Einige ausgewählte Themen aus der PEP 1, WS 13/14

→ nach Rückmeldungen aus den Übungsgruppen

Fehlerrechnung

Fehler: Abweichung v.d. Wahrheit

unbekannt!

Beste Abschätzung der Wahrheit:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$ "Mittelwert"

→ minimiert quadratische Abweichung

Bei kontin. Verteilungen

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \underbrace{n(x)}_{\uparrow} \cdot dx$$

Vert. Funktion

Beispiel

v_x bei der Kin. Gastheorie

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} n(x) \cdot dx \quad \text{(Norm.)}$$

Fehler Einzelmessung

$$\Delta x_i = \underbrace{\sqrt{(x_i - \bar{x})^2}}_{\text{pos.}}$$

interessiert meist niemanden ...

mittlerer Fehler einer Einzelmessung:

$$\Delta x = s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$ (Taschenrechner)

"Standardabweichung"

sagt nichts über die Verteilung der Meßwerte aus!

Aber: Häufiges Messen lohnt sich!

$$\overline{\Delta x} = \bar{s} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

"Fehler des Mittelwertes"

$\overline{\Delta x} \to 0$ für $n \to \infty$

ABER: syst. Fehler!

nur bei Gaußverteilungen ist

$$\Delta x = s = \sigma$$

"Sigma"

Standardabweichung

Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta F(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{Fehlerbehaftete Größen}}) =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n\right)^2}$$

Exponentialfunktion

Entsteht immer, wenn eine Funktion proportional zu ihrer Änderung (Raum, Zeit, ...) ist:

