

# **Grundlagen der Analysis**

Prof. Dr. Rainer Weissauer

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg  
Fakultät für Mathematik und Informatik  
Mathematisches Institut

Vorlesungsskriptum SS/WS 2011/12

Bearbeitungsstand: 4. Juli 2014

**Adresse des Dozenten:**

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg  
Mathematisches Institut  
Im Neuenheimer Feld 288  
D-69120 Heidelberg, Deutschland  
Raum 205

`weissaue@mathi.uni-heidelberg.de`  
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weissaue/`

# Vorwort

Dieses Skript richtet sich als Begleitmaterial der Vorlesung *Höhere Mathematik für Physiker II+III* vorrangig an Studenten der Fachrichtung Physik. In dem zweisemestrigen Zyklus werden die für Physikstudenten relevanten Methoden der Analysis dargestellt.

Die Vorlesung deckt dabei in zwei Semestern mathematische Inhalte ab, die normalerweise in den drei Vorlesungen *Analysis I–III* dargestellt werden. Dabei werden notgedrungen einige wichtige Dinge ausgelassen, da auf die mathematische Strenge der Darstellung nicht verzichtet werden soll. Kenntnisse aus der Vorlesung Lineare Algebra werden dabei vorausgesetzt. Die Hörer der Vorlesung sollten nämlich die Grundvorlesung *Lineare Algebra I* im Semester davor gehört haben.

Begleitend zu der Vorlesung und dem Übungsbetrieb werden einmal wöchentlich in einer zusätzlichen Großübung Beispiele behandelt, die in der Vorlesung selbst aus zeitlichen Gründen nicht diskutiert werden können.

Das vorliegende Skript folgt in seinem Aufbau keineswegs konsequent der Vorlesung. Auch innerhalb der einzelnen Kapitel werden in der Vorlesung Teile des Stoffes manchmal geringfügig umgestellt, um vom Timing die Übungsaufgaben so effizient wie möglich mit der Vorlesung abzustimmen.

Kapitel V hat einen sehr speziellen Charakter. Hier werden an einer Stelle des Skriptes spezifische Anwendungen der Analysis gebündelt, die in der Vorlesung und zum Teil in der Großübung gestreut vorgestellt werden. Ähnliches gilt für Kapitel XI. Das (noch ziemlich unvollständige) Kapitel XII wird in der Vorlesung nicht behandelt. Es ist gedacht für interessierte Leser und gibt einen kleinen Ausblick.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>1 Der Konvergenzbegriff</b>	<b>1</b>
1.1 Angeordnete Körper . . . . .	1
1.2 Die Euklidische Norm . . . . .	4
1.3 Metrische Räume . . . . .	6
1.4 Folgen in metrischen Räumen . . . . .	7
1.5 Die geometrische Reihe . . . . .	9
1.6 Vollständige metrische Räume . . . . .	10
1.7 Der Banachsche Fixpunktsatz . . . . .	11
1.8 Quaderschachtelung . . . . .	13
1.9 Reelle Zahlen . . . . .	16
1.10 Infimum und Supremum . . . . .	17
<b>2 Stetige Abbildungen</b>	<b>21</b>
2.1 Stetigkeit . . . . .	21
2.2 Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	23
2.3 Der Zwischenwertsatz . . . . .	24
2.4 Das $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium . . . . .	25
2.5 Gleichmässige Stetigkeit . . . . .	26
2.6 Reellwertige stetige Funktionen . . . . .	27
2.7 Gleichmässige Konvergenz . . . . .	29
2.8 Vollständigkeit von $C(X)$ . . . . .	30
2.9 Monotone Folgen stetiger Funktionen . . . . .	30
<b>3 Integration</b>	<b>33</b>
3.1 Vorbemerkungen . . . . .	33
3.2 Treppenfunktionen . . . . .	34
3.3 Das reelle Standardintegral . . . . .	36
3.4 Eigenschaften des Standardintegrals . . . . .	38
3.5 Der Logarithmus . . . . .	38
3.6 Das mehrdimensionale Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ . . . . .	40
3.7 Monotone Hüllen . . . . .	41
3.8 Abstrakte Integrale . . . . .	42

<b>4</b>	<b>Differentiation</b>	<b>45</b>
4.1	Das Landausymbol . . . . .	45
4.2	Differenzierbarkeit . . . . .	46
4.3	Die Jacobi-Matrix . . . . .	49
4.4	Extremwerte . . . . .	50
4.5	Symmetrie der Hessematrix . . . . .	52
4.6	Lokale Maxima . . . . .	53
4.7	Der Hauptsatz . . . . .	54
4.8	Differentialgleichungen . . . . .	55
4.9	Stetig partiell differenzierbare Funktionen . . . . .	60
4.10	Der Umkehrsatz . . . . .	61
4.11	Substitutionsregel . . . . .	64
4.12	Differentialformen . . . . .	67
4.13	Beweis des Poincare Lemmas . . . . .	71
4.14	Satz von Stokes für Quader . . . . .	74
4.15	Analytische Funktionen . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Ausgewählte Themen I</b>	<b>81</b>
5.1	Wegintegrale . . . . .	81
5.2	Holomorphe Funktionen . . . . .	83
5.3	Vektorfelder I . . . . .	84
5.4	Vektorfelder II . . . . .	87
5.5	Poissonklammer . . . . .	89
5.6	Legendre Transformation . . . . .	91
5.7	Kanonische Transformationen . . . . .	92
5.8	Harmonische Funktionen . . . . .	92
5.9	Harmonische Polynome . . . . .	94
5.10	Drehimpuls Operatoren . . . . .	96
5.11	Taylor Koeffizienten . . . . .	97
5.12	Orthogonale Gruppen . . . . .	98
5.13	Fourier-Graßmann Transformation . . . . .	99
5.14	Laplace Operatoren . . . . .	101
5.15	Maxwell Gleichungen . . . . .	102
5.16	Partitionen der Eins . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Lebesgue Integration</b>	<b>107</b>
6.1	Übersicht . . . . .	107
6.2	Das Lebesgue Integral . . . . .	108
6.3	Der Verband $L(X)$ . . . . .	109
6.4	Vertauschungssätze . . . . .	111
6.5	Anwendungen . . . . .	112
6.6	Nullmengen . . . . .	113
6.7	Messbare Funktionen . . . . .	114

<b>7</b>	<b>Verallgemeinerte Funktionen</b>	<b>117</b>
7.1	Basics . . . . .	117
7.2	Distributionen . . . . .	118
7.3	Faltung . . . . .	120
7.4	Coulomb Distribution . . . . .	122
7.5	Wellengleichung . . . . .	122
<b>8</b>	<b>Hilberträume</b>	<b>125</b>
8.1	Vorbemerkung . . . . .	125
8.2	$L^2$ -Räume . . . . .	127
8.3	Satz von Fischer-Riesz . . . . .	128
8.4	Der Folgenraum $L^2(\mathbb{Z})$ . . . . .	129
8.5	Orthonormalbasen . . . . .	130
8.6	Fourier Reihen . . . . .	131
8.7	Stone-Weierstraß . . . . .	133
8.8	Fourier Transformation . . . . .	134
8.9	Der harmonische Oszillator . . . . .	138
<b>9</b>	<b>Integration auf Mannigfaltigkeiten</b>	<b>139</b>
9.1	Untermannigfaltigkeiten mit Rand . . . . .	139
9.2	Randintegrale . . . . .	140
9.3	Der Satz von Stokes . . . . .	141
9.4	Standardintegral auf der Kugeloberfläche . . . . .	142
9.5	Greensche Formel . . . . .	145
<b>10</b>	<b>Harmonische Analysis</b>	<b>147</b>
10.1	Der Hilbertraum $L^2(S)$ . . . . .	147
10.2	Poisson Kern . . . . .	148
10.3	Orthogonalität . . . . .	150
10.4	Harmonische Funktionen sind analytisch . . . . .	152
10.5	Entwicklung auf Kugelschalen . . . . .	153
10.6	Die Potential Gleichung . . . . .	155
<b>11</b>	<b>Ausgewählte Themen II</b>	<b>157</b>
11.1	Kugelvolumina . . . . .	157
11.2	Überdeckungskompaktheit . . . . .	159
11.3	Residuensatz . . . . .	160
11.4	Wärmeleitungskern . . . . .	161
11.5	Spinordarstellung . . . . .	162
11.6	Oszillatordarstellung . . . . .	164
11.7	Spinor-Matrizen . . . . .	165
11.8	Heisenberggruppe . . . . .	167
11.9	Variationsrechnung . . . . .	168

Die Anwendungen in Kapitel V benötigen gewisse Voraussetzungen über die Differentiation. Die Abhängigkeiten sind wie folgt:

**Leitfaden für Kapitel V.**

- $1.3 \implies 5.12$
- $3.4 \implies 5.19$  (Anfang) +  $5.13$
- $4.5 \implies 5.3 \implies 5.12$
- $4.9 \implies 5.4 \implies 5.5 \implies 5.6 \implies 5.7$
- $4.12 \implies 5.13 \implies 5.14$
- $4.14 \implies 5.1 \implies 5.2$
- $4.13 + 4.14 + 5.14 \implies 5.15$

Im ersten Semester habe ich Kapitel I-IV behandelt (ausschließlich der Sektionen 4.14 und 4.15, die ich zu Beginn des zweiten Teils nach Kapitel VI bewiesen habe, da in diesen Abschnitten der Satz von der dominierten Konvergenz benutzt wird; man könnte natürlich hier die benutzten Vertauschungssätze auch erst einmal annehmen) und die Anwendungen 5.3-5.12. Die Behandlung der Abschnitte aus Kapitel V in der Vorlesung wurde meistens durch Übungsaufgaben vorbereitet und in der großen Übung vertieft.

Das Kapitel XI bestand zum Teil aus Übungsmaterial, Themen der Großübung und der Vorlesung. Kapitel XII und Teile von Kapitel XI wurden nicht in der Vorlesung behandelt, und sind gedacht als Lesestoff zur Anregung und weiteren Vertiefung.

**Leitfaden für Kapitel XI.**

- $9.3 + 9.4 + 4.11 \implies 11.1$
- $11.2 \implies 8.7$
- $10.5 \implies 11.3$
- $5.13 \implies 11.5 \implies 11.7$
- $8.8 \implies 11.4$
- $8.8 \implies 11.6 \implies 11.8$

In der ersten Vorlesung habe ich Kapitel I-IV behandelt (ausschließlich Abschnitt 4.13 und 4.15) sowie Kapitel V (ausschließlich Abschnitt 4.13 und 4.15). In den Abschnitten 4.13 und 4.15 wird die Vertauschung von Limesprozessen benötigt. Deshalb habe ich sie erst im Wintersemester nach dem Kapitel VI diskutiert, da die benötigten Vertauschungssätze sich dann unmittelbar aus dem Satz von der dominierten Konvergenz ergeben. Die erste Hälfte von Abschnitt 4.12 hatte ich in der Vorlesung bereits im unmittelbaren Anschluß an Abschnitt 4.9 dargestellt, die zweite Hälfte dann nach Abschnitt 4.11 um in der Zwischenzeit das Kalkül in der Großübung und in den Übungsaufgaben etwas vertrauter zu machen.

## Ein kurzer Überblick

In Kapitel I studieren wir den Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen zusammen mit den Euklidischen Räumen  $\mathbb{R}^n$ . Eine naive Definition der reellen Zahlen mit Hilfe von Dezimalbruchentwicklungen wird vermieden. Daß man reelle Zahlen durch eine Dezimalbruchentwicklung beschreiben kann, ergibt sich erst am Ende und eher beiläufig. Einer der Gründe für diese Vorgehensweise ist, daß eine reelle Zahl mehrere Dezimalbruchentwicklungen besitzen kann wegen

$$0,999\dots = 1.$$

Deshalb wird der Körper der reellen Zahlen wie in Mathematikvorlesungen üblich axiomatisch eingeführt als ein *archimedisch angeordneter Cauchy vollständiger* (pythagoräischer) Körper. Dieser Zugang ist sehr natürlich, denn es wird dabei automatisch der Begriff der *konvergenten* beziehungsweise *Cauchy konvergenten* Folgen in metrischen Räumen eingeführt. Diese zentralen Begriffsbildungen sind unverzichtbar und erweisen sich als grundlegend für alle weiteren Aussagen. Die wichtigsten Resultate des Kapitels, neben der Einführung der reellen Zahlen, sind die Sätze über *geometrische Folgen und Reihen* mit dem *Banachschen Fixpunktsatz*, dem Satz von *Bolzano-Weierstraß* und das *Prinzip der monotonen Konvergenz*. Alle hier genannten Resultate sind ihrer Natur nach Konvergenzaussagen. Der Banachsche Fixpunktsatz ist nützlich zur Bestimmung von Umkehrfunktionen und zur Lösung von Differentialgleichungen, der Satz von Bolzano-Weierstraß hängt eng zusammen mit Extremwertproblemen. Diese Sätze werden soweit möglich in der Sprache der *metrischen Räume* behandelt, so daß sie dann sowohl für  $\mathbb{R}$  als auch für Euklidische Vektorräume  $\mathbb{R}^n$  gelten. Das Prinzip der monotonen Konvergenz erweist sich später als das eigentliche Fundament der Integrationstheorie.

Im Kapitel II untersuchen wir *stetige Funktionen*, also Funktionen die anschaulich gesprochen keine Sprünge machen. Dies macht man am einfachsten präzise mit Hilfe der Folgendefinition der Stetigkeit, die am Anfang des Kapitels II eingeführt wird

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \right) \implies \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \right).$$

Wir formulieren diesen Stetigkeitsbegriff später mit Hilfe des sogenannten  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriteriums um. Ein Hauptgrund dafür, daß sich dadurch erst der Begriff der *gleichmässigen Stetigkeit* motiviert. Dieser ist viel subtiler als der Begriff der Stetigkeit und wird erst in der  $\varepsilon$ - $\delta$  Formulierung richtig begreifbar. Gleichmässige Stetigkeit ist von grundlegender Bedeutung in vielen Bereichen der Mathematik. Ein zentrales Resultat ist der Satz von Heine, daß eine stetige reellwertige Funktion auf einem folgenkompakten metrischen Raum automatisch gleichmässig stetig ist. Daraus leitet sich später z.B. die Integrierbarkeit stetiger Funktionen ab. Am Ende von Kapitel II beschäftigen wir uns mit (den für diesen Zeitpunkt) recht abstrakt wirkenden Aussagen über gleichmässige oder monotone Konvergenz von Funktionenfolgen auf einem (kompakten) metrischen Raum. Diese abstrakten Sätze werden die spätere Grundlage zur Lösung von Differentialgleichungen (gleichmässige Konvergenz) sein bzw. für die spätere Begründung der *Lebesgue Integrations-theorie* (monotone Konvergenz). Der Leser sollte daher diese Dinge zu diesem frühen Zeitpunkt einfach geduldig zur Kenntnis nehmen.

Im Kapitel III wird das *Euklidische Integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

definiert für eine stetige Funktion  $f(x)$  auf  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem (d.h. beschränktem) Träger. Die Bedeutung des Integralbegriffes muß sicherlich nicht erläutert werden. Die grundlegende Idee ist, daß man stetige (oder allgemeinere) Funktionen durch *Treppenfunktionen* approximiert um deren Integral zu definieren. Die explizite Berechnung von Integralen ist ein generell schwieriges Problem, und die wichtigste Methode dafür ist der später zu beweisende *Hauptsatz*. Im Kapitel III beschränken wir uns daher auf die Diskussion des *logarithmischen Integrals*  $\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ . Am Ende des Kapitels diskutieren wir eine Erweiterung des Integrationsbegriffs, welche auf dem *Prinzip der monotonen Konvergenz* beruht. Dies bereitet einerseits die spätere Einführung der Lebesgue Integration vor, erlaubt es andererseits Integrale

$$\int_A f(x) dx$$

für nichtnegative stetige Funktionen  $f$  zu definieren, deren Definitionsbereich eine beliebige (!) kompakte Teilmenge  $A$  im  $\mathbb{R}^n$  ist. Diese Überlegungen zeigen insbesondere, daß jede kompakte Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ein wohldefiniertes Volumen  $\text{vol}(A) = \int_A dx$  besitzt. Dies wird im Kapitel IV beim Beweis der allgemeinen *n-dimensionalen Substitutionsformel für Integrale* benötigt.

