1) Elemente von S_3

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =: id$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Gruppenoperation: Komposition von Abbildungen

2) Multiplikationstabelle

	$f \circ g$	1	2	3 (g)	4	5	6
	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	1	5	6	3	4
f	3	3	4	1	2	6	5
	4	4	3	6	5	1	2
	5	5	6	2	1	4	3
	6	6	5	4	3	2	1

Folgerungen:

i) Da in jedem Feld ein Element der Gruppe steht, ist „$\circ$" eine innere Verknüpfung

ii) Nachweis des Assoziativgesetzes

iii) Da die Einträge der ersten Zeile / Spalte gleich dem Zeilen- / Spaltenindex sind, ist Element (1) neutral

iv) Es gibt ein inverses Element f zu jedem Element g, sodass gilt $g \circ f = f \circ g = e = id$

$\Rightarrow$ S_3 ist Gruppe (aber nicht abelsch)

Def 1.2.1' (Alternative Gruppendefinition) Ersetze die Bedingungen für das neutrale und inverse Element durch

II') es gibt ein Element $e \in G$, sodass für beliebiges $a \in G$ gilt

$$e \odot a = a$$

(Links-)neutrales Element

III') Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $b \in G$, sodass

$$b \odot a = e$$

(Links-) inverses Element

Satz 1.2.1a: Die Definitionen 1.2.1 und 1.2.1' sind äquivalent

Beweis: 1.2.1 $\Rightarrow$ 1.2.1' ist offensichtlich

1.2.1' $\Rightarrow$ 1.2.1: Zeige: aus $b \odot a = e$ folgt $a \odot b = e$

Führe zusätzlich ein $c \in G$ ein, mit $c \odot b = e$

$$\begin{aligned} a \odot b &= (e \odot a) \odot b = ((c \odot b) \odot a) \odot b) \\ &= c \odot \underbrace{(b \odot a)}_{=e} \odot b \\ &= c \odot b \\ &= e \end{aligned}$$

Zeige: $e \odot a = a \Rightarrow a \odot e = a$

Sei $b \in G$ gewählt, sodass $b \odot a = e$

$$\Rightarrow a \odot e = a \odot (b \odot a) = (a \odot b) \odot a = e \odot a = a$$

Satz 1.2.1b: Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt. Ebenso gibt es zu jedem $a \in G$ nur ein inverses Element b.

Beweis: 1) Annahme: e, e' sind neutrale Elemente, dann gilt

$$e = e \odot e' = e'$$

2) Annahme: b, b' sind invers zu a, dann gilt

$$b' = e \odot b' = (b \odot a) \odot b' = b \odot (a \odot b') = b \odot e = b$$

Satz 1.2.1c (Kürzungsregeln) Für $a,b,c \in G$ gilt

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

$$ac = bc \Rightarrow a = b$$

Beweis: Multipliziere von links mit a^{-1}, dem inversen Element zu a

$$a \circ b = a \circ c \Rightarrow a^{-1} \circ a \circ b = a^{-1} \circ a \circ c$$

$$\Rightarrow e \circ b = e \circ c$$

$$\Rightarrow b = c$$

Beweis der zweiten Aussage analog

Satz 1.2.1d: Für $a,b \in G$ ~~gilt~~ und deren Inversen a^{-1}, b^{-1} gilt

1) $(a^{-1})^{-1} = a$

2) $(ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Beweis: 1) $e = a \circ a^{-1}$, da das Inverse zu a^{-1} eindeutig ist, folgt

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

2) $a^{-1}b^{-1}ba = a^{-1}a = e$, wieder aufgrund der Eindeutigkeit des Inversen folgt

$$a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$$

Bemerkung zur Notation: Man schreibt Gruppen gern additiv mit der Verknüpfung „+", dem neutralen Element „0" (Null) und dem Inversen „$-a$"

oder

Man schreibt die Gruppe multiplikativ mit der Verknüpfung „·" (mal), dem neutralen Element „1" (Eins) und dem Inversen „a^{-1}". Das Symbol „·" wird häufig weggelassen.

Def 1.2.3 Eine Teilmenge $H \subseteq G$ einer Gruppe G mit Verknüpfung „$\circ$" heißt Untergruppe von G, wenn H eine Gruppe mit derselben Verknüpfung ist. Das heißt

1) $f,g \in H \Rightarrow f \circ g \in H$ [2) Assoziativgesetz wird aus G vererbt]

3) $e \in H$, wobei e Neutrales aus G 4) $f \in H \Rightarrow f^{-1} \in H$

Beispiele: 1) $(\mathbb{Z},+)$ ist Untergruppe von $(\mathbb{Q},+)$, denn:

$a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+b \in \mathbb{Z}$; $0 \in \mathbb{Z}$; $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow -a \in \mathbb{Z}$

2) $(\mathbb{N}_0,+)$ ist keine Untergruppe von $(\mathbb{Z},+)$, da für $a \in \mathbb{N}_0$ gilt $-a \notin \mathbb{N}_0$

3) G ist Untergruppe von G

$\{e\}$ ist Untergruppe von G

4) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ ist Untergruppe von S_3