Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP-4)

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick
Sommersemester 2017

Übungsblatt 5

Besprechung in den Übungsgruppen am 22./23./24. Mai 2017
Bitte geben Sie maximal 2 Aufgaben zur Korrektur in den Übungsgruppen ab!

1. *NH_3-Molekül*

Betrachten Sie im Folgenden ein NH_3-Molekül. Bei einer Messung kann sich das N-Atom oberhalb oder unterhalb der von den drei H-Atomen aufgespannten Ebene befinden. Die Messgröße „Position des N-Atoms" wird durch den Operator $\hat{\Sigma}$ dargestellt, der auf dem Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ operiert. Dabei werde eine Basis so gewählt, dass die Darstellung von $\hat{\Sigma}$ durch die dritte Pauli-Matrix gegeben ist,

$$\Sigma \equiv \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Messgröße kann die Werte 1 (N-Atom oben) oder -1 (N-Atom unten) annehmen. Die Darstellungsmatrix des Hamilton-Operators $\hat{H}$ hat mit $E, W \in \mathbb{R}$ die Form

$$H = \begin{pmatrix} E & W \\ W & E \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände $|\psi_\mathrm{o}\rangle$ (N-Atom oben) und $|\psi_\mathrm{u}\rangle$ (N-Atom unten) von σ_3.

b) Bestimmen Sie die normierten Energieeigenzustände $|\psi_+\rangle$ und $|\psi_-\rangle$ in der Basis $\{|\psi_\mathrm{o}\rangle, |\psi_\mathrm{u}\rangle\}$ und die dazu gehörigen Energien.

c) Sei das NH_3-Molekül zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi_\mathrm{o}\rangle$. Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Zustands $|\psi(t)\rangle$ des Systems und den Erwartungswert von $\hat{H}$ für beliebiges t mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t)$.*

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, das N-Atom bei einer Messung zum Zeitpunkt t oben bzw. unten zu finden. Geben Sie die Zeitentwicklung des Erwartungswertes von $\hat{\Sigma}$ an.

2. *Spins im Magnetfeld*

Ein Elektronenstrahl werde zum Zeitpunkt $t = 0$ in ein Magnetfeld gebracht. Das Magnetfeld sei homogen mit Stärke $B \equiv |\vec{B}|$ und weise in die z-Richtung. Die Matrixdarstellung des Hamilton-Operators ist

$$H = \mu_\mathrm{B} B \sigma_3,$$

wobei $\mu_\mathrm{B} = \hbar e/(2m_\mathrm{e}c)$ das sog. *Bohr'sche Magneton* bezeichnet und σ_3 die dritte Pauli-Matrix ist. Die Elektronenspins seien zunächst zum Zeitpunkt $t = 0$ in positive x-Richtung polarisiert, d.h. alle Elektronen sind im Eigenzustand zu $\hat{S}_1$ mit Eigenwert $\hbar/2$. Stellen Sie in den folgenden Rechnungen den Spin in der gebräuchlichen z-Basis dar,

$$|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad |\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

**Hinweis:* Wählen Sie eine Basis für $|\psi_\mathrm{o}\rangle$ so, dass Sie ausnutzen können, dass $\mathrm{e}^{\mathsf{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} \end{pmatrix}$, wenn $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

wobei $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ bedeuten, dass der Spin in jeweils positive oder negative z-Richtung zeigt, sodass die Ihnen bereits vertrauten Spinoperatoren $\hat{S}_i$ durch die Pauli-Matrizen σ_i ausgedrückt werden können.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Spins in x-Richtung $\langle \hat{S}_x \rangle$ zur Zeit t mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t)$.

Nun sei die Hälfte des Elektronenspins zum Zeitpunkt $t = 0$ in positive x-Richtung polarisiert und die andere Hälfte in positive y-Richtung.[†] Der Ausgangszustand ist demnach ein Gemisch.

b) Geben Sie den Dichteoperator $\hat{\rho}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

c) Berechnen Sie $\hat{\rho}$ zu beliebiger Zeit t.

d) Berechnen Sie nun $\langle \hat{S}_x \rangle$ zur Zeit t für das Gemisch.

3. *Der harmonische Oszillator im Heisenberg-Bild*

Im Heisenberg-Bild steckt die gesamte Zeitabhängigkeit in den Operatoren, und die Dynamik wird durch die Heisenberg-Gleichung beschrieben. Betrachten Sie im Folgenden den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}_{\mathrm{H}}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_{\mathrm{H}}^2.$$

a) Lösen Sie die Heisenberg-Gleichungen für die Operatoren $\hat{x}_{\mathrm{H}}(t)$ und $\hat{p}_{\mathrm{H}}(t)$ der Orts- und Impulsvariablen des harmonischen Oszillators, und drücken Sie $\hat{p}_{\mathrm{H}}(t)$ und $\hat{x}_{\mathrm{H}}(t)$ als Funktion der Operatoren $\hat{p}_{\mathrm{S}} \equiv \hat{p}_{\mathrm{H}}(t = 0)$ und $\hat{x}_{\mathrm{S}} \equiv \hat{x}_{\mathrm{H}}(t = 0)$ im Schrödinger-Bild aus.[‡]

b) Berechnen Sie mit den Ergebnissen aus a) die folgenden Vertauschungsrelationen zu verschiedenen Zeiten t_1 und t_2,

$$\left[\hat{p}_{\mathrm{H}}(t_2), \hat{p}_{\mathrm{H}}(t_1)\right], \qquad \left[\hat{p}_{\mathrm{H}}(t_2), \hat{x}_{\mathrm{H}}(t_1)\right], \qquad \left[\hat{x}_{\mathrm{H}}(t_2), \hat{x}_{\mathrm{H}}(t_1)\right].$$

[†] *Hinweis:* Der relevante Spinoperator für die y-Richtung ist $\hat{S}_2$.

[‡] *Hinweis:* Nutzen Sie aus, dass der Kommutator zwischen Orts- und Impulsoperator durch $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$ gegeben ist.