28. OKT. 2014

Satz 1.1.1 ~~e~~

Ist $f: A \to B$ eine bijektive Abbildung, so gibt es genau eine Abbildung $g: B \to A$, so daß $g \circ f = id_A$, $f \circ g = id_B$.
Diese Abbildung nennt man die Umkehrabbildung oder inverse Abbildung und bezeichnet sie mit f^{-1}.
Achtung! Bezug zur Urbildmenge.

Beweis: 1) f ist surjektiv, daher ist die Urbildmenge $f^{-1}(y)$ für alle $y \in B$ nicht leer.

2) f ist injektiv, daher ist in $f^{-1}(y)$ genau ein Element

3) Zu jedem $y \in B$ gibt es genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Wir definieren $g(y) = x$.

Dann gilt $f(g(y)) = f(x) = y. \Rightarrow f \circ g = id_B$.

$$g(f(x)) = g(y) = x \Rightarrow g \circ f = id_A.$$

4) Eindeutigkeit: Angenommen, es gebe eine zweite Funktion h mit $h \circ f = id_A$, $f \circ h = id_B$.

Dann gilt $h \circ (f \circ g) = h$.

$$\shortparallel$$

$$(h \circ f) \circ g = g.$$

$\Leftrightarrow h(y) = h(f(g(y)))$

aber $h(f(x)) = x \quad \forall x \in A$.

daher $h(y) = g(y)$. $\square$

~~1.2 Gruppen~~

<u>Lemma 1.1.1f</u> Wenn es zu $f: A \to B$ eine Abbildung

$g: B \to A$ gibt, so daß $f \circ g = id$
$g \circ f = id$,

dann ist f ~~bi~~ bijektiv.

<u>Beweis</u>: Nach der Hausaufgabe gilt:

$f \circ g$ surj. $\Rightarrow f$ surj.

$f \circ g$ inj. $\Rightarrow g$ inj.

$g \circ f$ inj. $\Rightarrow f$ inj, $f \circ g$ surj. $\Rightarrow f$ surj. $\Rightarrow f$ bij.

1.2 Gruppen

<u>Def. 1.2.0 a</u>: Eine innere Verknüpfung der Menge M ist eine Abbildung

$$\odot : M \times M \to M.$$
$$(a,b) \mapsto a \odot b.$$

<u>Beispiel</u>: Sei $M = \mathbb{N}$ mit der Verknüpfung „+".

$m + n = k$ und ~~m~~ $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \mathbb{N}$.

2) $M = \mathbb{N}$ und „·"

<u>Definition 1.2.1</u>: Eine Menge G mit einer inneren Verknüpfung „$\odot$" heißt Gruppe, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. „$\odot$" ist assoziativ, das heißt:
$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$
2. Es existiert ein neutrales Element e mit
$a \odot e = e \odot a = a$. $\forall a \in G$.
für alle

3. Zu jedem $a \in G$ existiert ein $b \in G$ mit $b \circ a = a \circ b = e$.

das inverse Element.

[4.] Eine Gruppe heißt kommutativ oder abelsch (Abelian), wenn gilt: $a \circ b = b \circ a$ für $a, b \in G$.

Kurzschreibweise: $(G, \circ)$

Beispiele: I) $(\mathbb{Z}, +)$

0) $a + b = c \quad a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow c \in \mathbb{Z}$

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ✓

2) Neutrales El.: $0 + a = a + 0 = a$.

3) inverses El.: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ ist Gruppe

4) $a + b = b + a \Rightarrow \mathbb{Z}$ ist abelsche Gruppe

II) $(\mathbb{N}_0, +)$

$+$ ist innere Verknüpfung

1) Assoziativgesetz ✓

2) Neutrales Element: $0 + a = a + 0 = a$

3) Inverses Element: existiert nicht

$\Rightarrow$ $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe.

~~$(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$~~ $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

Verknüpfung: $c = a \cdot b$, $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

1) $a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

2) Neutrales Element: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$. für $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

3) Inverses Element: a^{-1} oder $\frac{1}{a}$:

$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ für $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

4) $a \cdot b = b \cdot a$

$\Rightarrow (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsch.

Symmetriegruppen:

Sei $M = \{1, \ldots, n\}$, dann ist die Symmetriegruppe von M die Menge aller Permutationen der Zahlen von 1 bis n, also aller aller bijektiven Abbildungen von M in sich selbst mit der Verknüpfung aller Abbildungen. Sie wird mit S_n bezeichnet.

S_2 : alle Permutationen der Zahlen $\{1, 2\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = id, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \}.$$

$$S_3 := \left\{ \underset{1}{id}, \underset{2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}, \underset{4}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{5}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{6}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

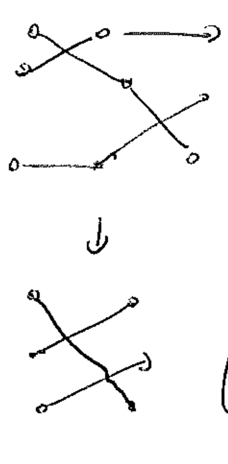
$\{1, 2, 3\}$

3× ~~erstes E~~ erstes Element,
2× zweites Element,
1× drittes El.

=> 6 Permutationen

Multiplikationstabelle:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	5	6	3	4
3	3	4	1	2	6	5
4	4	3	6	5	1	2
5	5	6	2	1	4	3
6	6	5	4	3	2	1



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$