Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP-4)

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick
Sommersemester 2017

Übungsblatt 4

Besprechung in den Übungsgruppen am 15./16./17. Mai 2017
Bitte geben Sie maximal 2 Aufgaben zur Korrektur in den Übungsgruppen ab!

1. *Kollaps der Wellenfunktion*

Betrachten Sie drei hintereinander geschaltete Messapparaturen, die alle drei den Spin von Teilchen messen. Die erste Apparatur misst den Spin in Richtung der z-Achse, die zweite Apparatur misst ihn in Richtung der x-Achse, die dritte wieder in Richtung der z-Achse. Nach dem Durchgang durch die erste Apparatur befinden sie die Teilchen in einem der beiden Zustände

$$|\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad |\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie im Folgenden die Teilchen, die sich im Zustand $|\varphi_1\rangle$ befinden und dann anschließend durch die zweite Apparatur gehen. Nach dem Durchgang befinden Sie sich im Zustand $|\psi_1\rangle$ oder $|\psi_2\rangle$, welche Eigenzustände des Spinoperators $\hat{S}_1$ sind.*

a) Drücken Sie die Zustände $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ in der Basis $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$ aus.
b) Wieviel Prozent der Teilchen, die die erste Apparatur im Zustand $|\varphi_1\rangle$ verlassen haben, befinden sich nach der zweiten Apparatur im Zustand $|\psi_1\rangle$ und wieviel im Zustand $|\psi_2\rangle$?
c) Betrachten Sie zum Schluss die Teilchen, die die zweite Apparatur im Zustand $|\psi_1\rangle$ verlassen haben. Wieviel Prozent dieser Teilchen befinden sich nach der dritten Apparatur nun im Zustand $|\varphi_2\rangle$, obwohl sie sich nach dem Durchgang der ersten Apparatur im Zustand $|\varphi_1\rangle$ befanden?

2. *Neutrinooszillationen*

Neutrinos sind Elementarteilchen und gehören zu den Leptonen. Sie existieren in drei unterschiedlichen sog. Flavourzuständen: als Elektron-Neutrinos ν_e, Myon-Neutrinos ν_μ und Tau-Neutrinos ν_τ. Sie besitzen die Eigenschaft, dass sie nur über die schwache Kraft und die Gravitation wechselwirken und wurden ursprünglich im Standardmodell der Teilchenphysik als masselos angenommen. Im Jahr 1998 wurden jedoch am Super-Kamiokande-Experiment Neutrinooszillationen entdeckt, welche notwendigerweise nicht verschwindende Neutrinomassen voraussetzen. Durch Neutrinooszillationen können sich Neutrinos eines bestimmten Flavourzustandes in solche eines anderen Flavourzustandes umwandeln. Weiterhin weiß man aber aus anderen Experimenten, wie z.B. aus kosmologischen Beobachtungen, dass die Massen der Neutrinos im Vergleich zu anderen Elementarteilchen sehr klein sein müssen.

In dieser Aufgabe betrachten wir die Oszillation zwischen Elektron-Neutrinos ν_e und Myon-Neutrinos ν_μ. Nehmen Sie an, dass die Massen der Neutrinos so klein sind, dass man die Energie E der Neutrinos durch ihren Impuls p und ihre Masse m folgendermaßen nähern kann,

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \approx pc + \frac{m^2c^3}{2p},$$

**Hinweis:* Die Spinoperatoren $\hat{S}_i$ mit $i = 1, 2, 3$ wurden auf dem Übungsblatt 3 mit Hilfe der Pauli-Spinmatrizen definiert.

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Weiterhin können Sie annehmen, dass sich die Neutrinos in guter Näherung mit c bewegen. Sei nun $\hat{H}$ der Hamiltonoperator der freien Neutrinos mit Impuls p. Seien weiterhin $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$ die zwei Eigenzustände von $\hat{H}$,

$$\hat{H}\,|\nu_j\rangle = E_j\,|\nu_j\rangle \qquad \text{mit} \qquad E_j = pc + \frac{m_j^2 c^3}{2p},$$

wobei $j = 1, 2$. Hierbei sind m_1 und m_2 jeweils die Massen der Eigenzustände $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$ mit $m_1 \neq m_2$.