Kapitel IV ist dann der *Differentialrechnung* gewidmet. Der Begriff einer differenzierbaren Funktion wird von Anfang an für beliebige Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m ,$$

oder allgemeinere  $f$  definiert auf gewissen zulässigen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , eingeführt. Aus der Vorstellung, daß das Differential

$$Df(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

einer solchen Funktion  $f$  in einem Punkt  $\xi$  des Definitionsbereiches  $f(\xi) + Df(\xi)(x - \xi)$  die bestmögliche affin lineare Approximation der Funktion  $f$  darstellt, ergeben sich rasch die wichtigsten Sätze. Wir diskutieren die *Kettenregel*, *Extremwertprobleme*, beweisen den *Hauptsatz* und wenden diesen auf die Theorie der Differentialgleichungen einer Variable an. Im Anschluß diskutieren wir schwierigere Sätze der Analysis mehrerer Variablen, den *Satz von der Umkehrfunktion* und die *Substitutionsregel* für mehrdimensionale Integrale. Unser Ziel ist es dabei so schnell wie möglich den Begriff der *Differentialformen* einzuführen und zu motivieren. Erst mit Hilfe dieser Differentialformen kann man die höherdimensionale Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Analysis überhaupt formulieren. Ein Teil dieses allgemeinen Hauptsatzes ist das Poincare Lemma (eine weitreichende Verallgemeinerung der *Hauptsätze der klassischen Vektoranalysis*), ein anderer Teil ist der *Satz von Stokes*

$$\int_{\partial Q} \omega = \int_Q d\omega ,$$

der am Ende von Kapitel IV zuerst einmal nur für Quader  $Q$  bewiesen wird. Für die meisten lokalen Anwendungen reicht dies bereits aus.

Im Kapitel VI wird die *Lebesgue Integrationstheorie* entwickelt. Diese Theorie, allem voran der *Satz von der dominierten Konvergenz* und der *Satz von Beppo Levi*, stellt die Grundlage für das spätere Kapitel über Hilberträume dar. Beide Sätze sind Vertauschungssätze, die garantieren daß unter gewissen Voraussetzungen Limiten mit der Integration vertauschen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx .$$

Nur mit Hilfe dieser Sätze sind die später wichtigen  $L^2(X)$ -Hilberträume definierbar. Kapitel VI ist zum Teil sehr technisch, aber eigentlich auch sehr einfach. Zum Verständnis ist hier ist vor allem Geduld erforderlich. Einige Beweise von Kapitel IV (Beweis des Poincare Lemmas und die Diskussion analytischer Funktionen) hängen bei dem von uns gewählten Zugang vom Satz der dominierten Konvergenz ab. Der abschliessende Abschnitt über *messbare Funktionen* enthält in kondensierter Form eigentlich alle wesentlichen Resultate von Kapitel VI.

Im Kapitel VII studieren wir *Distributionen* und bestimmen *Fundamentallösungen* von der *Laplace Gleichung* und der *D'Alembert Gleichung*.

Das Kapitel VIII ist von Bedeutung für die *Quantentheorie*. Aus diesem Grund geben wir einen kurzen Überblick über die Querverbindungen am Anfang des Kapitels. Im Kapitel VIII definieren wir den Begriff des (separablen) Hilbertraumes und beweisen in diesem Kontext die Sätze über *Fourierzerlegung*. Ein besonderer Augenmerk wurde dabei auf eine vollständige und ausführliche Diskussion der *reellen Fourier Transformation* gelegt. Es gibt einen engen Zusammenhang zur *Quantentheorie* (Stichwort *harmonischer Oszillator*).

Im Kapitel IX diskutieren wir die Analysis auf eingebetteten *Mannigfaltigkeiten* und beweisen in diesem Kontext den *Satz von Stokes* (und damit den Satz von *Gauß*) in der Sprache der Differentialformen. Das für uns wichtigste Beispiel einer eingebetteten Mannigfaltigkeit ist die  $(n - 1)$ -dimensionale *Sphäre*  $S^{n-1}$  im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ . Dieses Beispiel behandeln wir ausführlich. Insbesondere definieren wir das rotationsinvariante Standardintegral<sup>1</sup> auf der Sphäre und diskutieren die *Greenschen Formeln*.

Im Kapitel X wenden wir die Ergebnisse aus Kapitel VIII und betreiben Analysis auf der Sphäre unter Berücksichtigung der Operation der Drehgruppe. Wir finden in den *sphärischen Kugelfunktionen* eine Hilbertraum Basis von  $L^2(S^{n-1})$  in beliebiger Dimension  $n$  und beweisen die *Poissonformel*. Als Anwendung erhalten wir die *Laurent-Entwicklung* von harmonischen Funktionen auf Kugelschalen (*Multipolentwicklungen*) mit genauer Diskussion von Konvergenzfragen, und beweisen damit als Spezialfall die *Analytizität harmonischer Funktionen*. Dies umfaßt im Spezialfall  $n = 2$  die Grundlagen der *komplexen Funktionentheorie*.

---

<sup>1</sup>Die Sphäre  $S^{n-1}$  ist eine kompakte Teilmenge im  $\mathbb{R}^n$ . Das Standardintegral auf der Sphäre  $A = S^{n-1}$  ist nicht das in Kapitel III diskutierte Euklidische Integral  $\int_A f(x) dx$ , denn dieses ist identisch Null (die Sphäre ist eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^n$ ). Das Standardintegral auf der Sphäre schreiben wird deshalb  $\int_{S^{n-1}} f(x) \sigma_{n-1}(x)$ .



# 1 Der Konvergenzbegriff

## 1.1 Angeordnete Körper

Wir wiederholen an dieser Stelle den aus der Linearen Algebra bekannten Begriff des *Körpers*. Es handelt sich dabei um einen Rechenbereich mit Multiplikation und Addition.

Genauer gilt: Ein Körper ist ein Tupel  $(K, +, \cdot, 0, 1)$  bestehend aus einer Menge  $K$ , zwei Verknüpfungen  $+: K \times K \rightarrow K$ , genannt *Addition*, und  $\cdot: K \times K \rightarrow K$ , genannt *Multiplikation*, sowie zwei verschiedenen Elementen 0 (Nullelement) und 1 (Einselement) mit gewissen Eigenschaften. So soll zum einen das Tupel  $(K, +, 0)$  eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 sein. D. h. man kann beliebige Elemente  $a, b \in K$  addieren, das heißt durch  $+$  verknüpfen, so daß gilt  $a + b = b + a \in K$  sowie  $a + 0 = a$ , und jede Gleichung

$$x + a = b$$

hat für gegebenes  $a, b \in K$  eine eindeutige Lösung  $x$ . Wir schreiben diese in der Form  $x = b - a$ .

Zum anderen soll die Menge der von Null verschiedenen Elemente  $K^* \subseteq K$  eine abelsche Gruppe  $(K^*, \cdot, 1)$  definieren. Insbesondere ist daher für alle  $a, b \in K$  mit  $a \neq 0, b \neq 0$  die Gleichung

$$x \cdot a = b$$

eindeutig lösbar. Deren Lösung schreiben wir als  $x = a/b = b \cdot a^{-1}$ . Für gewöhnlich lassen wir den Punkt für die Multiplikation meist weg und schreiben kurz  $ab$  statt  $a \cdot b$ . Ist  $b = 0$  und  $a \neq 0$ , dann ist übrigens  $x = 0$  die einzige Lösung der Gleichung  $x \cdot a = b$ . Dies folgt aus dem *Distributivgesetz*, das in einem Körper erfüllt sein soll. Im Distributivgesetz wird  $a(b + c) = ab + ac$  gefordert für alle  $a, b, c \in K$  und es impliziert  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$  für alle  $a \in K$ .

Der Begriff des Körpers ist bereits aus der Linearen Algebra bekannt. Typische Beispiele sind: der Körper  $\mathbb{Q}$  der *rationalen Zahlen*, der Körper  $\mathbb{R}$  der *reellen Zahlen* sowie der Körper  $\mathbb{C}$  der *komplexen Zahlen*. Für die Analysis spielt der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen eine fundamentale Rolle. Seine Elemente stellen wir uns intuitiv vor als die Punkte auf einer lückenlosen Geraden. Wir sind von der Schule gewohnt in diesem Körper zu rechnen.

Eine sehr wichtige Eigenschaft des Körpers der reellen Zahlen besteht darin, daß dieser Körper eine *Anordnung* besitzt. Eine Anordnung ist eine Relation  $x < y$ : Alle  $x$  und  $y$  aus einem Körper  $K$  lassen sich also in Bezug auf diese Anordnung vergleichen. Man setzt formal  $y > x \Leftrightarrow x < y$  und schreibt

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad x < y \text{ oder } x = y.$$

## 1 Der Konvergenzbegriff

Der Begriff der Anordnung ist auch in der Physik sehr wesentlich, wenn es um die Parametrisierung der Zeit geht. Das Vorher und Nachher von Ereignissen spielt eine fundamentale Rolle bei der Kausalität und dem physikalischen Begriff der Entropie.

Der Begriff eines angeordneten Körpers lässt sich mathematisch in axiomatischer Weise definieren. Ein angeordneter Körper  $(K, <)$  ist ein Körper  $K$  zusammen mit einer ausgezeichneten Teilmenge  $P \subseteq K^*$ . Man nennt dann  $P$  den „Kegel der positiven Zahlen“ des angeordneten Körpers. Dies ist ein eindimensionales Analogon des in der Physik auftretenden vorderen Lichtkegels im Minkowskiraum. Eine Zahl  $x \in K$  nennt man negativ oder man schreibt  $x \in -P$ , wenn ihr negatives  $-x$  in  $P$  liegt.

**Definition 1.1.** Ein Tupel  $(K, P)$  bestehend aus einem Körper  $K$  und einer Teilmenge  $P$  von  $K^*$  heißt **angeordneter Körper**, wenn

- (1)  $K = P \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} -P$ , d. h.  $K$  zerlegt sich disjunkt in  $P$ ,  $-P$  und Null.
- (2)  $P + P \subseteq P$ , d. h. die Summe zweier Zahlen aus  $P$  ist wiederum in  $P$
- (3)  $P \cdot P \subseteq P$ , d. h. das Produkt zweier Zahlen aus  $P$  ist wieder in  $P$ ; also  $1 \in P$  gilt und wir schreiben  $x < y$  genau dann wenn  $y - x \in P$  gilt.

Die Menge  $P$  definiert damit eine Relation  $<$  auf  $K$  und wir schreiben auch  $(K, <)$  anstelle von  $(K, P)$ , denn per Definition gilt

$$P = \{x \in K \mid 0 < x\}.$$

Aus dem ersten Axiom angeordneter Körper folgt für zwei Zahlen  $x, y \in K$  entweder  $x < y$  oder  $x = y$  oder  $y < x$  im ausschliesslichen Sinn. Für  $y = 0$  folgt unmittelbar  $-P = \{x \in K \mid x < 0\}$ . Wir bemerken folgende Eigenschaft:

- Jedes Quadrat  $x^2$  einer Zahl  $x$  aus  $K^*$  ist positiv, kurz:  $x^2 \in P$ .

Dies ist klar für  $x \in P$  nach dem dritten Axiom. Ist  $x$  nicht in  $P$ , dann ist  $-x \in P$  und damit  $(-x)^2 \in P$  nach dem ersten Axiom. Also  $x^2 \in P$  wegen  $x^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = (-x)^2 \in P$ . Hier haben wir benutzt  $-x = (-1) \cdot x$  und  $(-1) \cdot (-1) = 1$ . Diese Eigenschaften gelten in jedem Körper [benutze dazu das Distributivgesetz].

Man sieht daher, daß der Körper der komplexen Zahlen keine Anordnung besitzen kann, denn  $-1 = i^2$  ist ein Quadrat in  $\mathbb{C}^*$ , aber liegt nicht in  $P$  wegen  $1 \in P$ .

**Bemerkung 1.2.** Sei  $(K, <)$  ein angeordneter Körper. Dann gelten wegen Definition 1.1 folgende Eigenschaften:

- (1) Es gilt entweder  $x < y$  oder  $x = y$  oder  $x > y$  (im ausschließlichen Sinn)
- (2) Ist  $x < y$  und  $y < z$ , dann ist  $x < z$ .
- (3) Ist  $x < y$ , dann gilt  $x + z < y + z$  für alle  $z \in K$ .

**Beweis.** (1) ist klar. Zu (2) beachte: Aus  $y - x \in P$  und  $z - y \in P$  folgt  $z - x = (z - y) + (y - x) \in P + P \subseteq P$ . Zu (3) beachte: Aus  $y - x > 0$  folgt  $(y + z) - (x + z) = y - x > 0$  und damit auch  $x + z < y + z$ .  $\square$

In einem angeordneten Körper definiert man den Betrag  $|x|$  eines Element  $x \in K$  wie folgt:  $|x| = 0$  gilt genau dann wenn  $x = 0$ ; und für  $x \neq 0$  sei per Definition  $|x| = x$  resp.  $-x$  je nachdem ob  $x \in P$  oder  $x \notin P$ . Dann gilt nach Definition  $|x| \in P$  für  $x \neq 0$ , und man sieht sofort

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

**Natürliche Zahlen.** Jeder angeordnete Körper enthält die natürlichen Zahlen in der Form

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} := \{0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots\}.$$

Beachte nämlich  $0 < 1$ , und wegen Eigenschaft (3) folgt dann durch Addition  $1 = 0 + 1 < 1 + 1 =: 2$  und dann analog  $2 = 1 + 1 < 3 =: 1 + 1 + 1$  und so weiter. Die Zahlen  $0, 1, 2, 3, \dots$  sind wegen Eigenschaft (2) paarweise verschieden. Die so definierte Teilmenge  $\mathbb{N} \subseteq K$  ist unter Multiplikation und Addition abgeschlossen, wie man sofort mit Hilfe des Distributivgesetzes in  $K$  zeigt, und kann mit den natürlichen Zahlen identifiziert werden. Wir benutzen folgende Notation: Das Produkt der ersten  $n$  positiven natürlichen Zahlen sei  $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ .

Wegen der Körperaxiome liegen daher die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  als paarweise verschiedenen Zahlen in einem angeordneten Körper, und damit auch die Quotienten  $a/b$  ganzer Zahlen  $a$  und  $b \neq 0$ . Also ist der Körper der rationalen Zahlen ein Teilkörper jedes angeordneten Körpers:  $\mathbb{Q} \subseteq K$ . Insbesondere enthält  $K$  unendlich viele Elemente. Endliche Körper besitzen daher keine Anordnung.

Es stellt sich nun die Frage, ob die Anordnung die charakteristischen Eigenschaften der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  bereits vollständig beschreibt. Das ist nicht der Fall, denn der Körper der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  ist auch ein angeordneter Körper, aber verschieden vom Körper der reellen Zahlen. Wir wollen daher weitere Eigenschaften suchen, die  $\mathbb{R}$  charakterisieren.

**Definition 1.3.** Ein angeordneter Körper  $(K, <)$  heißt **archimedisch**, wenn gilt: Für jedes  $x \in K$  existiert eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft  $x < n$ .

**Definition 1.4.** Ein archimedischer Körper  $(K, <)$  heißt **pythagoräisch**, wenn gilt: Jede Zahl aus  $P$  ist ein Quadrat in  $K$ .

Der Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist archimedisch, aber nicht pythagoräisch. 2 ist positiv aber kein Quadrat in  $\mathbb{Q}$ , weil die Gleichung  $n^2 = 2m^2$  keine ganzzahligen Lösungen  $m, n$  besitzt [Benutze die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung].

Für jede Zahl  $y \in P$  eines angeordneten Körpers mit  $y \geq \frac{1}{4}$  gilt  $0 < \eta \leq \frac{1}{4}$  für  $\eta := 1/16y$ . Ist  $\eta$  ein Quadrat  $\eta = \xi^2$ , dann auch  $y = (1/4\xi)^2$ . Dies zeigt uns später in Lemma 1.24, daß ein vollständiger archimedischer Körper auch pythagoräisch ist.