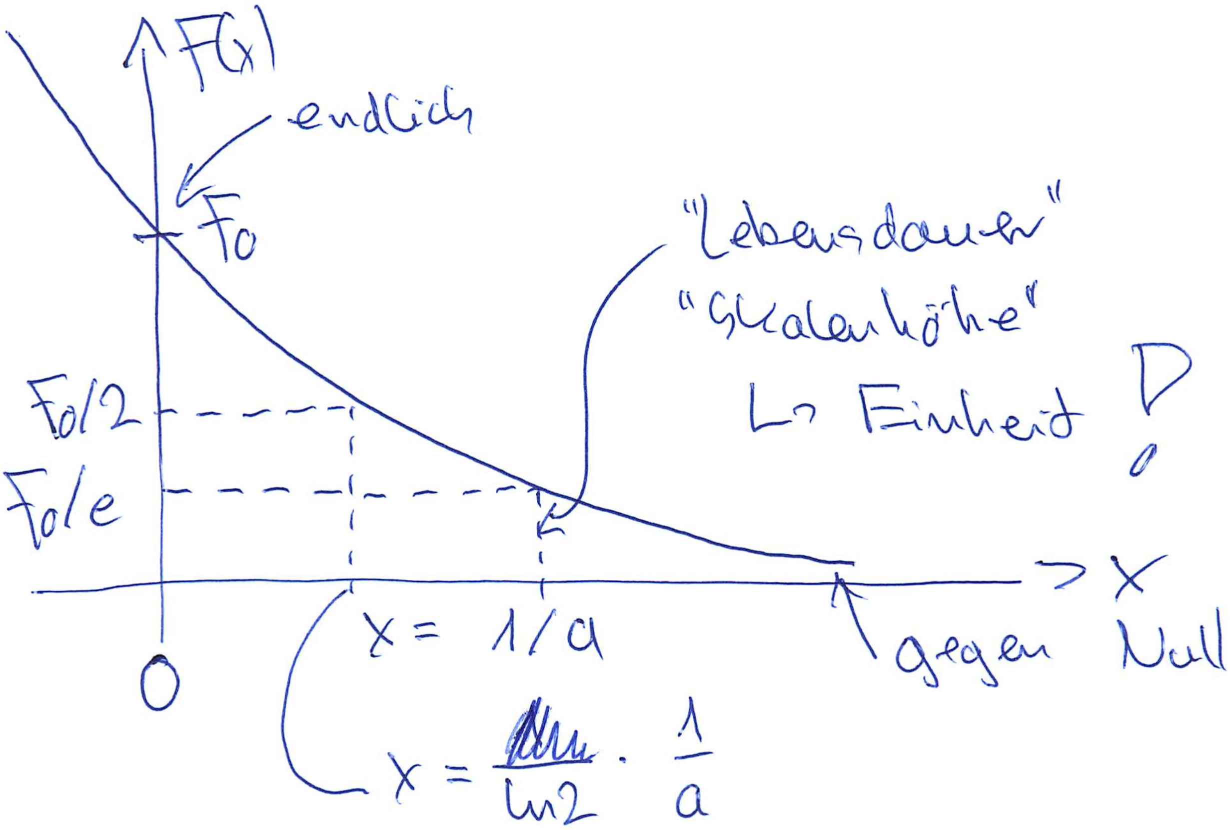
$$F(x) \sim \frac{dF(x)}{dx}$$

Für uns besonders wichtig:

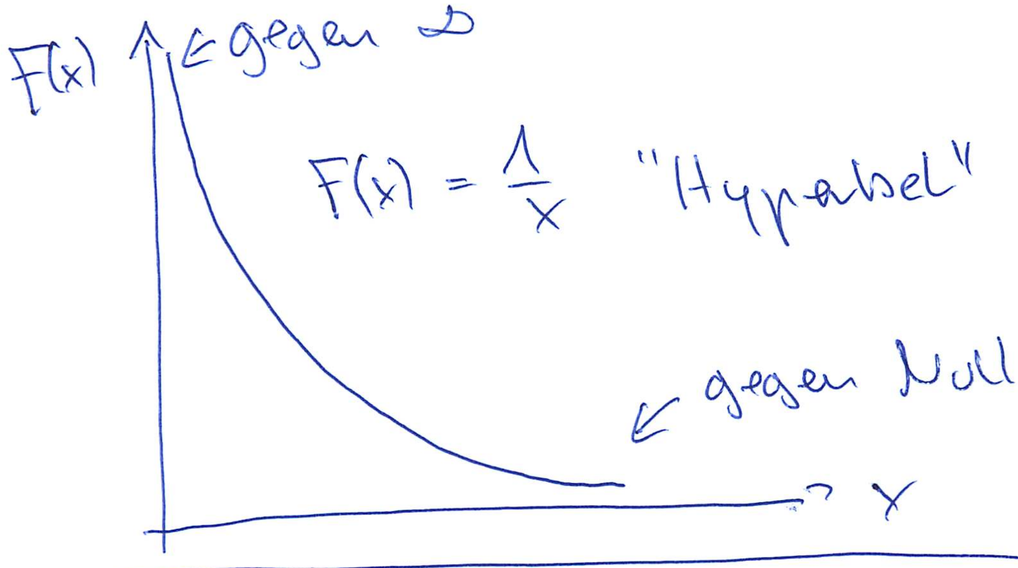
$$F(x) = -a \cdot \frac{dF(x)}{dx}$$ (radioakt. Zerfall
bar. Formel)

Dann:

$$F(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Int. Konstante}}}{F_0} \cdot e^{-\frac{x}{a}} \quad \leftarrow \text{"Skala"}$$



noch eine Banalität:



Newton, Kräfte + Beschleunigungen

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \dot{\vec{p}}$$

"Physik"
"Ursache"

