21.10.14

Lineare Algebra

Lemma 0.6: Transitivität der Äquivalenz und Implikation

Für beliebige Aussagen A, B, C gilt:

$(A \Leftrightarrow B \wedge B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
$(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Beweis: Wahrheitstabellen

Achtung: $(A \Rightarrow B \wedge C \Rightarrow B) \not\Rightarrow$

Lemma 0.7: Die Äquivalenz ist symmetrisch, d.h.

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$$

Beweis: Wahrheitstabellen

Wichtig: Implikation ist nicht symmetrisch.

Lemma 0.8: Kontraposition

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Beweis: Übungsaufgaben

Sprechweise: A ist "hinreichende" Bedingung für B und B ist "notwendige" Bedingung für A.

Lemma 0.9: Zwischen Äquivalenz und Implikation gilt die Beziehung:

$$(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

Mengenlehre

Intuitive Definition: Man kann genau sagen, was in einer Menge enthalten ist und was nicht. Was enthalten ist, nennt man Element.

Sei X die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.
$X \notin X \Rightarrow X \in X. \Rightarrow X \notin X$ Paradoxon.
Russellsche Antinomie

Beispiele: 1) $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
2) Endliche Zahlenmengen: $\{1, \dots, n\}$
3) Endliche Mengen: $\{x_1, \dots, x_n\}$

Teilmenge: $A \subset B$, wenn alle Elemente von A auch in B enthalten sind.

$\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Eine Teilmenge heißt "echt", wenn die Obermenge Elemente enthält, die nicht in der Teilmenge enthalten sind.
Es gilt aber immer $A \subset A$.

Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn $A \subset B \wedge B \subset A$. Man schreibt $A = B$.

$A \subset B \iff \{x \in B \mid x \in A\}$, ~~wenn zusätzlich gilt $A, B \subset X$ $\{x \in X$~~

Schnittmenge: $A \cap B$, Menge aller Elemente die in A und B enthalten sind. $\{x \in A \mid x \in B\}$ oder $\{x \in B \mid x \in A\}$

Beispiel: A = Menge der Primzahlen
B = Menge der geraden Zahlen

$A \cap B = \{2\}$

Die Schnittmenge $A \cap B$ kann äquivalent durch die Ausdrücke $\{x \in A \mid x \in B\}$ oder $\{x \in B \mid x \in A\}$ beschrieben werden.
Wenn es eine Menge X gibt, sodass $A, B \subset X$, dann gilt auch
$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Vereinigung: $A \cup B$, Menge aller Elemente, die ~~in A oder B~~ zumindest in einer der beiden Mengen A oder B enthalten sind.
Falls $A, B \subset X$: $A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$

Subtraktion von Mengen: $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$
$A - B$

die leere Menge: $\emptyset = \{\ \}$, $\emptyset \subset A$ für beliebige Mengen A.

Potenzmenge: $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge der Teilmengen von A

Bsp: $A = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

Bemerkung: $\{1,2\}$ und $\{2,1\}$ bezeichnen dieselbe Menge

Das kartesische Produkt: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, x \in B\}$

Bsp: $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\} \Rightarrow A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2)\}$

Das kartesische Produkt kann auch mehrere Faktoren haben:
$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$

Definition 1.1.1: Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ von einer Menge X in eine Menge Y ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $X \times Y$, mit der Eigenschaft, dass für Elemente (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gilt
$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.