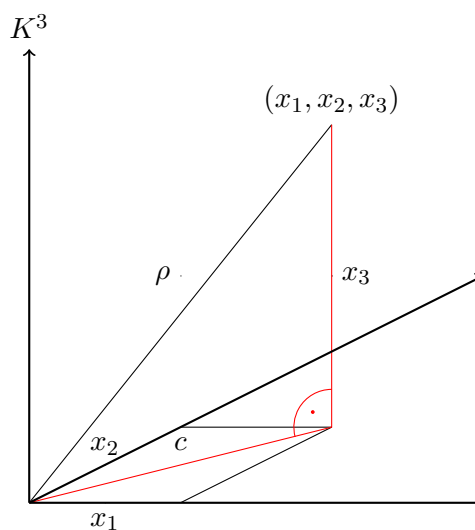
In einem pythagoräischen Körper besitzt jede nicht negative Zahl  $y \in K$  eine eindeutig bestimmte nicht negative Quadratwurzel  $x_1 = +\sqrt{y}$ , d.h. eine eindeutig bestimmte nicht negative Lösung  $x = x_1$  der Gleichung  $x^2 - y = 0$ . [Für  $y = 0$  ist das klar. Ist  $y \in P$ , gibt es eine Lösung  $x_1$ , da  $K$  pythagoräisch ist. Dann ist auch  $x_2 = -x_1$  eine Lösung mit  $x_2 \neq x_1$ , und damit oBdA  $x_1 \in P$  und  $x_2 \in -P$ . In einem Körper hat aber die Gleichung  $x^2 - y = (x - x_1)(x - x_2) = 0$  dann höchstens die Lösungen  $x = x_1, x_2$ .] Der **Absolutbetrag**  $|x|$  einer Zahl  $x \in K^*$  kann daher in der Form  $|x| = +\sqrt{x^2}$  geschrieben werden.

## 1.2 Die Euklidische Norm

Wir wollen für einen pythagoräischen Körper  $K$  die **Norm** (oder auch Länge) eines Vektors im  $r$ -dimensionalen Vektorraum  $K^r$  definieren. Betrachte den  $r$ -dimensionalen Standardvektorraum

$$K^r = \{(x_1, \dots, x_r) \mid x_1, \dots, x_r \in K\}$$

für einen pythagoräischen Körper  $K$ . Motivation: Für einen beliebigen Punkt  $x = (x_1, x_2, x_3)$  im Anschauungsraum  $K^3$  würde der Satz von Pythagoras den Abstand  $\rho$  von  $x$  zum Nullpunkt liefern durch die Formel  $\rho^2 = c^2 + x_3^2 = (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2$



Dadurch motiviert, definiert man die **Standardnorm** oder **Euklidische Norm** für  $x = (x_1, \dots, x_r)$  aus  $K^r$  entsprechend als

$$\|x\| = +\sqrt{x_1^2 + \dots + x_r^2}.$$

Wegen Satz 1.5 ist  $x_1^2 + \dots + x_r^2 \geq 0$ , und daher existiert die (!) positive Wurzel aus dieser Zahl (siehe letzter Abschnitt von §1.1). Dies macht  $\|x\|$  wohldefiniert als Zahl in  $P \cup \{0\} \subseteq K$ , und  $\|x\| = 0$  gilt genau dann wenn  $x = 0$  gilt (Satz 1.5). Beachte

$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

für alle Skalare  $\lambda$  aus  $K$ , denn beide Seiten sind  $\geq 0$  und haben dasselbe Quadrat. [Benutze Übungsaufgabe]. Im eindimensionalen Fall  $r = 1$  ist  $\|x\| = |x|$ .

**Satz 1.5.** Sei  $K$  pythagoräisch und ein Vektor  $x = (x_1, \dots, x_r) \in K^r$  gegeben. Dann gilt:  $x_1^2 + \dots + x_r^2 \in P$  oder  $x_1^2 + \dots + x_r^2 = 0$ . Letzteres gilt genau dann, wenn

$$x_1 = \dots = x_r = 0.$$

**Beweis.** Den Beweis reduziert man durch Induktion nach  $r$  auf den Fall  $r = 2$ . Dieser Fall sei als Übungsaufgabe gestellt.  $\square$

**Definition 1.6.** Sei  $K$  pythagoräisch. Für  $x, y \in K^r$  nennt man

$$(x, y) = x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_r y_r$$

das **Standard-Skalarprodukt** von  $x$  und  $y$ .

Insbesondere gilt  $x \cdot x = \|x\|^2$  für  $x = (x_1, \dots, x_r) \in K^r$ .

**Satz 1.7 (Ungleichung von Schwarz).** Seien  $x, y \in K^r$ . Dann ist

$$\boxed{|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $x$  und  $y$  proportional sind.

**Beweis.** ObdA sei  $x - t \cdot y \neq 0$  für alle  $t \in K$  (d. h.  $x$  und  $y$  seien nicht proportional). Dann gilt

$$0 < \|x - ty\|^2,$$

d. h.

$$0 < (x - ty, x - ty) = \sum_{i=1}^r (x_i - ty_i)^2 = \|x\|^2 - 2t(x, y) + t^2\|y\|^2,$$

wegen  $(x_i - ty_i)^2 = x_i^2 - 2tx_i y_i + t^2 y_i^2$ . Sei nun obdA  $y \neq 0$ . Dann folgt

$$t^2 - \frac{2t(x, y)}{\|y\|^2} + \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} > 0$$

$$t^2 - \frac{2t(x, y)}{\|y\|^2} + \left(\frac{(x, y)}{\|y\|^2}\right)^2 > \frac{(x, y)^2}{\|y\|^4} - \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2}$$

$$\left(t - \frac{(x, y)}{\|y\|^2}\right)^2 > \frac{(x, y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2}{\|y\|^4}.$$

Setzt man  $t := \|y\|^{-2}(x, y)$ , dann folgt  $(x, y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 < 0$ .  $\square$

**Satz 1.8 (Dreiecksungleichung im  $K^r$ ).** Sei  $K$  pythagoräisch und seien  $x, y \in K^r$  und  $\lambda \in K$ . Dann gilt  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ , sowie  $\|x\| = 0 \iff x = 0$  und

$$\boxed{\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|}.$$

## 1 Der Konvergenzbegriff

**Beweis.** Nach dem Übungsblatt 1 genügt es  $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$  zu zeigen. Die linke Seite ist

$$(x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2,$$

und die rechte Seite ist  $(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$ . Die Behauptung folgt daher aus  $2(x, y) \leq 2\|x\|\|y\|$  und der Schwarzischen Ungleichung

$$2|(x, y)| \leq 2\|x\|\|y\|.$$

□

**Folgerung.** Die Funktion  $\|\cdot\| : V \rightarrow K$  definiert eine **Norm** auf dem  $K$ -Vektorraum  $V$ , d.h. es gilt: a)  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ , b)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  für alle  $\lambda \in K$  und alle  $x \in V$ , c)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  für alle  $x, y \in V$ .

## 1.3 Metrische Räume

Im Folgenden sei  $(K, <)$  ein fest gewählter archimedischer Körper (später dann immer der Körper der reellen Zahlen).

**Definition 1.9.** Sei  $X$  eine beliebige Menge. Das Tupel  $(X, d)$  mit einer Abbildung

$$d: X \times X \rightarrow K, (x, y) \mapsto d(x, y)$$

heißt **metrischer Raum** (bezüglich  $K$ ), falls für die Abbildung  $d$  gilt:

- (1) (Positivität)  $d(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in X$  und  $d(x, y) = 0$  gilt genau dann, wenn  $x = y$ .
- (2) (Symmetrie) Für alle  $x, y \in X$  ist  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- (3) (Dreiecksungleichung)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  gilt für alle  $x, y, z \in X$ .

Man nennt  $d(x, y)$  die **Abstandsfunktion** oder **Metrik** des metrischen Raumes  $(X, d)$ . In einem metrischen Raum gilt automatisch die folgende **untere Dreiecksungleichung**

$$|d(x, z) - d(x', z)| \leq d(x, x'),$$

denn die Dreiecksungleichung  $d(x, z) \leq d(x, x') + d(x', z)$  impliziert  $d(x, z) - d(x', z) \leq d(x, x')$ , und durch Vertauschung von  $x$  und  $x'$  folgt daraus die Behauptung.

Ist  $\|\cdot\| : V \rightarrow K$  eine **Norm** auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$ , dann definiert  $d(x, y) = \|x - y\|$  eine **Metrik** auf  $V$ . [Beachte  $d(y, x) = \|y - x\| = \|-(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$  sowie  $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$ .]

Das für uns wichtigste Beispiel eines metrischen Raumes ist der archimedische Körper  $K$  selbst mit seiner Metrik  $d(x, y) = |x - y|$ . Ist  $K$  ein pythagoräischer Körper und ist  $\|\cdot\|$  die **Euklidische Norm** auf dem  $r$ -dimensionalen  $K$ -Vektorraum  $K^r$ , dann definiert

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

die sogenannte **Standardmetrik** auf  $V = K^r$ . Den so definierten metrischen Raum nennt man den  $r$ -dimensionalen **Euklidischen Raum**.

## 1.4 Folgen in metrischen Räumen

Fast alle Aussagen der Analysis bauen auf den in diesem Abschnitt erläuterten Konzepten auf. Wir beginnen mit dem Begriff einer Folge:

**Definition 1.10.** Sei  $X$  eine beliebige Menge. Eine **Folge in  $X$**  ist eine Abbildung

$$x: \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \rightarrow X.$$

Anschaulich läßt sich eine Folge als eine unendliche „Durchnumerierung“ von Elementen interpretieren. Dies wirkt sich auch auf die Notation aus: Statt einer Abbildungsbeziehung, also einer Auflistung der Art

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto x(0), \\ 1 &\mapsto x(1), \\ 2 &\mapsto x(2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

verwenden wir Indizierungen zur Numerierung der betroffenen Elemente von  $X$ , um die Folge zu beschreiben:

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Die Elemente  $x_0, x_1, x_2$ , etc. heißen die *Folgentglieder*, bzw. kurz die *Glieder* der Folge  $x$ .

Bisher haben wir keine näheren Anforderungen an die Menge  $X$  gestellt. Wir nehmen jetzt an, daß  $X$  ein metrischer Raum ist. Wir wollen uns daher mit den Abständen zwischen Folgegliedern befassen und durch folgende Definition insbesondere ganz bestimmte Folgen behandeln:

**Definition 1.11.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  in  $(X, d)$  heißt **Cauchyfolge**, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  aus  $K$  eine natürliche Zahl  $N = N(\varepsilon)$  existiert, so daß für alle  $n, m \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$n, m \geq N \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Zur anschaulichen Bedeutung. Zunächst taucht hierbei die Zahl  $\varepsilon$  auf. Diese steht intuitiv gesprochen für etwas „beliebig Kleines“. Man stellt sich dabei vor, dass egal wie klein  $\varepsilon$  gewählt wird, man trotzdem noch davon abhängende Zahlen  $N(\varepsilon)$  wie behauptet finden kann. Man kann, wenn man nur weit genug mit dem Index geht, den Abstand zwischen Folgentgliedern unter jede noch so kleine Schranke drücken. Anschaulich besteht das Wesen einer Cauchyfolge also darin, daß die Abstände zwischen den Gliedern immer enger werden. Dies hängt substantiell von der gewählten Abstandsfunktion  $d$  ab.

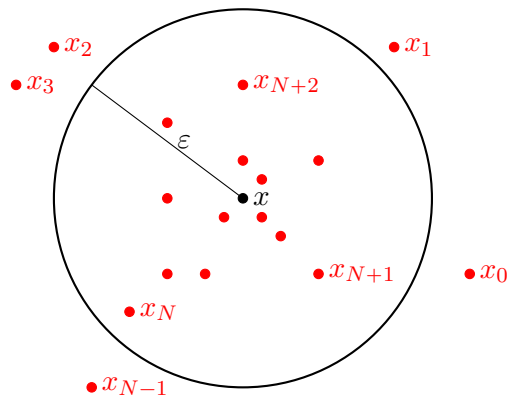
**Definition 1.12.** Eine Folge  $x_0, x_1, \dots$  in  $(X, d)$  heißt **konvergent** gegen einen Grenzwert  $x \in X$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$  existiert, so daß für alle  $n \geq N(\varepsilon)$  gilt  $d(x_n, x) < \varepsilon$ .

## 1 Der Konvergenzbegriff

Zur Veranschaulichung. Wir fixieren ein  $\varepsilon > 0$  und betrachten die offene Kugel

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

um  $x$  mit dem Radius  $\varepsilon$ . Für eine gegen  $x$  konvergierende Folge  $x_k$  liegen alle  $x_k$  mit  $k \geq N(\varepsilon)$  innerhalb von  $B_\varepsilon(x)$ . Dies sind fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder der Folge, insbesondere immer unendlich viele. Dass immer nur endlich viele außerhalb einer beliebigen offenen  $\varepsilon$ -Kugel, also in  $X \setminus B_\varepsilon(x)$  liegen können, soll die folgende Graphik veranschaulichen:



Die Folgenglieder sammeln sich immer mehr in der Nähe von  $x$ . Egal wie klein  $\varepsilon$  wird, alle bis auf höchstens endlich viele Folgenglieder haben einen Abstand zu  $x$ , der kleiner als  $\varepsilon$  ist.

Nun nennen wir eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  **beschränkt**, wenn es  $y \in X$  und ein  $C \in K$  gibt, so daß für alle  $n$  gilt  $d(x_n, y) \leq C$ . Diesen Begriff wollen wir im Folgenden mit den bekannten Begriffen der Cauchyfolge und der konvergenten Folge verknüpfen:

**Lemma 1.13.** *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

**Beweis.** Zunächst beweisen wir die erste Aussage. Gegeben sei eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit ihrem Grenzwert  $x \in X$ . Dann ist  $d(x_n, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$  für alle  $n \geq N := N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ . Aus der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m)$$

folgt dann  $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$ , also  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ , für alle  $n, m \geq N$ . Somit ist  $(x_n)$  eine Cauchyfolge.

Kommen wir nun zum zweiten Teil. Im Falle  $\varepsilon = 1$  gilt  $d(x_n, x_m) < 1$  für  $n, m \geq N$  nach der Cauchy-eigenschaft. Setze nun  $y := x_N$ . Dann ist

$$d(x_n, y) = d(x_n, x_N) < 1$$

für alle  $n \geq N$ . Also ist  $d(x_n, y) \leq C$  für  $C = \max(d(x_0, y), \dots, d(x_{N-1}, y), 1)$ . □

**Lemma 1.14.** *(Eindeutigkeit des Grenzwertes) Sei  $x_0, x_1, \dots$  eine Folge in  $(X, d)$ , welche gegen  $x \in X$  und  $y \in X$  konvergiert. Dann ist  $x = y$ .*

**Beweis.** Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wäre  $d(x, y) > 0$ , dann existiert wegen der Konvergenz der Folge  $x_n$  für  $\varepsilon = d(x, y)$  ein  $N = N(\frac{1}{2}\varepsilon)$  aus  $\mathbb{N}_0$  so daß  $d(x_n, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$  gilt für  $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ . Analog existiert ein  $M = M(\frac{1}{2}\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $d(x_n, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $n \geq M$ . Aufgrund der Dreiecksungleichung  $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$  und der Symmetrie  $d(x, x_n) = d(x_n, x)$  folgt für alle  $n \geq \max(N, M)$  dann

$$d(x, y) < \varepsilon .$$

Wir erhalten einen Widerspruch zu der Annahme  $\varepsilon = d(x, y)$ . Es folgt  $x = y$ .  $\square$

Dieses Lemma rechtfertigt es von dem Grenzwert einer Folge zu sprechen. Daß eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen einen Grenzwert  $x \in X$  konvergiert, wird häufig durch folgende Schreibweisen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

oder

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$$

angedeutet. Bei letzterer Schreibweise wird der Ausdruck  $n \rightarrow \infty$  teilweise auch über den Pfeil geschrieben oder ganz weggelassen.

Eine *Teilfolge* einer gegebenen Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Auswahl  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die ihrerseits auch wiederum eine Folge ist und deren Glieder allesamt auch in dieser Reihenfolge (jedoch mit beliebig großen Lücken dazwischen) Glieder der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind. Wir fordern dabei, daß  $k \mapsto n_k$  eine Injektion  $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$  ist. Zum Beispiel ist die Folge

$$x_0, x_2, x_4, x_6, \dots$$

eine Teilfolge einer Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , bei der jedes zweite Glied (immer genau die mit ungeradem Index) herausgenommen wurde. Diesen Begriff werden wir in Kürze (Satz 1.26) mit dem Begriff einer beschränkten Folge verknüpfen. Nicht jede beschränkte Folge ist konvergent. So hat beispielsweise die Folge  $x_n = (-1)^n$  keinen Grenzwert, ist aber beschränkt.

