Satz 1.65 Dimensionsformel

Seien $U, V \subset W$ UVR, dann gilt

$$\dim U + \dim V = \dim(U+V) + \dim(U \cap V)$$

Bew.: Sei $S = U \cap V$, dann existieren

$U^c \subset U$ und $V^c \subset V$ UVR mit $U = U^c \oplus S$,

$V = V^c \oplus S$

Sei $s_1, \dots, s_k$ Basis von S ($\dim S = k$

Sei $s_1, \dots, s_k, u_{k+1}, \dots, u_m$ Basis von U ($\dim U = m$)

Sei $s_1, \dots, s_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ Basis von V ($\dim V = n$)

$U + V = S \oplus U^c \oplus V^c$ | $u_{k+1}, \dots, u_m$ ist Basis für U^c

ebenso V^c

Basis $\underbrace{s_1, \dots, s_k, u_{k+1}, \dots, u_m}_{m}, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}_{n-k}$

$\Rightarrow \dim U+V = m+n-k$

Korollar 1.66 Für UVR $U, V \subset W$

ist äquivalent

1) $U + V = U \oplus V$ ($\Leftrightarrow U \cap V = \{0\}$)

2) $\dim U + \dim V = \dim(U+V)$

2. Lineare Abbildungen $\Leftrightarrow$ Vektorraumhomomorphismen

Def 2.1.1: Seien V, W VR über K.

Eine Abb. $f: V \to W$ heißt Lineare Abbildung

oder VR-homomorphismus, wenn

1) $f(u) + f(v) = f(u+v) \quad \forall u, v \in V$

2) $\lambda f(u) = f(\lambda u) \quad \forall \lambda \in K, u \in V$

Ein bijektiver VR-Hom. heißt VR-Isomorphismus

Beispiel: Basiswahl $v_1, \dots, v_n$ Basis von V. Dann ist

$$f: K^n \to V$$
$$a = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

ein VR-Hom

Die Aussage „$\forall v \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$" impliziert, dass f ein Isomorphismus ist.

Korollar 2.1.9: Ist V ein K-VR mit $\dim V = n$, so gilt $V \cong K^n$

Warnung: Die Wahl der Basis in V ist beliebig, daher ist der Isomorphismus f nicht natürlich gegeben, sondern gewählt.

Lemma 2.1.2 Ist $f: V \to W$ ein VR-Iso., so ist $f^{-1}: W \to V$ ebenso VR-Iso.

Bew.: zz: f^{-1} ist lin. Abb.

Seien $w_1, w_2 \in W$

$v_1 = f^{-1}(w_1), v_2 = f^{-1}(w_2)$

$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$

$\Rightarrow f^{-1}(w_1 + w_2) = v_1 + v_2 \cancel{= f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)} = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$

Sei $\alpha \in K$

$\alpha f^{-1}(w_1) = \alpha_1 v_1 = \alpha f(v_1) = f(\alpha v_1) = \alpha w_1$

$\alpha \neq 0 \quad w_1 = \frac{1}{\alpha} f(\alpha v_1) \Leftrightarrow w_1 = f(v_1)$

Lemma 2.1.3 Sei $f: V \to W$ ein VR-Hom.

Dann gilt, dass

$\ker f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$ und

$\operatorname{Im} f = \{ w \in W \mid \exists v \in V: f(v) = w \}$

UVR von V bzw. W sind.

Bew.: 1) war HA bzgl. „+"

$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \cdot 0 = 0$

2) $w_1, w_2 \in \operatorname{im} f$ und $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2)$

Bem.: v_1, v_2 können nach Def. $\operatorname{Im} f$ gewählt werden

Dann gilt: $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$

Für $\alpha \in K$: $\alpha w_1 = \alpha f(v_1) = f(\alpha v_1) \in \operatorname{Im} f$

Lemma 2.1.4: f ist injektiv genau dann, wenn $\ker f = \{0\}$

Lemma 2.1.5 Sei $f: V \to W$ VR-Hom.

1) Für Teilmengen $A \subset V$ gilt $f(\langle A \rangle) = \langle f(A) \rangle$

2) Seien die Vektoren $v_1, v_2 \in V$ lin. abh. Dann sind auch $f(v_1), \dots, f(v_n) \in W$ lin. abh.

3) Seien $f(v_1), \dots, f(v_n) \in W$ lin. unabh., dann sind es auch $v_1, \dots, v_n \in V$. Wenn f inj. gilt die Umkehrung.

Korollar 2.1.6: Für $f: V \to W$ VR-Hom. gilt $\dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim V$

Satz 2.1.7 Sei $v_1, \dots, v_n \in V$ ein ES, und $w_1, \dots, w_n$ eine beliebige Menge in W. Dann gilt für VR-Hom

$f: V \to W$

1) Es gibt höchstens ein f mit $f(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$

2) Sind $v_1, \dots, v_n$ Basis, so ex. genau ein f.

Bew.: Sei $v \in V$ beliebig.

$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Dann gilt

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

Damit folgt, dass $f(v)$ bereits durch ~~f(vi)~~ ~~bzw~~ $f(v_i) = w_i$ eindeutig bestimmt ist.

2) Definiere $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i)$

Da $v_1, \dots, v_n$ Basis, sind die α_i eindeutig durch v bestimmt und damit f wohldefiniert

Bleibt zu zeigen, dass dieses f linear ist

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i \quad , f(\alpha v)= f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha\alpha_i v_i\right)= \sum_{i=1}^{n}\alpha\alpha_i f(v_i)$$
$$=\alpha f(v)$$

$$w=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$$

$$f(v+w)=f\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)v_i\right)\overset{?}{=} f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)+f\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i\right)=f(v)+f(w)$$

Seien V, W VR mit Basen $v_1,\dots,v_n$ und $w_1,\dots,w_m$

Definiere für $i=1,\dots,n$

$$f(v_i)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}w_j$$

Nach Satz 2.1.7. ist damit f als lin. Abb. eindeutig beschrieben.

Gesucht: Darstellung von f, die aus den Koeff β_i der Lin-Komb $v=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$ die Koeff. γ_j in der Kombination

$$f(v)=\sum_{j=1}^{m}\gamma_j w_j \text{ bestimmt.}$$

Diese Darstellung wird durch das Feld

$(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ erreicht.

Man nennt diese Felder Matrizen. Sie haben die Form

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$