Trägheit

Bewegung

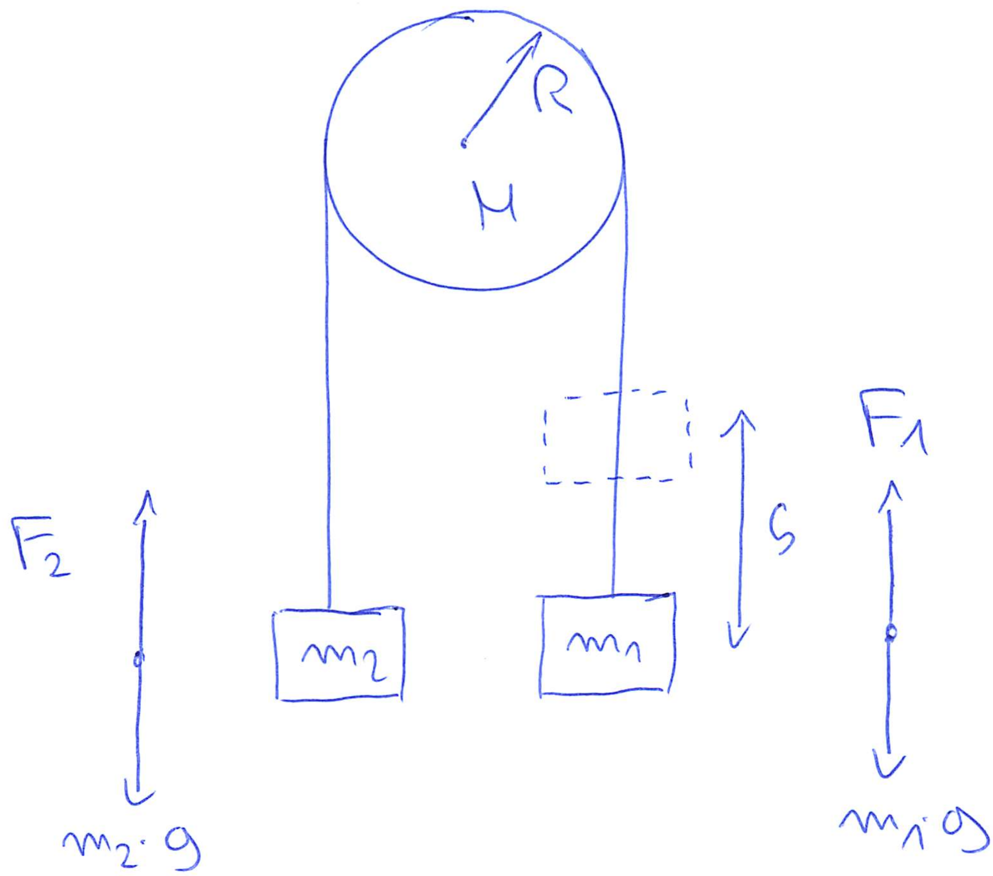
↓

$\vec{v}$

↓

$\vec{x}$

Beispiel Atwood



Warum interessant?

Trägheit $\neq$ Schwere

Summe $m_1 + m_2$ (Trägheit)

Differenz $m_1 - m_2$ (Schwere)

und F_1, F_2?

→ sind <u>gleich</u> ohne Reibung, ohne Trägheit des Rades oder andere Kräfte

ganz allgemein Newton für dieses System:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot g - F_1 &= m_1 \cdot a \\ \underbrace{m_2 \cdot g - F_2}_{\text{Summe aller Kräfte}} &= - m_2 \cdot a \end{aligned}\right\} \text{gleicher Betrag}$$

Richtung entg. gesetzt

<u>auflösen</u>:

