Strukturerhaltende Abbildungen oder Homomorphismen

Def: 1.2.3.a Seien $(G,\oplus)$ und $(H,\odot)$ Gruppen mit ihrer Verknüpfung. Ein Gruppenhomomorphismus ist eine Abb $\varphi \to H$, die mit der Gruppenoperation verträglich ist. Das heißt: für $a,b \in G$ gilt
$\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$

Bem: Homomorphismen werden oft durch das Diagramm dargestellt

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\oplus"] \arrow[d, "\varphi"] & G \arrow[d, "\varphi"] \\ H \times H \arrow[r, "\odot"] & H \end{tikzcd}$$

Die Homomorphismeneigenschaft bedeutet, dass wir entweder zuerst nach rechts und dann nach unten gehen können oder zuerst nach unten und dann nach rechts ohne das Ergebnis zu verändern. Mann sagt, das Diagramm kommutiere

Lemma 1.2.3.b Ist $\varphi:(G,\oplus) \to (H,\odot)$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gilt:

1. $\varphi(e_G) = e_H$ wobei e_G und e_H die neutralen Elemente sind
2. $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ wobei „$^{-1}$" das jeweilige Inverse ist und $a \in G$ beliebig

Bew: Für das neutrale Element gilt

$e_H \odot \varphi(e_G) = \varphi(e_G) = \varphi(e_G \oplus e_G) = \varphi(e_G) \odot \varphi(e_G)$

$\Rightarrow \varphi(e_G)$ ist das neutrale Element in H

Dann: $e_H = \varphi(e_G) = \varphi(a \oplus a^{-1}) = \varphi(a) \odot \varphi(a^{-1})$

Daraus folgt, dass $\varphi(a^{-1})$ das eind. bestimmte inverse Element zu $\varphi(a)$ ist.

Bsp: Die Exponentialfunktion ist ein Gruppenhomomorphismus
$(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$
$e^{a+b} = e^a \cdot e^b \qquad e^0 = 1 \quad e^{-a} = (e^a)^{-1}$

Bsp: (Gegenbeispiel)
Die Abb. $\varphi : (\mathbb{Z}_6, \oplus) \to S_3$
$n \mapsto \sigma_{n+1}$
wobei die Nummerierung in S_3 der Vorlesung der letzten Woche folgt. Die Abb. φ ist injektiv, damit auch surjektiv und es gilt $\varphi(0) = \sigma_1 = \mathrm{Id}$
Aber: $1 + 1 = 2$ in $\mathbb{Z}_6$
$\sigma_2 \circ \sigma_2 = \sigma_1 = \varphi(0)$ in S_3
Damit ist φ kein Gruppenhomomorphismus

<u>Zusatz zu Definition 1.2.3a:</u> Ist die Abb. φ als Mengenabb. injektiv, surjektiv oder bijektiv, so überträgt sich diese Eigenschaft auf den Gruppenhomomorphismus
Insbesondere heißt der bijektive Homomorphismus auch Isomorphismus

<u>Def 1.2.3.c</u> Der Kern eines Gruppenhomomorphismus ist das Urbild des neutralen Elements, also $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{e\})$

<u>Satz 1.2.3.d</u> Ist $\varphi : (G, \oplus) \to (H, \odot)$ ein Gruppenhomomorphismus so ist $\ker \varphi$ eine Untergruppe von G.

Bew: zunächst nach Lemma 1.2.3.b sind e_G und das Inverse zu $a \in \ker \varphi$ ebenfalls im Kern.
zu zeigen bleibt:
sind $a, b \in \ker \varphi$, dann ist auch $a \oplus b \in \ker \varphi$:
$\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \odot \varphi(b) = e_H \odot e_H = e_H$

<u>Satz 1.2.3.e</u> ein Gruppenhomomorphismus ist genau dann injektiv wenn $\ker \varphi = \{e_G\}$

Bew: Hausaufgabe

1.3. Körper (field)

Def 1.3.1. Ein Körper K ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen „$+$“ und „$\cdot$“ so dass

1) $(K,+)$ ist abelsche Gruppe mit Neutralelement „0“
2) $(K\setminus\{0\},\cdot)$ ist abelsche Gruppe mit neutralem Element „1“
3) Distributivgesetz
$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

Bspiele $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Rechenregeln in Körpern: „Punkt vor Strich“: $a\cdot b+c=(a\cdot b)+c$

Lemma 1.3.1.a: Für einen Körper K gilt:

1) Für $a\in K$ gilt: $0\cdot a=a\cdot 0=0$
2) Für $a\in K$ gilt: $(-1)a=-a$
3) Für $a,b\in K$ gilt: $(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$
4) Für $a,b\in K$ gilt: $a\cdot b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$

Bew: 1) $0=0\cdot a-0\cdot a=(0+0)a=0\cdot a=0a+0a-0a$

Wir schreiben $a-a=a+(-a)$

2) $a+(-1)a=1a+(-1)a=(1-1)a=0a=0$

$\Rightarrow$ Die Aussage mit der Eindeutigkeit des Inversen Elements

3) nicht bewiesen in VL

4) Annahme: $a\neq 0$, $b\neq 0$ und $ab=0$

$1=abb^{-1}a^{-1}=0\cdot b^{-1}a^{-1}=0$ ↯

Def 1.3.3. Eine Teilmenge L eines Körpers K heißt Teilkörper, wenn L selbst ein Körper mit der Verknüpfung in K ist.