Neutrinooszillationen haben ihre Ursache darin, dass die z.B. in Kernreaktoren oder in der Sonne über die schwache Wechselwirkung erzeugten bzw. in Detektoren nachgewiesenen Neutrinos nicht die Eigenzustände $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$ von $\hat{H}$ sind, sondern Linearkombinationen von diesen,

$$|\nu_e\rangle = |\nu_1\rangle\cos(\theta) + |\nu_2\rangle\sin(\theta), \qquad |\nu_\mu\rangle = -|\nu_1\rangle\sin(\theta) + |\nu_2\rangle\cos(\theta).$$

Hierbei ist θ der sog. Mischungswinkel, welcher experimentell bestimmt werden muss.

a) Zur Zeit $t = 0$ werde ein Neutrino im Zustand $|\nu_e\rangle$ mit Impuls p erzeugt. Berechnen Sie den Zustand $|\nu(t)\rangle$ zur Zeit t in der Basis $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle\}$.[†]

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $p_e(t)$, das Neutrino zum Zeitpunkt t im Zustand $|\nu_e\rangle$ zu finden, gegeben ist durch

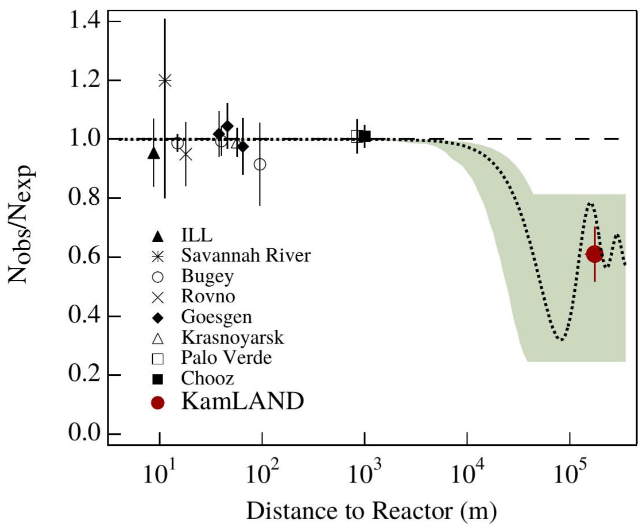
$$p_e(t) = 1 - \sin^2(2\theta)\sin^2\left(\frac{\pi c t}{L}\right),$$

wobei $L = 4\pi\hbar p/(|\Delta m^2|\,c^2)$ mit $\Delta m^2 \equiv m_1^2 - m_2^2$ die sog. Oszillationslänge ist.

c) Berechnen Sie L für eine Energie von $E \approx pc = 4$ MeV, welches die mittlere Energie von Reaktorneutrinos ist, und für eine Massendifferenz von $|\Delta m^2|c^4 = 10^{-4}\ \text{eV}^2$.

d) Der Neutrinofluss werde mit einem Detektor in einer Entfernung ℓ von der Neutrinoquelle gemessen. Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit p_e als Funktion von ℓ aus.

e) Aus einer Anzahl von Experimenten erhält man $|\Delta m^2|c^4 = (7{,}1 \pm 0.4)\cdot 10^{-5}\ \text{eV}^2$ und $\tan^2(\theta) = (0{,}45 \pm 0{,}02)$. Zeigen Sie, dass diese Werte mit dem Datenpunkt des KamLAND-Experiments in der unteren Abbildung einigermaßen konsistent sind. Hier bezeichnet N_{obs} die Anzahl der tatsächlich beobachteten Neutrinos und N_{exp} die Anzahl der im Detektor erwarteten Neutrinos in Abwesenheit von Neutrinooszillationen. Rechnen Sie mit $\ell = 180$ km und $E \approx pc = 4$ MeV.[‡]



[†] *Hinweis:* Stellen Sie die zwei Eigenzustände von $\hat{H}$ als $|\nu_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $|\nu_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dar.

[‡] *Hinweis:* Sie brauchen keine Fehlerrechnung durchführen!

3. *Translationsoperator*

Der Translationsoperator ist für $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ definiert als

$$\hat{T}_{\vec{a}} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{a} \cdot \hat{\vec{p}}\right),$$

wobei $\hat{\vec{p}}$ der Impulsoperator ist.

a) Zeigen Sie, dass

$$\hat{T}_{\vec{a}} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}a_1\hat{p}_1\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}a_2\hat{p}_2\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}a_3\hat{p}_3\right),$$

wobei die Komponenten des Impulsoperators im Ortsraum gegeben sind durch $\hat{p}_j = -\mathrm{i}\hbar\,(\partial/\partial x_j)$. Argumentieren Sie, warum $\hat{T}_{\vec{a}}$ unitär ist.

b) Zeigen Sie, dass für ein weiteres $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt,

$$\hat{T}_{\vec{a}}\hat{T}_{\vec{b}} = \hat{T}_{\vec{a}+\vec{b}}.$$

c) Sei $\psi(\vec{x})$ unendlich oft differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\hat{T}_{\vec{a}}\,\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x} - \vec{a}).$$