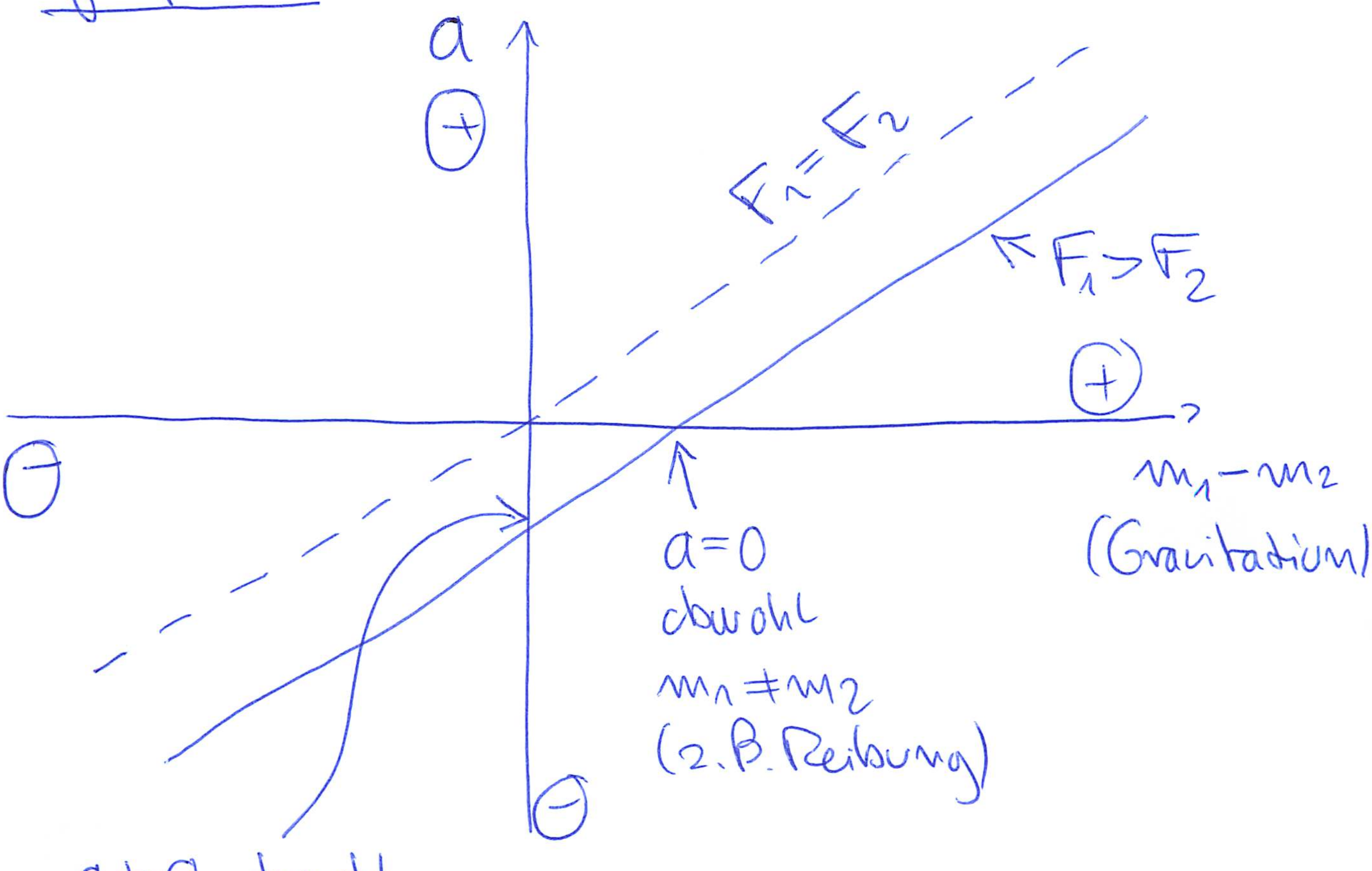
Grav.

Null, wenn $F_1 = F_2$

$$a = g \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} - \frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2}$$

Trägheit

<u>graphisch</u>



$a \neq 0$ obwohl

$m_1 = m_2$

(z.B. bremsen

durch Trägheit!)

wir wissen dann:

$$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}$$

also hier:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot s}$$

Das war die Newtonsche Bew. Gleichung

Es geht auch der Energiesatz:

$$\underbrace{\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2}_{E_{kin} \Leftrightarrow \text{Summe}} = \underbrace{m_1 \cdot g \cdot s - m_2 \cdot g \cdot s}_{\text{Differenz} \Leftrightarrow E_{pot}}$$

Auflösen nach liefert identischer Resultat

und wenn $F_1 \neq F_2$?

Beispiel Rollenträgheit

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$$

$\hat{=}$ Drehmoment

hier $M = R \cdot F$

also: $F_1 - F_2 = F = \frac{M}{R}$

Dynamik? $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$

$M = I \cdot \alpha$ (hier)

$= I \cdot \frac{a}{R}$ ← Beschleunigung also

$$a = g \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} - \frac{I \cdot a}{R^2 \cdot (m_1 + m_2)}$$

