LA Prof. Rustam

VL Donnerstag 23.10.14

Definition 1.1.1.

Eine Abbildung $f: X \to Y$ von einer Menge X in eine Menge Y ist eine Teilmenge des kart. Produkts (der beiden Mengen) $X \times Y$, so dass für Paare (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gilt,

? dann folgt aus $x_1 = x_2$ dass $y_1 = y_2$.

Das heißt, jedem $x \in X$ ist eindeutig ein $y \in Y$ zugeordnet.

Wir schreiben: $y = f(x)$

$$x \longmapsto y$$

Beispiele

1) Die identische Abbildung

$$Id_X : X \to X$$
$$x \longmapsto x$$

2) Funktionen wie e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, x^2, $15x - 13$

Gleichheit von Abbildungen

$$f, g : X \to Y$$

$$f = g \iff f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$$

Die Menge X heißt Definitionsbereich von f und Y die Bildmenge von f.

Für eine Teilmenge $M \subset X$ heißt
$$f(M) = \{ y \in Y \mid \text{es gibt ein } x \in M \text{ mit } f(x) = y \}$$
das Bild von M unter der Abb. f.

—

Zu einer Teilmenge $N \subset Y$ ist das Urbild von N unter f die Menge
$$f^{-1}(N) = \{ x \in X \mid f(x) \in N \}$$

—

Für ein Element $y \in Y$ schreiben wir $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$

—

Frage an Kurs: Wie viele Elemente $x \in X$ hat $f(x)$ => 1 per Definition
für $f^{-1}(y)$ stimmt das nicht unbedingt!

—

Definition 1.1.1a

A. Eine Abbildung heißt ~~injektiv~~ injektiv (one-to-one) wenn aus:
$f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$
oder äquivalent:
wenn das Urbild zu jedem $y \in Y$ höchstens ein Elt. enthält.

B. Eine Abbildung f heißt surjektiv (onto) wenn es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt, so dass $f(x) = y$ oder äquivalent, dass das Bild von X unter f die Menge Y ist.

C. Eine Abbildung heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Lemma 1.1.1b

Das Bild einer Menge mit n Elt unter der Abb. f hat höchstens n Elt.
Ist f injektiv, dann hat es genau n Elt.

Bew:

$M_n = \{x_1, \dots, x_n\} = \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \cup \{x_n\}$

Vollständige Induktion:

1. Verankerung: die Aussage gilt für $n = 1$
2. Vererbung: wenn Aussage für $n-1$ gilt, dann folgt sie für n.

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow \dots \Rightarrow n$

---

1. $n = 1$ $M_1 = \{x_1\}$

$f(M_1) = \{f(x_1)\}$

Einschub { Kardinalität von M_n ist $\# M_n = n$ (Anzahl der Elemente in M_n)

$\Rightarrow \# f(M_1) = 1$

Vererbung:

die Aussage sei bewiesen für

$\# M = n - 1$

$M_n = \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \cup \{x_n\}$

und $x_n \notin \{x_1, \dots, x_{n-1}\} =: M_{n-1}$

$\Rightarrow \# M_n = n$

$$f(M_n) = f(M_{n-1}) \cup f(\{x_n\})$$

$$\Rightarrow \quad \# f(M_n) \leq \# f(M_{n-1}) + 1$$

$$\leq n-1+1 = n$$

Vererbung

Herr Kanschat erklärt Fall f injektiv mündlich. Kommentar am Rand:

f injektiv $\Rightarrow \nexists x \in M_{n-1} : f(x) = f(x_n) \Rightarrow f(x_n) \notin f(M_{n-1})$

$$\# f(M_n) = \# f(M_{n-1}) + 1 = n-1+1 = n$$

Satz 1.1.1.c

Sei $f : M \to N$ wobei $\# M = m$ und $\# N = n$. Dann gilt.

A) $m > n$ dann kann f nicht injektiv sein

B) $m < n$ dann ist f nicht surjektiv

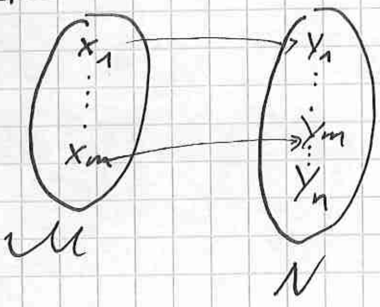
C) $m = n$ dann ist f injektiv genau dann wenn f surjektiv ist.

Beweis

A) Folgt unmittelbar aus Lemma 1.1.1.b, da, wenn f injektiv wäre $\# f(M) = m$ was im Widerspruch zu $m > n$ steht

B) $N = \{y_1, \dots, y_n\}$

Graphik



$\Rightarrow y_{m+1}, \dots, y_n$ sind nicht im Bild f.

$\Rightarrow f$ nicht surjektiv

Anmerkung von ~~mir~~: Wieso nicht einen Beweis mit dem Lemma liefern:

$\# f(M) \leq m < n$

$\Rightarrow f(M) \neq N$

C) "$\Rightarrow$" inj. $\Rightarrow$ surj.

Lemma 1.1.1.5 $\# f(M) = n$

Da $\# N = n$ wegen alle in $f(M)$

"$\Leftarrow$" $\neg$inj. $\Rightarrow$ $\neg$surj.

$\# f(M) < n \Rightarrow \neg$surj.

Beispiel (unendliche Mengen)

$f: \mathbb{N}_0 \Rightarrow \mathbb{Z}$

$0 \longmapsto 0$
$1 \longmapsto -1$
$2 \longmapsto 1$
$3 \longmapsto -2$
$4 \longmapsto 2$
$\vdots$

Jedes Elt. in $\mathbb{Z}$ ~~kommt~~ steht ~~nur~~ einmal rechts $\Rightarrow$ f injektiv
$\Rightarrow$ f surjektiv

Die Kardinalität einer Menge ist nicht endlich, wenn es eine injektive Abbildung auf eine echte Teilmenge gibt.

(Anmerkung: Wieso betrachten wir kein Gegenbeispiel wie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $f(n) = n$)

Definition 1.1.1d

Seien $f: X \to Y$ $g: Y \to Z$
dann heißt die Abbildung
$h: X \to Z$
$h(x) = g(f(x))$
die Komposition von f und g
$g \circ f(x) = h(x)$
gesprochen "g nach f"

Satz 1.1.1e

Ist $f: X \to Y$ bijektiv
dann gibt es genau eine Abb
$g: Y \to X$ mit $f \circ g = Id_Y$
$g \circ f = Id_X$

Wir ~~nennen~~ schreibe $f^{-1} = g$
und ~~g~~ nennen dies die Umkehr-
abbildung