$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

Definiere Körper $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit den Operationen

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + 2bb' \\ a'b + b'a \end{pmatrix}$$

Definiere $\varphi : K \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ durch

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto a + b\sqrt{2}$

- φ ist Körperhomomorphismus, das heißt
  φ ist Gruppenhomomorphismus
  $(K, +) \to (\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$
  und $(K \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}, \cdot)$
- φ ist bijektiv, da
  1) $\varphi^{-1}(\{0\}) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ nach Lemma daher bijektiv
  2) φ ist surjektiv per definition

Bemerkung: Besteht zwischen zwei Körpern ein Isomorphismus so verhalten sie sich bzgl. Addition und Multiplikation gleich, man sagt sie seien Isomorph

$$\begin{tikzcd} K \times K \arrow[r, "+"] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi"] & K \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi"] \\ \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \times \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[r, "+"] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \end{tikzcd}$$

$x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$

Definiere:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ a' + b' \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - a'b' \\ ab' + a'b \end{pmatrix}$$

Behauptung: $\mathbb{C}$ mit diesen Operationen ist ein Körper

Die Menge $L = \left\{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ und isomorph zu $\mathbb{R}$, denn

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab + 0 \\ a0 + b0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die neutralen Elemente in $\mathbb{C}$ sind

$0_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $1_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

die Inversen zu $\binom{a}{a'}$ sind

$$-\binom{a}{a'} = \binom{-a}{-a'} \quad \text{und} \quad \binom{a}{a'}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+a'^2} \\ \frac{-a'}{a^2+a'^2} \end{pmatrix}$$

$$-\binom{a}{0} = \binom{-a}{0} \quad \text{und} \quad \binom{a}{0}^{-1} = \binom{a^{-1}}{0} \quad \text{für } a \neq 0$$

Schließlich ist $\varphi : L \to \mathbb{R}$ mit $\binom{a}{0} \mapsto a$ ein Körper-Isom.

Also $L \cong \mathbb{R}$

Es gilt $\binom{0}{1} \cdot \binom{0}{1} = \binom{-1}{0}$

Alternative Notation

$\tilde{\mathbb{C}} = \{ a + i a' \mid a, a' \in \mathbb{R} \}$

Isomorphismus $\mathbb{C} \to \tilde{\mathbb{C}}$ mit $\binom{a}{a'} \mapsto a + ia'$

In $\tilde{\mathbb{C}}$ gilt damit $(a+ia') + (b+ib') = (a+b) + i(a+b)$

$$(a+ia') \cdot (b+ib') = (ab - a'b') + i(a'b + ab')$$

Insbesondere $i^2 = -1$

Beispiele: 1) Jeder Körper K ist auch K-VR

2) Ist $L \subset K$ Teilkörper von K so ist K ein L-VR

2a) $\mathbb{R}$ ist VR über $\mathbb{Q}$
2b) $\mathbb{C}$ ist VR über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$

Sei $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \mid \alpha_i \in K, i = 1, \dots, n \right\}$ die Menge der n-tupel mit

Einträgen aus K $(n \in \mathbb{N}\ n \neq 0)$

Komponentenweise Addition

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 + V_1 \\ \vdots \\ K_n + V_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt: $0_{K^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $-\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_1 \\ \vdots \\ -V_n \end{pmatrix}$

Komponentenweise skalare Multiplikation

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} \alpha V_1 \\ \vdots \\ \alpha V_n \end{matrix}$$

1.4. Vektorraum

<u>Definition 1.4.1:</u> Sei K Körper. Ein Vektorraum V über K oder K-Vektorraum ist eine abelsche Gruppe $(V,+)$ mit einer „äußeren" Verknüpfung $\cdot : K \times V \to V$ genannt „Skalare Multiplikation" mit den Distributivgesetzen

$(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha\cdot v + \beta\cdot v \quad \forall \alpha,\beta \in K \quad \forall v \in V$

$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \quad \forall \alpha \in K \quad \forall u,v \in V$

mit der Verträglichkeit der Multiplikation

$(\alpha\cdot\beta)\cdot v = \alpha\cdot(\beta\cdot v) \quad \forall \alpha,\beta \in K \quad \forall v \in V$

und dem Axiom $1\cdot v = v \quad \forall v \in V$

Elemente eines VR heißen auch Vektoren Notation hier durch kleine lateinische Buchstaben die Körperelemente heißen Skalare (klein, griechisch).

Das Element 0_V heißt Nullvektor.

Beispiel: Der Nullraum $V = \{0\}$ ist ein Vektorraum mit $\alpha\cdot 0 = 0$ und $0+0=0$

Lemma 1.4.1.a. Für einen K-VR gilt:

1) $\alpha\cdot 0_V = 0_V \quad \forall \alpha \in K$

2) $0_K \cdot v = 0_V \quad \forall v \in V$

3) $\alpha\cdot v = 0_V \Rightarrow \alpha = 0_K \lor v = 0_V$

4) $(-\alpha)\cdot v = \alpha\cdot(-v) = -(\alpha\cdot v) \quad \forall \dots$

Bew: 1) $0_V = \alpha\cdot 0_V - (\alpha\cdot 0_V) = \alpha\cdot(0_V + 0_V) - \alpha\cdot 0_V$
$= \alpha\cdot 0_V + (\alpha\cdot 0_V - \alpha\cdot 0_V)$
$= \alpha\cdot 0_V$

2) Analog

4) $(-\alpha)\cdot v + \alpha v = (-\alpha+\alpha)\cdot v = 0_K\cdot v = 0_V$
Vertausche α und v für $\alpha\cdot(-v) = -(\alpha\cdot v)$

3) Sei $\alpha\cdot v = 0_V$ und $\alpha \neq 0_K$
$v = (\alpha^{-1}\alpha)\cdot v = \alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot v) = \alpha^{-1}\cdot 0_V = 0_V$ $\square$