Trägheit der Rotation

→ nach a auflösen

→ v berechnen

Energiesatz

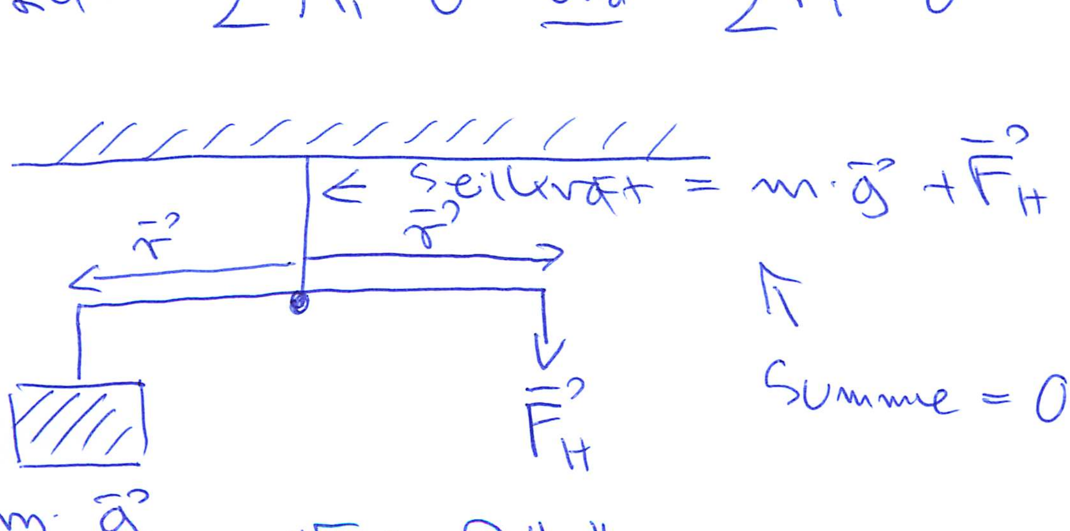
$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} m_1 \cdot v^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v^2}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} I \cdot \frac{v^2}{R^2}}_{\text{Rotation}}}_{\text{Bewegung}} = \underbrace{\underbrace{g \cdot s\,(m_1 - m_2)}_{\text{Gravitation Differenz}}}_{\text{Weg!}}$$

→ nach v auflösen, ident. Resultat

$\boxed{\text{Statik}}$

Beispiel Hebel (Flaschenzug)

Statik: $\sum \vec{M}_i = 0$ und $\sum \vec{F}_i = 0$



"Feste Rolle"

$$-\vec{r} \times m \cdot \vec{g} + \vec{r} \times \vec{F}_H = 0$$

↑ nach links drehen

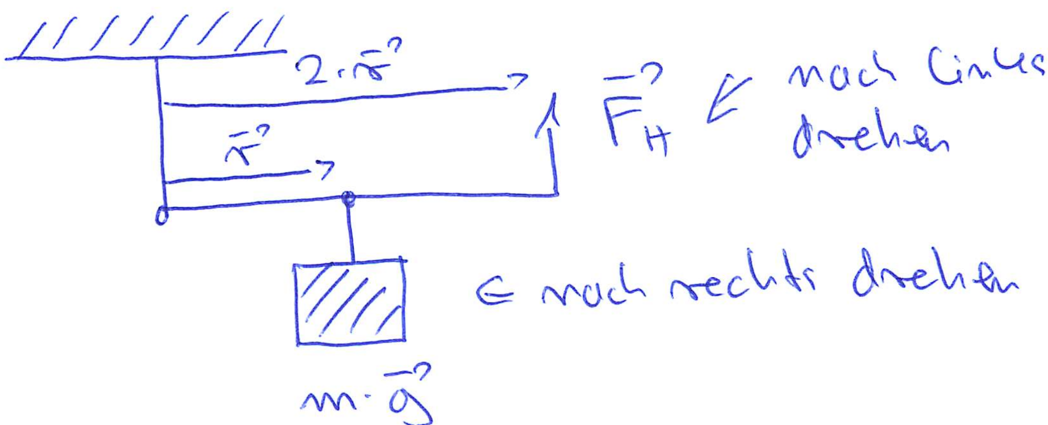
↑ nach rechts drehen

<u>hier:</u>

$$-r \cdot m \cdot g + r \cdot F_H = 0 \quad (90° \text{ Winkel})$$

$$F_H = m \cdot g$$

<u>Die lose Rolle als Hebel</u>



$$\underbrace{\vec{r} \times m \cdot \vec{g}}_{\text{nach rechts}} - \underbrace{2 \cdot \vec{r} \times \vec{F}_H}_{\text{nach links}} = 0$$

$$r \cdot m \cdot g - 2 \cdot r \cdot F_H = 0 \quad (90° \text{ Winkel})$$

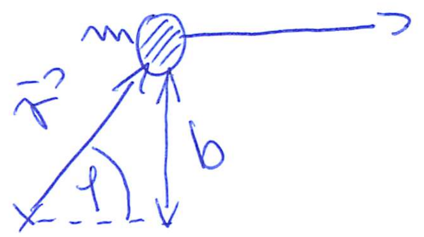
$$F_H = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g$$

(Halbierung der Kraft)

Drehimpuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



$\vec{v} = \text{const.}$ (z.B.)