## 1.5 Die geometrische Reihe

**Lemma 1.15.** *In einem archimedischen Körper  $K$  konvergiert im Fall  $|q| < 1$  jede geometrische Folge  $x_n = C \cdot q^n$  gegen Null.*

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Nach Annahme gilt  $|q| < 1$  und damit  $|q|^{-1} > 1$ . Somit gilt  $|q|^{-1} = 1 + x$  für ein  $x > 0$ . Die Ungleichung  $d(C \cdot q^n, 0) < \varepsilon$  ist dann äquivalent zu

$$C/\varepsilon < (1 + x)^n .$$

Man zeigt nun leicht die Bernoulli Ungleichung  $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$  mittels Induktion nach  $n$ . Im Fall  $n = 0$  und  $n = 1$  ist dies trivialerweise richtig. Ist  $n \geq 1$ , dann ist  $(1 + x)^n$  größer als  $1 + n \cdot x$ , wie die Induktionsannahme  $(1 + x)^{n-1} \geq 1 + (n-1) \cdot x$  zeigt:

$$(1 + x) \cdot (1 + x)^{n-1} \geq (1 + x) \cdot (1 + (n-1) \cdot x) = 1 + n \cdot x + (n-1) \cdot x^2 \geq 1 + n \cdot x .$$

## 1 Der Konvergenzbegriff

Das Archimedische Axiom garantiert die Existenz einer natürlichen Zahl  $N > (C/\varepsilon - 1)/x$ . Für alle  $n \geq N$  gilt dann

$$C/\varepsilon < 1 + n \cdot x.$$

Daraus folgt wegen  $1 + n \cdot x \leq (1 + x)^n$  das Lemma.  $\square$

Dies hat die folgende Konsequenz: Die *geometrische Reihe*  $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$  konvergiert für  $|q| < 1$  und hat in diesem Falle den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1}{1-q}.$$

Dies folgt aus der verallgemeinerten Binomialformel

$$(1 - q) \cdot (1 + q + \dots + q^n) = 1 - q^{n+1},$$

die man leicht durch Induktion nach  $n$  beweist. Diese Formel zeigt  $s_n - \frac{1}{1-q} = \frac{-q^{n+1}}{1-q}$ . Also

$$d\left(s_n, \frac{1}{1-q}\right) = C \cdot |q|^n$$

für  $C = |q/(1-q)|$ . Aus dem letzten Lemma folgt daher  $d(s_n, \frac{1}{1-q}) < \varepsilon$  für  $n \geq N(\varepsilon)$ . Das zeigt die Behauptung. Analog zeigt man

**Lemma 1.16.** *In einem archimedischen Körper  $K$  konvergiert im Fall  $|q| < 1$  die geometrische Reihe  $s_n = \sum_{i=0}^n c \cdot q^i$  gegen den Grenzwert  $\frac{c}{1-q}$ .*

## 1.6 Vollständige metrische Räume

**Definition 1.17.** *Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in  $(X, d)$  konvergiert.*

**Definition 1.18.** *Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge aus  $(X, d)$  eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Ein folgenkompakter metrischer Raum ist automatisch vollständig, denn eine Cauchyfolge  $x_n$  konvergiert gegen  $x$  genau dann wenn eine Teilfolge der Cauchyfolge gegen  $x$  konvergiert. [Benutze  $d(x, x_m) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_m)$  für  $m \geq n$  und geeignete  $x_n$  aus der Teilfolge.]

**Definition 1.19.** *Eine Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  heißt **abgeschlossen**, wenn gilt: Für jede in  $(X, d)$  konvergente Folge  $x_n \in A$  mit Grenzwert  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X$  gilt  $x \in A$ . Der Abschluß  $\bar{A}$  einer Menge  $A \subseteq X$  ist die kleinste abgeschlossene Menge in  $X$ , welche  $A$  enthält (d.h. der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen  $Y$  mit  $A \subseteq Y \subseteq X$ ).*

**Beispiel 1.20.** Die Intervalle  $[a, b]$ , oder auch  $[a, \infty) = \{x \in K \mid x \geq a\}$  oder  $(-\infty, a] = \{x \in K \mid x \leq a\}$ , sind abgeschlossene Teilmengen in  $K$ .

**Beweis.** Wir zeigen pars pro toto, daß für eine Folge  $x_0, x_1, \dots$  von Zahlen in  $K$  mit dem Grenzwert  $x$  gilt: Aus  $x_n \geq a$  für  $n = 0, 1, \dots$  folgt auch  $x \geq a$ . Dies sieht man wie folgt: Wäre  $x < a$ , dann gilt  $d(x_n, x) < \varepsilon$  für fast alle  $n$  bei Wahl von  $\varepsilon := a - x > 0$ . Andererseits gilt dann aber auch

$$d(x_n, x) = x_n - x = \underbrace{x_n - a}_{\geq 0} + \underbrace{a - x}_{=\varepsilon} \geq \varepsilon$$

für alle  $n$ , und wir erhalten einen Widerspruch.  $\square$

Analog sind Quader der Gestalt  $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_r, b_r]$  abgeschlossene Teilmengen des Euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^r$ .

**Satz 1.21.** Jede abgeschlossene Teilmenge  $A$  eines vollständigen metrischen Raumes  $(X, d_X)$  versehen mit der eingeschränkten Metrik ist ein vollständiger metrischer Raum  $(A, d_X)$ .

**Beweis.** Sei  $x_n$  eine Cauchyfolge in  $(A, d)$ . Dann ist per Definition  $x_n$  eine Cauchyfolge in  $(X, d_X)$ . Nach Annahme existiert also  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  in  $(X, d_X)$ . Weil  $A$  abgeschlossen ist, gilt  $x \in A$ . Also ist per definitionem  $x \in A$  der Grenzwert von  $x_n$  in  $(A, d_X)$ .  $\square$

**Satz 1.22.** Jede folgenkompakte Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes  $(X, d_X)$  ist beschränkt und abgeschlossen in  $(X, d_X)$ .

**Beweis.** Wäre  $A$  nicht beschränkt, gäbe es eine Folge  $x_1, x_2, \dots$ , aus  $A$  mit  $d_X(\xi_0, x_n) \geq n$ . Für jede Teilfolge  $\tilde{x}_n$  einer solchen Folge gilt erst recht  $d_X(\xi_0, \tilde{x}_n) \geq n$ . Somit besäße  $x_n$  keine konvergente (und damit beschränkte) Teilfolge. Ein Widerspruch zur Folgenkompaktheit von  $A$ !

Um zu zeigen, daß  $A$  abgeschlossen ist, betrachten wir eine beliebige Folge  $x_n$  aus  $A$  mit Grenzwert  $x$  in  $(X, d_X)$ . Jede Teilfolge  $\tilde{x}_n$  der Folge  $x_n$  konvergiert gegen den Grenzwert  $x$  in  $(X, d_X)$ . Nach Annahme ist  $(A, d_X)$  folgenkompakt. Somit existiert eine konvergente Teilfolge  $\tilde{x}_n$  der Folge  $x_n$  mit einem Grenzwert  $a$  in  $A$ . Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes (Lemma 1.14) folgt  $x = a$ . Somit ist  $x \in A$ , d.h.  $A$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $(X, d_X)$ .  $\square$

## 1.7 Der Banachsche Fixpunktsatz

**Satz 1.23.** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $F: X \rightarrow X$  eine **kontraktive** Abbildung eines metrischen Raumes  $(X, d)$  in sich, d. h. es gebe eine reelle Konstante  $0 < \kappa < 1$  mit

$$d(F(x), F(y)) \leq \kappa \cdot d(x, y)$$

## 1 Der Konvergenzbegriff

für alle  $x, y \in X$ . Dann besitzt die Abbildung  $F$  einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $x \in X$ , d. h. einen eindeutig bestimmten Punkt  $x$  mit der Eigenschaft

$$\boxed{F(x) = x}.$$

**Beweis.** Wir müssen die Existenz und die Eindeutigkeit des Fixpunktes  $x \in X$  zeigen. Wir wollen mit der Eindeutigkeit beginnen. Seien  $x$  und  $\xi$  Fixpunkte von  $F$ . Aus der Kontraktivität  $d(F(x), F(\xi)) \leq \kappa \cdot d(x, \xi)$  und der Fixpunkteigenschaft  $F(x) = x, F(\xi) = \xi$  folgt

$$d(x, \xi) \leq \kappa \cdot d(x, \xi).$$

Wäre  $x \neq \xi$ , könnte man durch  $d(x, \xi) > 0$  teilen und erhielte den Widerspruch  $1 \leq \kappa$ .

Nun zeigen wir die Existenz. Wähle hierzu ein beliebiges  $x_0 \in X$  und setze  $x_1 = F(x_0), x_2 = F(x_1), \dots, x_n = F^n(x_0)$  als Folge in  $(X, d)$ . Diese Folge ist beschränkt, denn

$$\begin{aligned} d(x_0, x_n) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &= d(x_0, x_1) + d(F(x_0), F(x_1)) + \dots + d(F^{n-1}(x_0), F^{n-1}(x_1)) \\ &\leq d(x_0, x_1) + \kappa d(x_0, x_1) + \dots + \kappa^{n-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \kappa} = C. \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, daß  $x_n$  eine Cauchyfolge ist. Sei hierzu oBdA  $m \geq n$ . Dann ist

$$d(x_n, x_m) = d(\underbrace{F^n(x_0)}_{=x_n}, \underbrace{F^n(x_{m-n})}_{=x_m}) \leq \kappa^n \underbrace{d(x_0, x_{m-n})}_{\leq C} \leq \kappa^n C.$$

Da  $\kappa^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , folgt daraus wie behauptet  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  falls  $m \geq n \geq N(\varepsilon)$ . Die Cauchyfolge  $x_n$  konvergiert gegen einen Grenzwert  $x \in X$ , denn nach Annahme ist  $(X, d)$  vollständig. Es bleibt die Fixpunkteigenschaft von  $x$  zu zeigen. Hierzu stellen wir fest

$$\begin{aligned} d(x, F(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, F(x)) \leq d(x, x_n) + \kappa d(x_{n-1}, x) \\ &\leq d(x, x_n) + d(x, x_{n-1}) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

für  $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ , resp.  $n - 1 \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ . Ein solches  $n \in \mathbb{N}$  existiert natürlich. Also gilt  $d(x, F(x)) < \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Mit anderen Worten: Es gilt  $d(x, F(x)) = 0$  bzw.  $F(x) = x$ .  $\square$

**Eine Anwendung.** Sei  $0 \leq \eta \leq 1/4$  gegeben in einem vollständigen archimedischen Körper  $K$ . Wähle ein  $\varepsilon$  in  $K$  mit  $0 < \varepsilon \leq \eta$ . Dann ist

$$X = \left[ 0, \frac{1}{2} - \varepsilon \right]$$

abgeschlossen im metrischen Raum  $(K, d)$ . Versehen mit der Metrik  $d(x, y) = |x - y|$  von  $(K, d)$  ist  $(X, d)$  daher vollständig. Die Abbildung

$$F(x) = x^2 + \frac{1}{4} - \eta$$

ist kontraktiv auf  $X$ ; beachte  $d(F(x), F(y)) = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot d(x, y) \leq \kappa \cdot d(x, y)$  mit  $|x + y| \leq \kappa := 2(\frac{1}{2} - \varepsilon) < 1$ . Weiterhin gilt  $F(x) \geq 0$  und  $F$  ist monoton auf  $[0, \frac{1}{2} - \varepsilon]$  mit  $F(\frac{1}{2} - \varepsilon) = \frac{1}{2} - \varepsilon - (\eta - \varepsilon^2) \leq \frac{1}{2} - \varepsilon$ , denn  $0 < \varepsilon < 1$  impliziert  $\varepsilon^2 \leq \varepsilon \leq \eta$ . Folglich ist

$$F: X \rightarrow X$$

wohldefiniert wegen  $F(X) = F([0, \frac{1}{2} - \varepsilon]) \subseteq X$ . Dies zeigt

**Lemma 1.24.** *Ein vollständiger archimedischer Körper ist pythagoräisch.*

**Beweis.** Nach der Bemerkung auf Seite 3 genügt es zu zeigen: Jedes  $\eta \in [0, \frac{1}{4}]$  ist ein Quadrat in  $K$ . Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die Existenz eines Fixpunktes  $x \in X$  von  $F$ . Aus  $F(x) = x \implies (x - \frac{1}{2})^2 = \eta$  folgt dann  $\eta = \xi^2$  für  $\xi = x - \frac{1}{2} \in K$ .  $\square$

## 1.8 Quaderschachtelung

Sei  $K$  ein pythagoräischer Körper. Im Euklidischen Standardraum  $K^r$  der Dimension  $r$  gelten die **Schachtelungs-Ungleichungen**

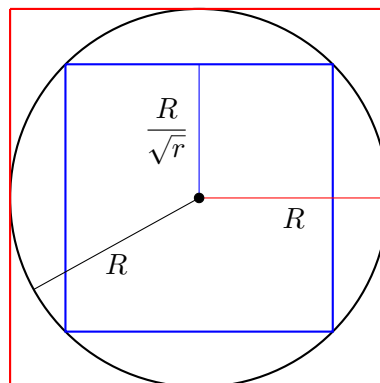
$$\max_{i=1, \dots, r} |x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{r} \cdot \max_{i=1, \dots, r} |x_i|$$

für einen Vektor  $x = (x_1, \dots, x_r) \in K^r$ . Beachte:  $\max_{i=1, \dots, r} |x_i|$  definiert auch eine Norm auf  $K^r$ , die sogenannte **Quadernorm**. Die Formel läßt sich durch Quadrieren beweisen, denn

$$\max_{i=1, \dots, r} |x_i|^2 \leq |x_1|^2 + \dots + |x_r|^2 \leq r \cdot \max_{i=1, \dots, r} |x_i|^2$$

gilt aus offensichtlichen Gründen.

Was bedeutet dies anschaulich? Die Norm  $\|\cdot\|$  gibt den Abstand eines Punktes von Null an. Wir betrachten die „Kugel“ aller Punkte mit Abstand kleinergleich  $R$  vom Ursprung. Diese Kugel  $B$  liegt in einem Quader mit der Seitenlänge  $2R$ . Umgekehrt liegt der Quader mit der Seitenlänge  $\sqrt{r}^{-1} \cdot 2R$  in der Kugel  $B$



## 1 Der Konvergenzbegriff

Sei nun

$$Q = [c, d]^r = \underbrace{[c, d] \times \cdots \times [c, d]}_{r \text{ mal}}$$

ein würfelförmiger Quader im  $K^r$  mit der Seitenlänge  $l(Q) = |d - c|$ .

**Lemma 1.25.** Für beliebige Punkte  $\xi, \eta$  aus einem Quader  $Q$  mit den Seitenlängen  $l(Q)$  gilt

$$d(\xi, \eta) \leq l(Q)\sqrt{r}.$$

**Beweis.** Durch Verschieben des Quaders kann man o. B. d. A. annehmen  $\eta = 0$ . Dann gilt  $d(\xi, \eta) = \|\xi\| \leq \sqrt{r} \cdot \max_{i=1, \dots, r} |\xi_i|$  und es genügt zu zeigen  $|\xi_i| \leq |d - c|$ . Wegen  $c \leq \xi_i \leq d$  und  $c \leq 0 \leq d$  folgt aber  $|\xi_i| \leq \max(d, -c) \leq d - c = |d - c|$ .  $\square$

**Satz 1.26 (Bolzano-Weierstraß).** Jede beschränkte Folge im Euklidischen Raum  $(K^r, \|\cdot\|)$  besitzt eine Teilfolge, die eine Cauchyfolge ist.

