Rightarrow \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r} - \omega'' t)} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r} - \omega' t)}$$

Am gleichen Ort: $\omega' = \omega'' = \omega$

$$\Rightarrow \frac{ck}{n} = \frac{ck'}{n'} = \frac{ck''}{n''}$$

$$\Rightarrow k = k', \quad \frac{k'}{k} = \frac{n'}{n}$$

$$\Rightarrow \text{reflektierte Welle} \rightsquigarrow \text{gleiches } \lambda, \text{ gebrochene Welle: } k' = k \frac{n'}{n}$$

Bei gleicher Zeit, aber verschiedenem Ort:

Einfallende Welle nur in $x - z$ -Ebene $\Rightarrow \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0} = k_x x = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} = k''_x x + k''_y y = k'_x x + k'_y y$$

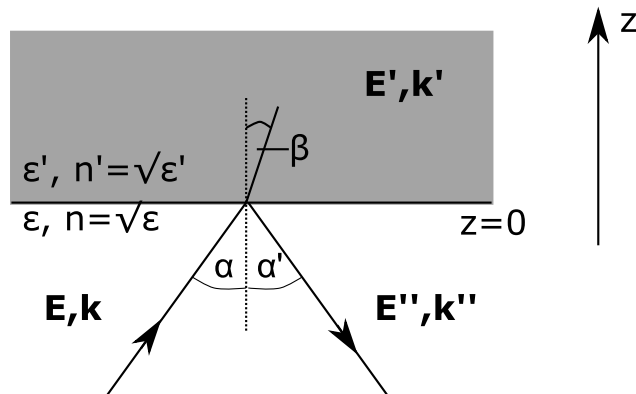
$$\Rightarrow \forall x, y : k''_y = k'_y = 0 \Rightarrow \text{Alle drei Wellen in derselben Ebene!}$$

- 1) $k_x = k \sin \alpha$
- 2) $k'_x = k' \sin \beta$
- 3) $k''_x = k'' \sin \alpha$

$$\Rightarrow k'_x = k_x, k = k'' \xrightarrow{1,3} \boxed{\alpha = \alpha''} \quad (\text{"Reflexionsgesetz"})$$

$$\Rightarrow k'_x = k_x, \frac{k'}{k} = \frac{n'}{n} \Rightarrow \boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n'}{n}} \quad (\text{"Snellius'sches Brechungsgesetz"})$$

Eintritt in optisch dichteres Medium: $n' > n \Rightarrow \beta < \alpha \Rightarrow$ Brechung zum Lot
 Amplituden E'_0, E''_0 koennen auch ausgerechnet werden \rightsquigarrow Fresnel'sche Formeln



5 Kovarianz und Lagrangeformalismus

Spezielle Relativitaetstheorie:

- Physikalische Gesetze muessen invariant unter Lorentztransformationen sein!
- Newton'sche Mechanik nur invariant unter Galilei-Transformationen \rightsquigarrow muss auf relativistische Theorie verallgemeinert werden
- Elektrodynamik kann umgeschrieben werden

Raum und Zeit werden zusammengefasst als *Vierervektor* im *Minkowski-Raum*.

$$\text{kontravariante Form } x^\alpha = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Zeitkomponente} \\ \text{Raumkomponente} \\ \text{Raumkomponente} \\ \text{Raumkomponente} \end{pmatrix}$$

Minkowski-Metrik:

$$|x|^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \rightsquigarrow \text{Konstant unter Lorentz-Transformation}$$

$$\text{kontrainvariante Form } x_\alpha = \eta_{\alpha\beta} x^\beta, \text{ wobei } \eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$|x|^2 = x_\alpha x^\alpha = \eta_{\alpha\beta} x^\beta x^\alpha = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Physikalische Skalare muessen Lorentzskalare sein!

$$\partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta = \square$$

Vierervektor fuer Quellen:

$$j^\alpha = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

$$\partial_\alpha j^\alpha \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{"Kontinuitaetsgleichung"})$$

Vierervektor fuer Felder:

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} \phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

2. Ableitung der Felder sind Quellen $\square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0, \text{ Lorentzgleichung} \Rightarrow \partial^\alpha \partial_\beta A^\beta = 0$$

$$F^{\alpha\beta} := \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

$$= \begin{pmatrix} D & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{"Feldstaerketensor"})$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi}{c} j^\alpha = \partial_\beta \partial^\beta A^\alpha - \underbrace{\partial^\alpha \partial_\beta A^\beta}_{=0} = \partial_\beta (\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta)$$

$$= \partial_\beta F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \quad (\text{"inhomogene Maxwellgleichungen"})$$

Homogene Maxwell-Gleichungen folgen aus:

$$\partial_\beta \tilde{F}^{\beta\alpha} = 0$$

mit dem dualen Feldstaerketensor:

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Wie die Mechanik kann auch die Elektrodynamik als Extremalprinzip formuliert werden:

$$\delta S = \delta \int dt \int dV, \quad L = 0 \quad (\text{"Hamiltonsches Prinzip fuer Wirkung S"})$$

$$L = -\frac{1}{16\pi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c} A^\alpha j_\alpha \quad (\text{"Lagrange-Funktion"})$$