$\vec{r} = \vec{r}(t)$

$\varphi = \varphi(t)$

v. Ursprung

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} \leftarrow \text{„Stoßparameter"}$$

$$L = r \cdot m \cdot v \cdot \frac{b}{r} = m \cdot v \cdot b = \text{const.}$$

Beispiel

<u>Änderung</u> von $\vec{L}$ erfordert <u>Drehmoment</u>

(Änderung von $\vec{p}$ erfordert <u>Kraft</u>)

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\substack{\vec{v} \times \vec{p} \\ = 0\,!}} + \underbrace{\underbrace{\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{r} \times \vec{F} \leftarrow \vec{p}\text{-Änderung}}}_{\vec{M}}$$

$$\text{also} \quad \vec{M} = \dot{\vec{L}}$$

Ursache „Physik"

„Trägheit gegen Drehänderung"

z.B. bei fester Achse: ← Kreisel nicht gemacht..

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(I\cdot\omega) = I\cdot\dot{\omega}$$

meist konstant

Erhaltungssatz !

Beispiel

$$\underbrace{\underbrace{\vec{r}\times m\cdot\vec{v}}_{\text{Ball}} + \underbrace{0}_{\text{Stuhl}}}_{\text{vorher}} = \underbrace{\underbrace{m\cdot r^2\cdot\vec{\omega}}_{\text{Ball}} + \underbrace{I\cdot\vec{\omega}}_{\text{Stuhl}}}_{\text{nachher}}$$

→ auflösbar

$$\boxed{p\cdot V = n\cdot R\cdot T}$$

warum ist das eine Näherung ?

- Druck kommt <u>nur</u> aus den Stößen mit der Wand ?

  ↳ <u>Falsch!</u> WW der Teilchen untereinander trägt zum Druck bei

- Volumen geht gegen <u>Null</u> wenn $p \to \infty$ oder $T \to 0$

  ↳ <u>Falsch</u>! Die Teilchen haben <u>selbst</u> eine Ausdehnung ($r \sim 10^{-10}$ m $= 1$ Å)

    ↳ <u>Auswirkung</u> bei großen p und/oder kleinen T

Also eigentlich:

$$(p + p_{innen}) \cdot (V - V_e) = n \cdot R \cdot T$$

(später ... , Van der Waals-Gleichung)

<u>Aber</u>: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ ist nützlich bei Normalbedingungen (z.B. normaler Luftdruck $1000\,\text{mbar} = 1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa} = 10^5 \frac{N}{m^2}$)

<u>Beispiele</u>

Marmeladenglas kühlt ab:

$V = \text{const.}$, $n = \text{const.}$

$$p_v \cdot V = n \cdot R \cdot T_v \text{ (vorher)}$$

$$p_n \cdot V = n \cdot R \cdot T_n \text{ (nachher)}$$

$$\underset{\text{z.B. } 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}}{\frac{p_v}{p_n}} = \frac{T_v \leftarrow \text{z.B. } 350 \text{ K}}{T_n \leftarrow \text{z.B. } 293 \text{ K}} \Bigg\} \text{absolut}$$

↓

0.8 bar (immerhin...)

↳ Kraft auf Deckel $p = \frac{F}{A}$

↳ z.B.

$\cancel{8 \cdot 10^6}$ / $2 \cdot 10^4 \cdot 0.008$

$= \cancel{1.6} \; 16 \text{ N}$

Fahrradreifen bei konstantem T und konstantem V aufpumpen

$$p_v \cdot V = n_v \cdot R \cdot T$$
$$p_n \cdot V = n_n \cdot R \cdot T$$

$$\frac{p_v}{p_n} = \frac{n_v}{n_n}$$

u.s.w.