**Beweis.** Ist die Folge  $x_0, x_1, \dots$  beschränkt in  $K^r$ , so liegt sie in einer Kugel und damit auf Grund der Schachtelungsungleichungen in einem geeigneten Quader

$$Q = [a, b]^r = \underbrace{[a, b] \times \cdots \times [a, b]}_{r \text{ mal}}$$

Hierbei ist  $[a, b] = \{x \in K \mid a \leq x \leq b\}$  ein geeignetes Intervall in  $K$ . Man teilt nun den Quader in  $2^r$  Teilquader, indem man jedes der Intervalle  $[a, b]$  in zwei gleich lange Teile unterteilt. In mindestens einem der Teilquader müssen unendlich viele Folgenglieder sein. Dies liefert eine Teilfolge  $x_{1,0}, x_{1,1}, x_{1,2}, \dots$ , die vollständig in einem der Teilquader liegt. Dieses Verfahren setzt man iterativ fort und erhält eine absteigende Folge von Quadern:

$$Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \cdots$$

Hierbei ist  $Q = Q_0$ .

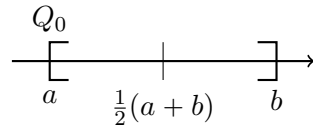
In  $k$ -ten Quader  $Q_k$  liegt dann vollständig enthalten die Teilfolge  $x_{k,0}, x_{k,1}, x_{k,2}, \dots$  der Folge  $x_{k-1,0}, x_{k-1,1}, x_{k-1,2}, \dots$  usw.

Diese Folgen ordnet man nun in einer Tabelle an:

$$\begin{array}{cccc} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & \cdots \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

**Diagonalfolgentrick.** Man bildet jetzt die Diagonalfolge  $\xi_k := x_{k,k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und betrachtet die dadurch neu entstandene Folge  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ . Dies ist eine Teilfolge der ursprünglichen Folge  $x_0, x_1, \dots$ , und es gilt  $\xi_i \in Q_n$  für alle  $i \geq n$ . Aus  $i, j \geq n$  folgt daher  $\xi_i, \xi_j \in Q_n$ .

Die Seitenlänge der Quader  $Q_n$  halbiert sich mit jeder Unterteilung. Wir zeigen dies oBdA im Fall  $n = 0$ . Es gilt  $l(Q_0) = |b - a|$ .



Wie in der Zeichnung angedeutet sei  $Q_1$  eine der beiden Teilhälften von  $Q_0$ . Wegen

$$l(Q_0) = \begin{cases} |b - \frac{a+b}{2}| = |b - a|/2, & \text{falls } Q_1 = [\frac{a+b}{2}, b] \\ |\frac{a+b}{2} - a| = |b - a|/2, & \text{falls } Q_1 = [a, \frac{a+b}{2}] \end{cases}$$

ist die Länge von  $Q_1$  in beiden möglichen Fällen  $l(Q_1) = l(Q_0)/2$ , halbiert sich also bei der Teilung. Durch Induktion folgt daher  $l(Q_n) = 2^{-n} \cdot l(Q_0) = 2^{-n} \cdot |b - a|$ .

Aus Lemma 1.25 folgt für beliebige Punkte  $\xi_i, \xi_j \in Q_n$  dann mit der Konstante  $C = |b - a|\sqrt{r}$  die Ungleichung  $d(\xi_i, \xi_j) \leq \frac{C}{2^n}$ . Wir erstellen ein vorläufiges Resümee: Wir haben eine Teilfolge  $\xi_0, \xi_1, \dots$  der gegebenen Folge  $x_0, x_1, \dots$  konstruiert, so daß für eine feste positive Konstante  $C$  in  $K$  gilt

$$d(\xi_i, \xi_j) \leq \frac{C}{2^n},$$

für alle  $i, j \geq n$ . Wir wollen daraus ableiten, daß  $\xi_i$  eine Cauchyfolge ist. Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  müssen wir zeigen, daß ein  $N = N(\varepsilon)$  existiert mit

$$d(\xi_i, \xi_j) < \varepsilon$$

für  $i, j \geq N(\varepsilon)$ . Dazu genügt es  $N \in \mathbb{N}$  wählen zu können mit

$$\frac{C}{2^n} < \varepsilon$$

für alle  $n \geq N$ . Die Existenz einer solchen Zahl  $N \in \mathbb{N}$  folgt aus dem Lemma 1.15 für die Wahl  $q = 1/2$ .  $\square$

**Satz 1.27.** *In einem pythagoräischen Körper ist jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge eine Cauchyfolge. Dies gilt ebenso für jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge.*

**Beweis.** Wir betrachten nur den Fall der monoton wachsenden, nach oben durch eine Konstante  $C$  beschränkten Folgen. Der umgekehrte Fall ist völlig analog. Aus der Monotonie

$$x_n \leq x_{n+1}$$

der Folge folgt  $x_n \in [x_0, C]$  für alle  $n$ . Also ist die Folge  $x_n$  beschränkt, und nach Satz 1.26 existiert damit eine Teilfolge  $\tilde{x}_n$  der Folge, welche eine Cauchyfolge ist. D.h. für beliebiges  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\tilde{N}(\varepsilon)$  mit

$$d(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \tilde{x}_i - \tilde{x}_j < \varepsilon, \quad \forall i, j \geq \tilde{N}(\varepsilon)$$

## 1 Der Konvergenzbegriff

wobei hier stillschweigend  $i \geq j$  angenommen werden kann. Wähle nun  $N = N(\varepsilon) \geq \tilde{N}(\varepsilon)$  so groß, daß für alle  $j \geq N = N(\varepsilon)$  gilt

$$x_j \leq \tilde{x}_{\tilde{N}(\varepsilon)} \quad \text{und damit} \quad -\tilde{x}_{\tilde{N}(\varepsilon)} \leq -x_j.$$

Die Existenz einer solchen Zahl  $N$  folgt aus der Monotonie der Folge  $x_j$  und der Tatsache, daß  $\tilde{x}_i$  eine Teilfolge der Folge  $x_i$  ist. Dies impliziert natürlich auch für beliebiges  $i$

$$x_i \leq \tilde{x}_i.$$

Für  $i \geq j \geq N(\varepsilon)$  gilt daher nach Wahl von  $N(\varepsilon)$  und wegen der Cauchyfolgeneigenschaft der Teilfolge  $\tilde{x}_i$

$$d(x_i, x_j) = x_i - x_j \leq \tilde{x}_i - \tilde{x}_{\tilde{N}(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

□

## 1.9 Reelle Zahlen

Konvergente Folgen sind immer Cauchyfolgen, wie wir gesehen haben, aber nicht jede Cauchyfolge ist konvergent. Beispielsweise ist  $\mathbb{Q}$  ein archimedischer Körper, der aber nicht vollständig ist.

Das ist jetzt der Zeitpunkt, an dem wir permanent zu den reellen Zahlen übergehen wollen.

**Definition 1.28.** Wir fixieren ein für alle mal einen archimedischen vollständigen Körper<sup>1</sup> und nennen ihn den **Körper der reellen Zahlen**. Wir bezeichnen diesen Körper mit  $\mathbb{R}$ . Folgen in  $\mathbb{R}$  nennen wir **reelle Folgen**.

Als vollständiger archimedischer Körper ist  $\mathbb{R}$  pythagoräisch. Da  $\mathbb{R}$  per Definition vollständig ist, sind in  $\mathbb{R}$  also die Begriffe der Cauchyfolge und der konvergenten Folge äquivalent. Solche Folgen sind immer beschränkt und haben einen eindeutig bestimmten Grenzwert. Liegt die Folge in einem abgeschlossenen Intervall  $I$ , so ist auch ihr Grenzwert in  $I$  enthalten. Weiterhin enthält jede reelle beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge und jede monotone beschränkte Folge konvergiert. Zuletzt besitzt noch jede nach oben beschränkte Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{R}$  eine kleinste obere Schranke  $\sup(X)$ . Für den Beweis der letzten Aussage sei auf den nächsten Abschnitt verwiesen. Aus den Sätzen Satz 1.22, Satz 1.21 und Satz 1.26 folgt schliesslich die fundamentale Aussage

**Satz 1.29.** Eine Teilmenge  $A$  des Euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^r$  ist folgenkompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Wir wollen nun die Darstellung reeller Zahlen durch Dezimalbrüche betrachten. Nach dem Archimedischen Axiom ist jede nicht negative reelle Zahl  $y$  kleiner als eine geeignete natürliche

<sup>1</sup>Die Existenz eines solchen Körpers kann man aus den Peano Axiomen für die natürlichen Zahlen ableiten.

Zahl  $n$ . Da nur endlich viele natürliche Zahlen vor  $n$  liegen, kann man obdA  $n - 1 \leq y < n$  annehmen. Dann liegt  $x = y - (n - 1)$  im Intervall  $I_0 = [0, 1)$ . Teilt man  $I_0$  in 10 Teilintervalle, folgt analog

$$x \in I_1 = \left[ \frac{a_0}{10}, \frac{a_0 + 1}{10} \right)$$

für ein  $a_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Unterteilt man  $I_1$  wieder in 10 Teilintervalle und fährt so fort, erhält man eine Approximation von  $x$  durch Zahlen

$$x_n := \frac{a_0}{10} + \frac{a_1}{100} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^n}$$

mit  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$  und

$$x_n \leq x \leq x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Daraus folgt  $d(x, x_n) \leq \frac{1}{10^n}$ , die Folge der  $x_n$  konvergiert also gegen die gegebene Zahl  $x$  (Lemma 1.15). Man nennt dies die **Dezimalbruchentwicklung** von  $x$  und schreibt (bekanntlich)

$$x \text{ „}=\text{“ } 0, \overline{a_0} a_1 a_2 \dots$$

Umgekehrt definiert jede solche Dezimalbruchentwicklung eine reelle Zahl im Intervall  $[0, 1]$ , denn die dadurch definierte Folge rationaler Zahlen

$$x_n := \frac{a_0}{10} + \frac{a_1}{100} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^n}$$

ist monoton wachsend

$$x_n \leq x_{n+1}.$$

Es gilt  $x_n \in [0, 1]$ , denn  $x_n \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots + \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 1 - 10^{-n} \leq 1$ . Da die Folge  $x_n$  monoton wachsend und nach oben beschränkt ist (hier durch 1), konvergiert sie nach Satz 1.27 und ihr Grenzwert  $x$  liegt im Intervall  $I = [0, 1]$ . Beachte  $x \in [0, 1)$  außer im Fall  $0,9999\dots$

## 1.10 Infimum und Supremum

**Definition 1.30.** Sei  $X \subseteq \mathbb{R}$  eine nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge. Man nennt

$$Y := \{y \in \mathbb{R} \mid x \leq y \text{ für alle } x \in X\}$$

die Menge der **oberen Schranken** von  $X$ . Analog ist im Falle einer nach unten beschränkten Menge die Menge ihrer **unteren Schranken** definiert.

Es bezeichne  $Y^c := \mathbb{R} \setminus Y$  das Komplement einer Teilmenge  $Y$  von  $\mathbb{R}$ .

## 1 Der Konvergenzbegriff

**Bemerkung 1.31.** Für die Menge  $Y$  der oberen Schranken einer nach oben beschränkten nicht leeren Menge  $X \subseteq \mathbb{R}$  gelten folgende Eigenschaften:

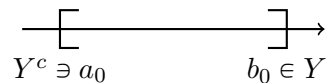
(1)  $Y \neq \emptyset$

(2)  $Y$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ .

(3) Für  $\xi \in Y^c$  gilt  $\xi \leq y$  für alle  $y \in Y$ . Insbesondere gilt für konvergente Folgen  $a_n \in Y^c$  mit Limes  $a$  daher  $a \leq y$  für alle  $y \in Y$  (denn  $(-\infty, y]$  ist abgeschlossen).

**Beweis.** (1) gilt nach Annahme. Zum Beweis von (2) sei eine Folge  $y_n \in Y$  gegeben mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Für  $x \in X$  gilt  $x \leq y_n$ , d.h.  $y_n \in [x, \infty)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Folglich ist  $y \in [x, \infty)$  und damit  $y \in Y$ , denn  $x \leq y$  gilt für alle  $x \in X$ . (3)  $\xi \in Y^c$  bedeutet  $\xi \notin Y$ . Daraus folgt nach Definition von  $Y$ , daß es ein  $x \in X$  gibt mit  $\xi < x$ . Ebenfalls nach Definition von  $Y$  gilt aber  $x \leq y$  für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$ . Es folgt  $\xi < x \leq y$  und damit  $\xi \leq y$  für  $y \in Y$ .  $\square$

Wähle ein  $a_0 \notin Y$  und ein  $b_0 \in Y$ . Ein solches  $b_0$  existiert nach (1) und  $a_0$  existiert wegen  $X \neq \emptyset$  (z. B.  $a_0 = x - 1$  für ein  $x \in X$ ):



Setze nun durch Halbieren des Intervalls  $\xi := \frac{a_0 + b_0}{2}$



und führe eine Fallunterscheidung durch: Im Falle  $\xi \in Y$  setze  $b_1 := \xi$  und  $a_1 := a_0$ , im Fall  $\xi \in Y^c$  setze  $a_1 := \xi$  und  $b_1 := b_0$ . Iteriert man dies für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so erhält man

$$Y^c \ni a_n \leq b_n \in Y$$

und nach Konstruktion gilt

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0.$$

Somit ist  $a_0, a_1, \dots$  eine monoton steigende, nach oben beschränkte Folge und analog  $b_0, b_1, \dots$  eine monoton fallende nach unten beschränkte Folge. Beide Folgen konvergieren also nach Satz 1.27. Setzt man  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , dann gilt

$$a_0 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a \leq b \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_0.$$

[Es gilt  $a_j < b_k$  für alle  $j, k \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt  $a \leq b_k$  für alle  $k$ , und im Limes  $k \rightarrow \infty$  schliesslich  $a \leq b$ .] Wir behaupten nun  $a = b$ . Zum Beweis fixieren wir ein  $\varepsilon > 0$ . Es gilt dann

$$0 \leq b - a \leq \underbrace{|b - b_n|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|b_n - a_n|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} < \varepsilon$$

für  $n \geq N(\varepsilon)$ . Dies folgt aus den Konvergenzaussagen  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ ,  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$  sowie  $|b_n - a_n| = 2^{-n}|b_0 - a_0| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , wie im Beweis von Satz 1.26. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt werden kann, folgt daraus  $a = b$ .

Auf Grund der obigen Intervall Schachtelungen gilt weiterhin

$$(4) \quad a \leq y \text{ für alle } y \in Y,$$

denn  $a_n \in Y^c$  impliziert  $a_n \leq y$  für alle  $y \in Y$  und somit  $a \leq y$  nach (3). Aus (2) folgt wegen  $b_n \in Y$  dann

$$(5) \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in Y.$$

Damit ist  $a = b$  die kleinste obere Schranke von  $X$  nach (4) und (5). Dies zeigt

**Satz 1.32.** *Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{R}$  besitzt eine kleinste obere Schranke. Diese nennt man das **Supremum**  $\sup(X)$  der Menge  $X$ .*

Für die Punkte  $a_n$  gilt nach Konstruktion  $a_n < a$ , und daher wegen  $a = \sup(X)$  also  $a_n \notin Y$ . Da  $a_n$  somit keine obere Schranke von  $X$  ist, gibt es ein  $x_n \in X$  mit  $a_n \leq x_n$ . Aus der Ungleichung  $a_n \leq x_n \leq a = \sup(X)$  folgt wegen  $a_n \rightarrow a$  dann recht einfach  $x_n \rightarrow a$ . Also

**Zusatz.** *Es gibt eine Folge in  $X$ , welche gegen  $a = \sup(X)$  konvergiert.*

Oft wird das Supremum formal auch für den Fall einer nach oben unbeschränkten Menge definiert. In diesem Falle schreibt man

$$\sup(X) = +\infty$$

für den Fall, daß die Menge  $X$  nach oben nicht beschränkt ist.

Völlig analog zum Supremum einer nach oben beschränkten Menge, existiert das **Infimum** einer nach unten beschränkten Menge  $\inf(X) = -\sup(-X)$ .

**Satz 1.33.** *Jede nach unten beschränkte nichtleere Menge  $X \subseteq \mathbb{R}$  besitzt ein Infimum  $\inf(X)$ , eine größte untere Schranke von  $X$ .*

Sei nun  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$  eine beliebige monoton steigende Folge reeller Zahlen. Dann ist entweder  $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  nach oben beschränkt und die Folge  $x_n$  konvergiert monoton gegen  $\sup(X) \in \mathbb{R}$ . Oder die Menge  $X$  ist nicht nach oben beschränkt und  $\sup(X) = +\infty$ . In diesem Fall konvergiert die Folge gegen  $+\infty$  in folgendem Sinn: *Für alle  $C > 0$  existiert ein  $N = N(C)$  so daß für alle  $n \geq N$  gilt  $x_n > C$ .*

**Prinzip der monotonen Konvergenz.** Diese Betrachtungen kann man wie folgt zusammen fassen. Für  $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  gilt: *Jede (!) monoton steigende Folge  $x_n$  mit Werten in  $\mathbb{R}^+$  besitzt einen Grenzwert  $x$  in  $\mathbb{R}^+$  im obigen Sinne.* Wir schreiben auch

$$x_n \nearrow x$$

oder benutzen häufig die Schreibweise  $x = \sup_n x_n = \sup x_n$  für den Grenzwert in diesem erweiterten Sinn. Analog existiert immer ein Grenzwert  $\inf x_n$  in  $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  für eine monoton fallende Folge  $x_n \in \mathbb{R}^-$ .



## 2 Stetige Abbildungen

### 2.1 Stetigkeit

**Definition 2.1.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Abbildung

$$f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$$

heißt **stetig**, wenn für jede Folge  $x_n$  in  $X$  gilt:

$$\boxed{x_n \rightarrow \xi \implies f(x_n) \rightarrow f(\xi)} .$$

Anders formuliert:  $f$  führt konvergente Folgen in konvergente Folgen über und vertauscht mit Limesbildung, d.h.

$$\boxed{f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)} .$$

Ein Spezialfall. Gibt es für  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  eine feste Konstante  $C > 0$  mit

$$d_Y(f(x), f(\xi)) \leq C \cdot d_X(x, \xi) \quad , \quad \forall x, \xi \in X ,$$

nennt man  $f$  **Lipschitz-stetig** und  $C$  nennt man **Lipschitz-Konstante**. Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist stetig, denn für  $x_n \rightarrow \xi$  gilt  $d_X(x_n, \xi) < \varepsilon/C$  für genügend großes  $n$  und damit  $d_Y(f(x_n), f(\xi)) < \varepsilon$ . Jede kontraktive Abbildung ist Lipschitz-stetig für  $C = \kappa < 1$ . Weitere Beispiele für Lipschitz-stetige Abbildungen sind:

**Beispiel 2.2.** (1) Die identische Abbildung  $\text{id}_X: (X, d_X) \rightarrow (X, d_X)$ , also  $\text{id}_X(x) = x$  mit der Lipschitz-Konstante  $C = 1$ .

(2) Die konstante Funktion  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  definiert durch  $f(x) = y_0$  für einen festen Punkt  $y_0 \in Y$ . Hier kann  $C > 0$  beliebig gewählt werden.

(3) Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum und  $\emptyset \neq A \subseteq X$  eine abgeschlossene Teilmenge. Sei  $f(x) = d(x, A) := \inf_{a \in A} (d(x, a))$  die **Abstandsfunktion**  $f: (X, d_X) \rightarrow Y = \mathbb{R}$  zu  $A$ . Beachte  $d(x, A) = 0 \iff x \in A$ , da  $A$  abgeschlossen ist. Es gilt  $d_Y(f(x), f(\xi)) \leq C \cdot d_X(x, \xi)$  für  $C = 1$ . [Für  $\xi \in X$  und reelles  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $a \in A$  mit  $d(\xi, a) < d(\xi, A) + \varepsilon$ . Für alle  $x \in X$  gilt  $d(x, A) \leq d(x, a)$ , also  $f(x) - f(\xi) \leq d_X(x, a) - d_X(\xi, a) + \varepsilon \leq d_X(x, \xi) + \varepsilon$ . Aus der Symmetrie in  $x, \xi$  folgt  $d_Y(f(x), f(\xi)) = |f(x) - f(\xi)| \leq d_X(x, \xi) + \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$  und damit die Behauptung.]

## 2 Stetige Abbildungen

(4) Jede  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$  zwischen Euklidischen Räumen.

(5) Insbesondere also der Spezialfall von (4) einer Koordinatenprojektionen

$$p_i: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_i(x_1, \dots, x_r) = x_i$$

für  $i = 1, \dots, r$ .

*Beweis der Lipschitz-Stetigkeit im Fall (4).* Es gilt  $d_{\mathbb{R}^s}(L(x), L(\xi)) = \|L(x) - L(\xi)\|_{\mathbb{R}^s} = \|L(x - \xi)\|_{\mathbb{R}^s}$  für lineare Abbildungen  $L(y) = (\sum_{j=1}^r L_{ij}y_j)_{i=1, \dots, s}$ . Wir suchen eine Konstante  $C$  mit der Eigenschaft

$$\|L(y)\|_{\mathbb{R}^s} \leq C \cdot \|y\|_{\mathbb{R}^r}.$$

Es gilt  $\|L(y)\|_{\mathbb{R}^s} \leq \sqrt{s} \cdot \max_{i=1, \dots, s} |L(y)_i|$  wegen der Quaderungleichung. Es folgt  $\|L(y)\|_{\mathbb{R}^s} \leq r\sqrt{s} \cdot \max_{i=1, \dots, s; j=1, \dots, r} |L_{ij}| \cdot \max_{j=1, \dots, r} |y_j| \leq C \|y\|_{\mathbb{R}^r}$  für  $C = r\sqrt{s} \cdot \max_{i,j} |L_{ij}|$ . Diese Wahl von  $C$  ist nicht optimal, aber offensichtlich gilt

**Lemma 2.3.** Für  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen  $L: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$  ist

$$\|L\| := \sup_{v \neq 0} \left( \frac{\|L(v)\|_{\mathbb{R}^s}}{\|v\|_{\mathbb{R}^r}} \right) \leq C < \infty$$

eine wohldefinierte reelle (!) Zahl  $\geq 0$ , und es gilt

$$\|L(v)\| \leq \|L\| \cdot \|v\|.$$

**Bemerkung 2.4.** Eine beliebige Funktion  $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}^r$  schreibt sich in der Form

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_r(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r.$$

Die reellwertigen Funktionen  $f_i = p_i \circ f$  sind wegen (5) als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig (siehe Korollar 2.7). Umgekehrt definieren je  $r$  stetige reellwertige Funktionen  $f_1(x), \dots, f_r(x)$  auf  $(X, d)$  eine stetige Funktion  $(X, d) \rightarrow \mathbb{R}^r$ , denn  $x_n \rightarrow x$  impliziert  $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$  in  $\mathbb{R}$ , und wegen  $d(f(x_n), f(x)) \leq \sqrt{r} \cdot \max_{i=1, \dots, r} |f_i(x_n) - f_i(x)|$  auch  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  in  $\mathbb{R}^r$ .

**Definition 2.5.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Abbildung

$$f: X \rightarrow Y$$

heißt **stetig im Punkt**  $\xi$  von  $X$ , wenn für jede Folge  $x_n$ , die in  $(X, d_X)$  gegen  $\xi$  konvergiert, die Bildfolge  $f(x_n)$  in  $(Y, d_Y)$  gegen  $f(\xi)$  konvergiert.

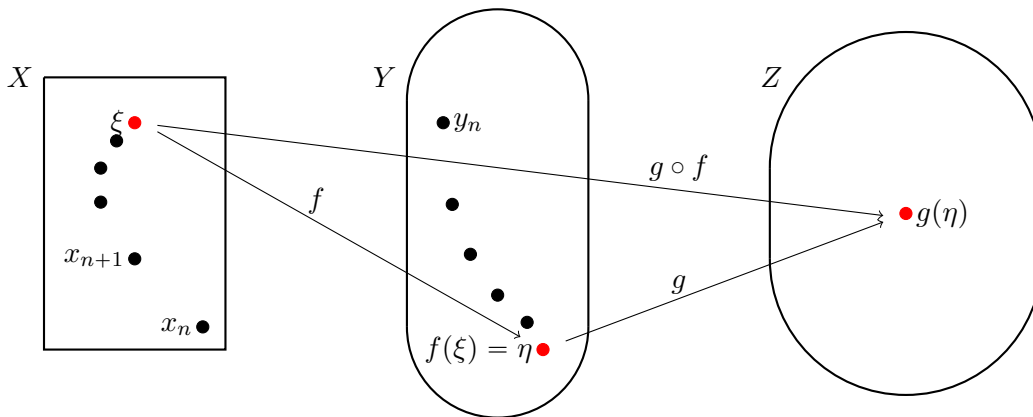
Offensichtlich ist  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  stetig genau dann, wenn  $f$  in jedem Punkt  $\xi$  von  $X$  stetig ist.

**Satz 2.6.** Sei  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  stetig im Punkt  $\xi \in X$  und sei  $g: (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$  stetig im Punkt  $\eta = f(\xi) \in Y$ . Dann ist die Komposition

$$(g \circ f): (X, d_X) \rightarrow (Z, d_Z)$$

stetig im Punkt  $\xi \in X$ .

**Beweis.** Zunächst eine Veranschaulichung



Nach Voraussetzung ist  $f$  stetig, also gilt für gegen  $\xi$  konvergente Folgen  $x_n$

$$y_n := f(x_n) \rightarrow \eta = f(\xi).$$

Da  $g$  stetig ist, gilt wegen der Konvergenz von  $y_n$  gegen  $\eta$

$$g(y_n) = (g \circ f)(x_n) \rightarrow g(\eta) = (g \circ f)(\xi).$$

Es folgt  $(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(\xi)$ , und damit ist  $g \circ f$  stetig im Punkt  $\xi$ . □

**Korollar 2.7.** Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig.

## 2.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Lemma 2.8.** Sei  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  eine stetige Abbildung. Ist  $A$  abgeschlossen in  $(Y, d_Y)$ , dann ist das Urbild  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $(X, d_X)$ .

**Beweis.** Sei  $x_n \rightarrow x$  eine in  $(X, d_X)$  konvergente Folge mit  $x_n \in f^{-1}(A)$ . Zu zeigen ist  $x \in f^{-1}(A)$ . Da  $f$  stetig ist, konvergiert die Bildfolge  $y_n = f(x_n) \rightarrow y = f(x)$ . Wegen  $y_n = f(x_n) \in A$ , und da  $A$  abgeschlossen ist, folgt  $y \in A$  und damit  $x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(A)$ . □

**Lemma 2.9.** Sei  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  eine stetige Abbildung. Ist  $(X, d_X)$  folgenkompakt, dann ist auch das Bild  $f(X)$  versehen mit der Einschränkung der Metrik  $d_Y$  folgenkompakt.

## 2 Stetige Abbildungen

**Beweis.** Sei  $y_n$  eine Folge in  $f(X)$ . Dann gilt  $y_n = f(x_n)$  für eine Urbildfolge  $x_n \in X$ . Nach Annahme gibt es eine in  $(X, d_X)$  konvergente Teilfolge  $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt, daß die Teilbildfolge  $\tilde{y}_n = f(\tilde{x}_n)$  in  $(f(X), d_Y)$  gegen  $f(\tilde{x})$  konvergiert.  $\square$

**Satz 2.10.** Ist  $(X, d_X)$  folgenkompakt, dann hat jede stetige reellwertige Funktion

$$f: (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$$

ein beschränktes Bild. Ist  $X$  nicht leer, werden das Maximum und das Minimum von  $f$  auf  $X$  als Funktionswerte angenommen.

**Beweis.** Das Bild  $f(X)$  ist folgenkompakt in  $\mathbb{R}$  bezüglich der Euklidischen Metrik wegen Lemma 2.9. Nach Satz 1.22 ist dann  $f(X)$  beschränkt und abgeschlossen. Letzteres zeigt wegen dem Zusatz von Satz 1.32

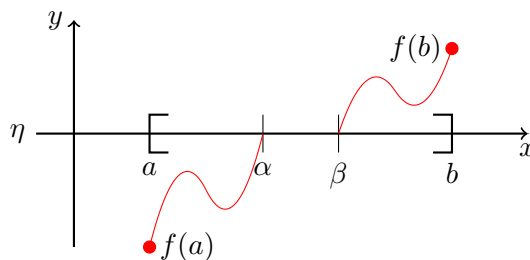
$$\sup(f(X)) = \max(f(X))$$

und analog  $\inf(f(X)) = \min(f(X))$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

## 2.3 Der Zwischenwertsatz

**Satz 2.11.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) \leq f(b)$ . Dann existiert für jedes  $\eta \in [f(a), f(b)]$  ein  $\alpha \in [a, b]$  mit  $f(\alpha) = \eta$ .

**Beweis.** Betrachte die nichtleere beschränkte Menge  $A := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \eta\}$ . Sei  $\alpha := \sup(A)$  und oBdA  $\alpha \neq b$ . Dann gilt  $x > \alpha \implies f(x) > \eta$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt  $f(\alpha) \geq \eta$ , da eine monoton fallend gegen  $\alpha$  konvergente Folge von Punkten  $x \in (\alpha, b]$  existiert mit  $f(x) > \eta$ . Andererseits gibt es eine monoton steigende Folge von Punkten aus  $A$ , welche gegen das Supremum  $\alpha$  von  $A$  konvergiert (Zusatz 1.32). Aus Stetigkeitsgründen und der Definition von  $A$  folgt damit  $f(\alpha) \leq \eta$ . Beides zusammen ergibt  $f(\alpha) = \eta$ .



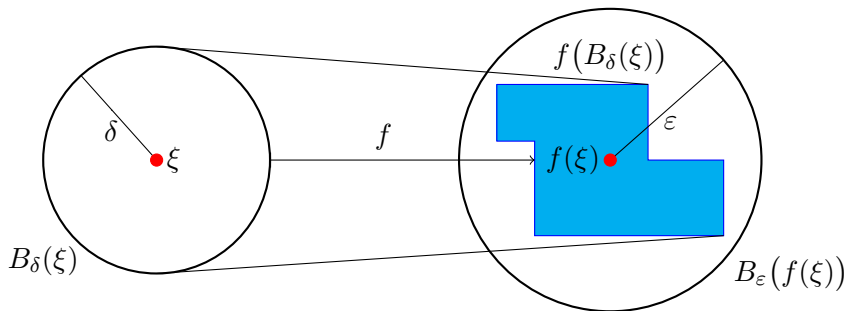
$\square$

## 2.4 Das $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium

**Satz 2.12.** Gegeben sei eine Funktion  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  und ein  $\xi \in X$ . Dann ist  $f$  genau dann stetig in  $\xi$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so daß gilt<sup>1</sup>

$$d_X(x, \xi) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon.$$

**Veranschaulichung.** Betrachte die Kugeln  $B_\delta(x) = \{x \in X \mid d_X(x, \xi) < \delta\}$ . Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  soll es ein  $\delta > 0$  geben, so daß zu jedem  $x \in X$ , dessen Abstand zu  $\xi$  kleiner als  $\delta$  ist, der Abstand von  $f(x)$  zu  $f(\xi)$  kleiner als  $\varepsilon$  ist.  $f$  soll also die Kugel  $B_\delta(\xi)$  um  $\xi$  vom Radius  $< \delta$  in die Kugel  $B_\varepsilon(f(\xi))$  um  $f(\xi)$  vom Radius  $< \varepsilon$  abbilden



**Beweis.** Zunächst zeigen wir, daß das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium die Stetigkeit impliziert. Ist  $x_n$  eine Folge in  $X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \xi$ , dann existiert zu jedem  $\tilde{\varepsilon} > 0$  ein  $N = N(\tilde{\varepsilon})$  mit  $d_X(x_n, \xi) < \tilde{\varepsilon}$  für  $n \geq N$ . Für  $d_X(x_n, \xi) < \delta = \delta(\varepsilon)$  gilt nach Annahme

$$d_Y(f(x_n), f(\xi)) < \varepsilon.$$

Wählt man  $\tilde{\varepsilon}$  gleich  $\delta$ , folgt  $d_Y(f(x_n), f(\xi)) < \varepsilon$  für  $n \geq N(\delta)$ . Das heisst  $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$ .

Zum Beweis der Gegenrichtung nehmen wir an  $f$  sei stetig im Punkt  $\xi$  und das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium wäre nicht erfüllt im Punkt  $\xi$ . Dann würde gelten

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \quad (d_X(x, \xi) < \delta \text{ und } d_Y(f(x), f(\xi)) \geq \varepsilon_0).$$

Wähle nun  $\delta = 1/n$ . Dann existiert ein  $x_n$  mit  $d_X(x_n, \xi) < 1/n$  und  $d_Y(f(x_n), f(\xi)) \geq \varepsilon_0$ . Aus  $d_X(x_n, \xi) < 1/n$  folgt  $x_n \rightarrow \xi$ . Die Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $\xi$  zeigt  $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$  im Widerspruch zu  $d_Y(f(x_n), f(\xi)) \geq \varepsilon_0$ .  $\square$

**Folgerung.** Eine Funktion  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  ist stetig genau dann, wenn gilt

$$\boxed{\forall \xi \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad (d_X(x, \xi) < \delta \implies d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon)}.$$

<sup>1</sup>Intuitiv besagt dies: Kleine Änderungen verursachen unter  $f$  nur kleine Wirkungen. Ändert man  $\xi$  nur wenig ab, dann variiert auch  $f(\xi)$  nur wenig.

## 2.5 Gleichmässige Stetigkeit

**Definition 2.13.** Eine Abbildung  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  heißt **gleichmässig stetig** auf  $(X, d_X)$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so daß für alle  $\xi, x \in X$  gilt:

$$d_X(x, \xi) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon.$$

oder

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \xi \in X \forall x \in X (d_X(x, \xi) < \delta \implies d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon)}.$$

**Satz 2.14 (Satz von Heine).** Ist  $(X, d_X)$  folgenkompakt, dann gilt: Jede stetige Funktion auf  $(X, d_X)$  ist gleichmässig stetig.

**Beweis.** Wäre die Aussage falsch, würde gelten<sup>2</sup>

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists \xi \in X \exists x \in X (d_X(x, \xi) < \delta \text{ und } d_Y(f(x), f(\xi)) \geq \varepsilon_0).$$

Fixiere ein solches  $\varepsilon_0 > 0$ . Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  und  $\delta := n^{-1}$  existieren daher  $\xi_n, x_n \in X$  mit  $d_X(\xi_n, x_n) < n^{-1}$  und  $d_Y(f(\xi_n), f(x_n)) \geq \varepsilon_0$ . Bei sorgfältiger Auswahl von Teilfolgen kann man dann durch Übergang zu Teilfolgen zusätzlich die Konvergenz annehmen

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi \quad , \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x.$$

(Man geht dazu zu einer konvergenten Teilfolge  $\tilde{\xi}_n$  über, und streicht die entsprechenden Folgenglieder auch in der Folge  $x_n$ . In dieser Teilfolge von  $x_n$  geht man nochmals durch durch Streichen von Folgengliedern zu einer konvergenten Teilfolge  $\tilde{x}_n$  über. Die entsprechenden Glieder streicht man auch aus der Teilfolge  $\tilde{\xi}_n$ . Wir nennen diese Teilfolgen wieder  $\xi_n$  bzw.  $x_n$ , und  $d_X(\xi_n, x_n) < n^{-1}$  gilt dann auch für diese neuen Folgen.) Wegen  $d_X(\xi_n, x_n) < n^{-1}$  und

$$0 \leq d_X(x, \xi) \leq \underbrace{d_X(x, x_n)}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{d_X(x_n, \xi_n)}_{< n^{-1} < \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{d_X(\xi_n, \xi)}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$$

für  $n \geq N(\varepsilon)$  und gegebenes  $\varepsilon > 0$  folgt  $d_X(x, \xi) = 0$  im Limes  $n \rightarrow \infty$ . Also  $x = \xi$ . Damit folgt wegen  $f(x) = f(\xi)$  aus der Dreiecksungleichung

$$0 < \varepsilon_0 \leq d_Y(f(\xi_n), f(x_n)) \leq \underbrace{d_Y(f(\xi_n), f(\xi))}_{< \frac{1}{2}\varepsilon_0} + \underbrace{d_Y(f(x_n), f(x))}_{< \frac{1}{2}\varepsilon_0} < \varepsilon_0.$$

Ein Widerspruch! [Wegen der Stetigkeit von  $f$  ist die rechte Seite  $< \varepsilon_0$ , falls  $n \geq N_1(\frac{1}{2}\varepsilon_0)$  resp.  $n \geq N_2(\frac{1}{2}\varepsilon_0)$  wegen der Konvergenz der Folgen  $f(\xi_n) \rightarrow f(\xi)$  und  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .]  $\square$

<sup>2</sup>Negiert man eine Aussage, vertauschen sich beim 'Vorbeiziehen' der Negation die Quantoren  $\forall$  und  $\exists$ . Die Negierung der Implikation  $(A \implies B)$  liefert die Aussage  $(A \text{ gilt und ebenso die Negierung von } B)$ .

## 2.6 Reellwertige stetige Funktionen

**Definition 2.15.** Für einen metrischen Raum  $(X, d_X)$  bezeichne

$$C(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } (X, d_X)\}$$

den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf  $X$ .

**Lemma 2.16.** Seien  $f, g \in C(X)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $f + g, \lambda \cdot g, f \cdot g$  stetig auf  $X$ , d.h.  $C(X)$  bildet eine  $\mathbb{R}$ -Algebra.

**Beweis.** Wir beweisen das Lemma lediglich für das Produkt  $f \cdot g$ , da die anderen Rechnungen analog durchführbar sind. Sei  $\xi \in X$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(\xi)g(\xi)| &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(\xi) + f(x)g(\xi) - f(\xi)g(\xi)| \\ &\leq \underbrace{|f(x)|}_{\leq c_1} \cdot \underbrace{|g(x) - g(\xi)|}_{< \varepsilon/2c_1} + \underbrace{|g(\xi)|}_{\leq c_2} \cdot \underbrace{|f(\xi) - f(x)|}_{< \varepsilon/2c_2} < \varepsilon \end{aligned}$$

für Konstanten  $c_1, c_2 > 0$  [denn  $|g(x) - g(\xi)| < \varepsilon/2c_1$  gilt für  $d_X(x, \xi) < \delta_1$ ;  $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon/2c_2$  gilt für  $d_X(x, \xi) < \delta_2$ ;  $|f(x) - f(\xi)| < 1$  gilt für  $d_X(x, \xi) < \delta_3$ . Für  $d_X(x, \xi) < \delta := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  ist damit also  $|f(x)| \leq 1 + |f(\xi)| =: c_1$ .] Alles zusammen zeigt, daß  $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$  stetig im Punkt  $\xi$  ist.  $\square$

**Korollar 2.17.** Polynome sind stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}$ .

**Lemma 2.18.** Sei  $f: (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in X$ . Dann gilt:

$$\frac{1}{f(x)}: (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist definiert und stetig auf  $(X, d_X)$ .

**Beweis.** Für gegebenes  $\xi \in X$  und  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(\xi)} \right| = \left| \frac{f(\xi) - f(x)}{f(x)f(\xi)} \right|.$$

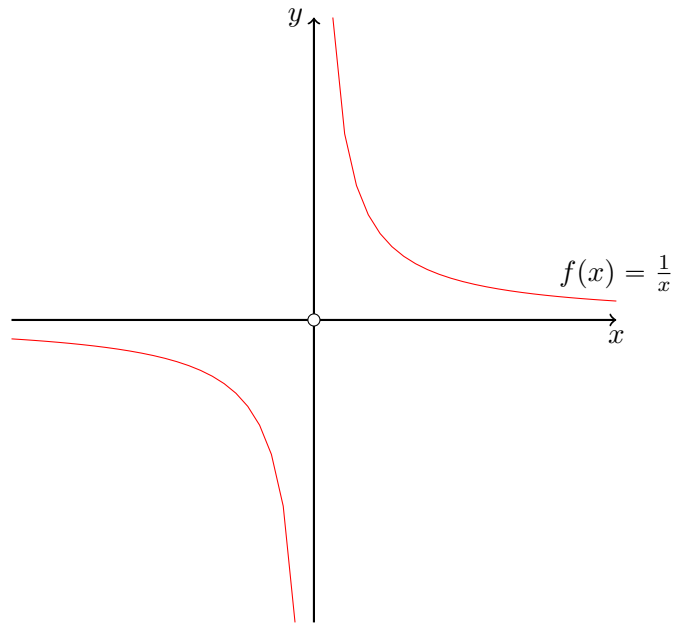
Aus  $|f(x) - f(\xi)| < \frac{1}{3}|f(\xi)| =: \varepsilon_1 > 0$  für  $d(X, \xi) < \delta_1$  (wegen der Stetigkeit von  $f$ ) folgt  $|\frac{2}{3}f(\xi)| < |f(x)|$  vermöge der unteren Dreiecksungleichung, d.h.  $\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \left| \frac{3}{2f(\xi)} \right|$ . Also

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(\xi)} \right| < \varepsilon,$$

falls  $|f(x) - f(\xi)| < \frac{2}{3}|f(\xi)|^2 \cdot \varepsilon$ , was gilt wenn  $d_X(x, \xi)$  klein genug ist (Stetigkeit von  $f$ ).  $\square$

**Beispiel 2.19.**  $f(x) = \frac{1}{x}$  erfüllt diese Bedingung für  $X = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und definiert damit eine stetige (allerdings nicht gleichmäßig stetige) Funktion auf  $\mathbb{R}^*$

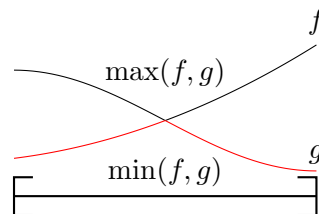
## 2 Stetige Abbildungen



Wir wollen uns nun mit dem Minimum und Maximum von Funktionen auseinandersetzen. Für Funktionen  $f, g: (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem metrischen Raum  $(X, d_X)$  definieren wir

$$\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x))$$

und analog das Minimum  $\min(f, g)(x)$ .



Die stetigen Funktionen aus  $C(X)$  definieren einen **Funktionsverband** auf  $X$ , d.h.  $C(X)$  ist ein reeller Vektorraum von Funktionen auf  $X$  und es gilt

**Satz 2.20.**  $\min(f, g)$  und  $\max(f, g)$  sind in  $C(X)$  für  $f, g \in C(X)$ .

**Beweis.** Es genügt, daß mit  $f$  auch  $|f|$  (als Komposition der stetigen Abbildungen  $f$  und  $|\cdot|$ ) stetig ist, denn  $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|$  und  $\min(f, g) = -\max(-f, -g)$ .  $\square$

## 2.7 Gleichmässige Konvergenz

**Definition 2.21.** Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reellwertiger Funktionen  $f_n: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  **konvergiert punktweise** gegen eine Grenzfunktion  $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn für jedes  $x \in X$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

**Definition 2.22.** Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen  $f_n: (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$  **konvergiert gleichmässig** gegen eine Grenzfunktion  $f: (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert, so daß für alle  $n \geq N$  und alle  $x \in X$  gilt<sup>3</sup>

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt nicht. Wir geben später Beispiele im Zusammenhang mit dem Satz von Dini.

**Die Supremumsnorm.** Für beschränkte reellwertige Funktionen  $f$  auf  $X$  definiert man

$$\|f\| := \sup_{\xi \in X} |f(\xi)|.$$

Offensichtlich gilt  $\|f\| = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$  gilt. Ebenso trivial ist die Eigenschaft  $\|\lambda \cdot f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$  für reelle Konstanten  $\lambda$ . Für zwei beschränkte reellwertige Funktionen  $f, g$  auf  $X$  ist aber auch  $f + g$  beschränkt auf  $X$  und es gilt

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

denn  $|f(\xi) + g(\xi)| \leq |f(\xi)| + |g(\xi)| \leq \|f\| + \|g\|$  gilt für alle  $\xi \in X$ . Somit definiert  $\|\cdot\|$  eine **Norm**, und  $d(f, g) = \|f - g\|$  dann eine Metrik auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller beschränkten Funktionen auf  $X$ .

Ist  $(X, d_X)$  ein folgenkompakter metrischer Raum, dann ist jede stetige Funktion beschränkt auf  $X$ . Für stetige Funktionen  $f \in C(X)$  gilt sogar

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

und  $d(f, g) = \|f - g\|$  sei die eingeschränkte Metrik auf  $C(X)$ . Offensichtlich gilt dann

**Korollar 2.23.**  $(C(X), d)$  ist mit  $d(f, g) := \|f - g\|$  ein metrischer Raum. Eine Folge von Funktionen  $f_n \in C(X)$  konvergiert gegen  $f \in C(X)$  in  $(X, d)$  genau dann, wenn  $f_n(x)$  gleichmässig auf  $(X, d_X)$  gegen die Grenzfunktion  $f(x)$  konvergiert.

<sup>3</sup>Das bedeutet  $\|f - f_n\| < \varepsilon$  für die nachfolgend definierte Supremumsnorm.

## 2.8 Vollständigkeit von $C(X)$

**Satz 2.24.** Sei  $(X, d_X)$  folgenkompakt. Dann ist  $(C(X), d)$  versehen mit der Supremums-Metrik  $d(f, g) = \|f - g\|$  ein vollständiger metrischer Raum<sup>4</sup>.

**Beweis.** Sei  $f_n$  eine Cauchyfolge in  $C(X)$ . Dann gilt  $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$  für  $n, m \geq N(\varepsilon)$ . Wir konstruieren eine Grenzfunktion  $f$ . Für jeden fixierten Punkt  $x \in X$  betrachten wir dazu die reelle Folge  $y_n = f_n(x)$ . Wegen  $|y_n - y_m| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon$  für  $n, m \geq N(\varepsilon)$  ist  $y_n$  eine reelle Cauchyfolge. Ihr Limes  $y_n \rightarrow y$  existiert und wir setzen  $f(x) := y \in \mathbb{R}$ .

1) Wir behaupten:

$$\|f - f_n\| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq N(\tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

Ist nämlich  $x \in X$  ein beliebiger Punkt, dann gibt es ein von  $x$  abhängiges  $m_0 = m_0(\frac{1}{2}\varepsilon, x)$  mit  $|f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $m \geq m_0(\frac{1}{2}\varepsilon, x)$  wegen  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ . Dies liefert für  $n, m \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$  und  $m \geq m_0(\varepsilon, x)$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \underbrace{\|f_m - f_n\|}_{< \frac{1}{2}\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Das gewählte  $m$  ist aber beliebig, und kann daher (angepasst an das jeweilige  $x$ ) beliebig groß gewählt werden! Es folgt damit wie behauptet  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  für  $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ .

2) Wir behaupten:  $f \in C(X)$ . Betrachte hierzu  $x_1, x_2 \in X$ . Dann gilt für geeignetes  $n$  und  $\delta$  sowie  $d_X(x_1, x_2) < \delta$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \underbrace{|f(x_1) - f_n(x_1)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x_1) - f_n(x_2)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x_2) - f(x_2)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} < \varepsilon.$$

[Ist  $d_X(x_1, x_2) < \delta = \delta(\frac{1}{3}\varepsilon, f_n)$ , dann gilt  $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ , da  $f_n$  stetig und damit gleichmäßig stetig auf  $(X, d_X)$  ist. Ausserdem haben wir für beliebiges  $x$  (insbesondere also für  $x = x_1, x_2$ ) gezeigt  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$  für  $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon/3)$ . Wählt man daher ein  $n \geq N(\varepsilon/6)$ , dann folgt für alle  $x_1, x_2$  mit  $d_X(x_1, x_2) < \delta$ , wobei  $\delta$  jetzt nur noch von  $\varepsilon$  abhängt, die Ungleichung  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .] Das heißt  $f$  ist stetig auf  $X$ . Wegen  $\|f - f_n\| < \varepsilon$  für  $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$  konvergiert die Funktionenfolge  $f_n(x)$  gleichmäßig gegen  $f(x)$ . Dies zeigt die Cauchy-Vollständigkeit von  $C(X)$ .  $\square$

## 2.9 Monotone Folgen stetiger Funktionen

Sei  $X$  eine Menge und  $A \subseteq X$  eine Teilmenge. Die **charakteristische** Funktion  $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch:  $\chi_A(x) = 1$  für  $x \in A$  und  $\chi_A(x) = 0$  für  $x \notin A$ . Man sagt, eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  hat **Träger** in  $A$ , falls für alle  $x \notin A$  gilt  $f(x) = 0$ . Für jede Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  hat die Funktion  $\chi_A \cdot f$  Träger in  $A$ . Bemerkung: Der Raum  $C_c(X) \subseteq C(X)$  aller Funktionen

<sup>4</sup>Dies überträgt sich verbatim auf den Raum  $C(X, \mathbb{R}^N)$  aller Funktionen auf  $X$  mit Werten in  $\mathbb{R}^N$ .

## 2.9 Monotone Folgen stetiger Funktionen

$f \in C(X)$  mit kompakten Träger in  $(X, d)$  ist ein Verband [benutze dazu: Die Vereinigung  $A = A_1 \cup A_2$  zweier folgenkompakter Mengen  $A_1, A_2$  ist folgenkompakt (Schubfachschluss)].

Für eine abgeschlossene Teilmenge  $A \subseteq X$  des metrischen Raumes  $(X, d)$  ist die in Beispiel 2.2(3) erklärte Abstandsfunktion  $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$  eine stetige Funktion auf  $(X, d)$  mit  $d(x, A) = 0 \iff x \in A$ .

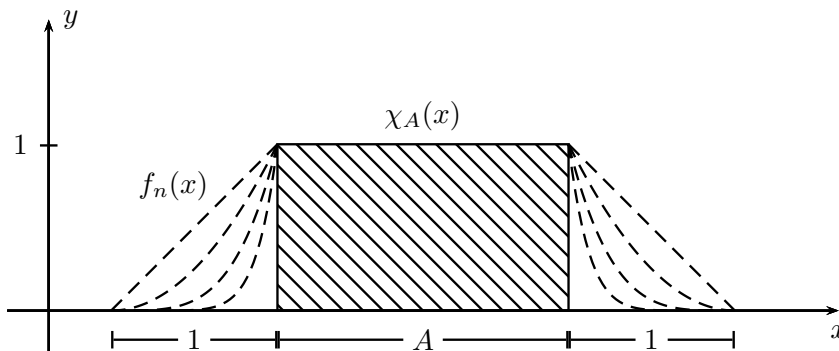
**Beispiel 2.25.** Sei  $f(x) \geq 0$  eine nichtnegative stetige Funktionen auf  $X$ . Nach Satz 2.20, Lemma 2.16 und Beispiel 2.2 sind dann auch die Funktionen

$$f_n(x) = \max(0, 1 - d(x, A))^n \cdot f(x)$$

stetig auf  $X$ . Wegen  $f(x) \geq 0$  definieren die  $f_n(x) \geq 0$  eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen auf  $X$ , welche daher gegen eine Grenzfunktion  $g(x) \geq 0$  auf  $X$  konvergiert. Wegen  $0 \leq \max(0, 1 - d(x, A)) < 1$  für  $x \notin A$  und  $0 \leq \max(0, 1 - d(x, A)) = 1$  für  $x \in A$  konvergiert diese Folge (wegen Lemma 1.15) punktweise gegen die Grenzfunktion  $g = \chi_A \cdot f$

$$C(X) \ni f_n(x) \searrow \chi_A(x) \cdot f(x) \quad , \quad A \text{ abgeschlossen in } X, f \geq 0 \text{ in } C(X)$$

**Bemerkung.** Ein gleichmäßiger Limes von stetigen Funktionen  $f_n$  auf einem kompakten Raum  $(X, d)$  definiert eine stetige Grenzfunktion (Satz 2.24). Das obige Beispiel 2.25 zeigt, daß die *analoge Aussage für monotone Limiten stetiger Funktionen  $f_n$  falsch ist*. Sei dazu  $X$  etwa das Intervall  $[0, 5]$ ,  $f = 1$  sowie  $A = [a, b] \subset X$  für  $1 < a < b < 4$ . Dann ist der Grenzwert  $\chi_A = \lim_n f_n$  keine stetige Funktion auf  $X$ , denn der Limes  $\lim_n \chi_A(x_n) = 0$  für eine linksseitige Folge  $x_n \rightarrow a$  (d.h. mit  $x_n < a$ ) und ist verschieden von  $\chi_A(a) = 1$ .



Der folgende Satz von Dini zeigt, daß eine monotone Folge stetiger Funktion  $f_n$  auf einem kompakten metrischen Raum  $X$  genau dann eine stetige Grenzfunktion  $f$  besitzt, wenn die Folge  $f_n$  gleichmäßig auf  $X$  gegen  $f$  konvergiert.

**Satz 2.26 (Satz von Dini).** Sei  $(X, d)$  folgenkompakt. Sei  $f_n \searrow f$  eine monoton fallende punktweise konvergente Folge von stetigen reellwertigen Funktionen  $f_n$  auf  $X$ . Ist die Grenzfunktion  $f$  stetig auf  $X$ , konvergieren die  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  auf  $X$ .

## 2 Stetige Abbildungen

**Beweis.** Ersetzt man  $f_n$  durch  $f_n - f$ , kann oBdA  $f = 0$  angenommen werden. Wir nehmen an die Folge  $f_n$  sei monoton fallend. Wäre die Konvergenz nicht gleichmässig, gäbe es ein  $\varepsilon_0 > 0$  so daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in X$  existiert mit

$$0 < \varepsilon_0 \leq f_n(x_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

a) Da  $X$  folgenkompakt ist, können wir durch Übergang zu einer Teilfolge oBdA annehmen  $x_n \rightarrow \xi$ . Wegen  $f_n(\xi) \rightarrow f(\xi) = 0$  gibt es dann ein  $n_0$  mit

$$0 \leq f_{n_0}(\xi) < \varepsilon_0/2.$$

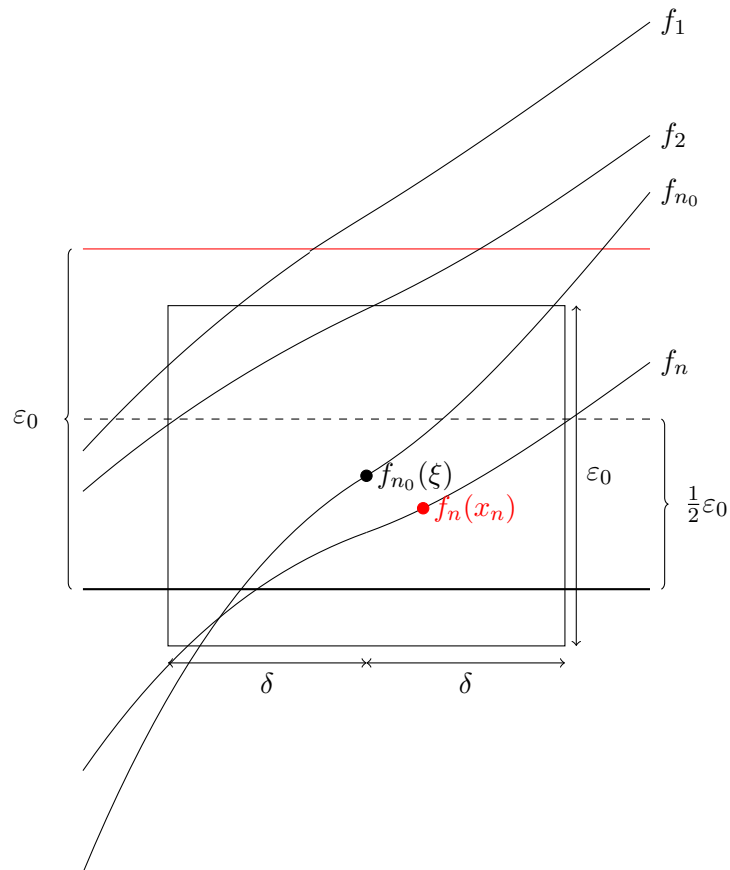
b) Wegen der Stetigkeit von  $f_{n_0}(x)$  im Punkt  $\xi$  gilt  $f_{n_0}(x_n) - f_{n_0}(\xi) < \varepsilon_0/2$  für alle  $n \geq n_1$ , bei geeigneter Wahl von  $n_1 > n_0$  wegen  $x_n \rightarrow \xi$ . Also

$$0 \leq f_{n_0}(x_n) = (f_{n_0}(x_n) - f_{n_0}(\xi)) + f_{n_0}(\xi) < \varepsilon_0, \quad (\forall n \geq n_1).$$

c) Aus der Monotonie der Folge  $f_m(x)$  ergibt sich dann

$$0 \leq f_m(x_n) \leq f_{n_0}(x_n) < \varepsilon_0, \quad (\forall m \geq n_1).$$

Für  $m = n$  und beliebiges  $n \geq n_1$  steht dies im Widerspruch zu  $\varepsilon_0 \leq f_n(x_n)$ . □



# 3 Integration

## 3.1 Vorbemerkungen

Es ist ein klassisches Problem für reellwertige Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $X = \mathbb{R}$  die Fläche zwischen  $f$  und der  $x$ -Achse, das sogenannte Integral  $\int_X f(x)dx$ , zu bestimmen. Dies setzt voraus, daß dieser Flächenbegriff überhaupt sinnvoll für die Funktion  $f$  definiert werden kann; wenn er definierbar ist, ist zu klären ob diese Definition eindeutig ist. Dazu machen wir gewisse Einschränkungen an die Menge  $B(X)$  der zugelassenen Funktionen  $f$  und diskutieren zuerst axiomatische Eigenschaften, die ein solches Integral besitzen sollte.

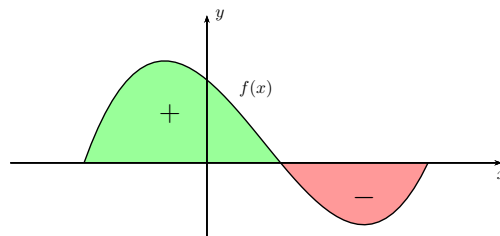
Wir nehmen dazu an,  $B(X)$  sei ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum reellwertiger Funktionen auf  $X = \mathbb{R}$ , d.h. es gelte  $f + g \in B(X)$  und  $\lambda \cdot f \in B(X)$  für alle  $f, g \in B(X)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Das gesuchte **Integral**

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

fassen wir auf als eine Abbildung  $I: B(X) \rightarrow \mathbb{R}$  auf, und erwarten folgende Eigenschaften

1.  **$\mathbb{R}$ -Linearität:**  $I(f + g) = I(f) + I(g)$  und  $I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f)$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2. **Monotonie:**  $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$
3. **Normierung:** Es gilt  $\chi_{[0,1]} \in B(X)$  und  $I(\chi_{[0,1]}) = 1$ .
4. **Translationsinvarianz:** Für  $f \in B(X)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist das Translat  $g(x) = f(x + x_0)$  in  $B(X)$  und es gilt  $I(f) = I(g)$ .

Die erste Eigenschaft impliziert  $I(0) = 0$ . Man sollte berücksichtigen, daß im allgemeinen  $f$  keine positive Funktion sein wird. Hat  $f$  negative Werte, zerlegt man  $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$  in die **positive** Funktion  $f_+ = \max(f, 0) \geq 0$  und die **negative** Funktion  $f_- = \min(f, 0) \leq 0$  so daß gelten soll  $I(f) = I(f_+) - I(-f_-)$ .



### 3 Integration

Der Wert  $I(f)$  ist im allgemeinen verschieden von  $I(|f|) = I(f_+) + I(-f_-)$ . In der Tat, aus  $-f_-(x) \geq 0$  und der Monotonie folgt  $I(-f_-) \geq 0$ . Wegen der Linearität ist dann aber  $I(f_-) = -I(-f_-)$  eine negative Zahl. Das heisst, die Fläche unter der  $x$ -Achse wird negativ sein. Bei dem gesuchten Begriff des Flächeninhaltes handelt es sich daher um den Begriff einer **orientierten Fläche**<sup>1</sup>. Für Funktionen mit positiven Werten sollte das gesuchte Integral positive Werte besitzen. Dies erklärt Eigenschaft 2, denn  $g-f \geq 0$  impliziert  $I(g) - I(f) = I(g-f) \geq 0$  und damit die Monotonie  $I(g) \geq I(f)$ .

Daß die Eigenschaften 1 und 2 das Integral höchstens bis auf eine Normierungskonstante festlegen können, erklärt Axiom 3. Aber auch die ersten drei Eigenschaften können  $I$  nicht eindeutig festlegen, wie man sofort an einem Beispiel sieht. Für jeden beliebigen Punkt  $\xi \in [0, 1]$  ist  $f \mapsto I(f) := f(\xi)$  linear, monoton und erfüllt  $I(\chi_{[0,1]}) = 1$ , aber nicht Eigenschaft 4. Dies motiviert das letzte Axiom als natürliche und vor allem geometrisch plausible Annahme.

Hat  $f$  keinen kompakten Träger, kann man nicht erwarten, daß das Integral  $I(f)$  definiert ist. Fixiert man ein kompaktes Intervall  $A \subset \mathbb{R}$  mit  $\chi_A \in B(X)$  und betrachtet nur Funktionen  $f$  im Unterraum  $B_A(X) \subseteq B(X)$  der Funktionen mit Träger in  $A$ , liefert Eigenschaft 1 und 2 sowie die triviale Abschätzung  $-\|f\| \cdot \chi_A \leq f \leq \|f\| \cdot \chi_A$  dann  $-\|f\| \cdot I(\chi_A) \leq I(f) \leq \|f\| \cdot I(\chi_A)$ , d.h. die **Boxungleichung**<sup>2</sup> für die **Supremumsnorm**  $\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$  von  $f$  auf  $A$

$$\boxed{|I(f)| \leq I(\chi_A) \cdot \|f\|} \quad \text{für alle } f \in B_A(X).$$

Es folgt für  $X = \mathbb{R}$

**Lemma 3.1.** *Sind alle Funktionen in  $B_A(X)$  beschränkt, definiert die Einschränkung eines Integrals  $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$  mit den obigen Eigenschaften 1.-4. eine **stetige**  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung*

$$I : B_A(X) \longrightarrow \mathbb{R},$$

wenn  $B_A(X)$  mit der Supremums-Metrik  $d(f, g) = \|f - g\|$  versehen wird.

## 3.2 Treppenfunktionen

**Definition 3.2.** *Ein Verband  $B(X)$  auf  $X$  ist ein Raum von Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgender Eigenschaft: Für  $f, g \in B(X)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  sind auch  $f + g$ ,  $\lambda \cdot f$  und  $|f|$  in  $B(X)$ . D.h.  $B(X)$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und es gilt  $f, g \in B(X) \implies \min(f, g) \in B(X)$  und  $\max(f, g) \in B(X)$  (siehe den Beweis von Satz 2.20).*

Sei  $B(X)$  ein Verband auf  $X$ . Dann definiert für jede Teilmenge  $A \subseteq X$  der Unterraum  $B_A(X) \subseteq B(X)$  aller Funktionen  $f \in B(X)$ , deren Träger in  $A \subseteq X$  liegt, erneut einen Verband auf  $X$ .

<sup>1</sup>Was wäre die natürliche Orientierung der Berandung?

<sup>2</sup>Ist  $f$  nicht beschränkt, gilt  $\|f\| = +\infty$ . Die Box-Ungleichung bleibt richtig in  $\mathbb{R}^+$  unter der Annahme  $I(\chi_A) > 0$ .

**Definition 3.3.** Eine reellwertige Funktion  $f$  auf  $X = \mathbb{R}$  nennt man **Treppenfunktion**, wenn es endliche viele reelle Zahlen  $\xi_0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_m$  gibt mit: 1) Die Funktion hat Träger im Intervall  $[\xi_0, \xi_m]$  und 2) Die Einschränkung  $f|_{(\xi_{i-1}, \xi_i)}$  von  $f$  auf die offenen Teilintervalle  $(\xi_{i-1}, \xi_i)$  ist eine konstante Funktion für alle  $i = 1, \dots, m$ .

Jede solche Treppenfunktion ist eine endliche  $\mathbb{R}$ -Linearkombination von charakteristischen Funktionen von abgeschlossenen Intervallen (\*)

$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot \chi_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}(x) + \sum_{j=0}^m d_j \cdot \chi_{[\xi_j, \xi_j]}(x)$$

für gewisse reelle Konstanten  $c_i, d_j$ . Die Umkehrung gilt natürlich auch. Jede solche Linearkombination ist eine Treppenfunktion. Die Menge der Stützstellen  $\xi_0, \dots, \xi_m$  einer gegebenen Treppenfunktion  $f$  ist natürlich dahingehend willkürlich, daß man jederzeit  $\{\xi_0, \dots, \xi_m\}$  durch eine beliebige grössere endliche Menge von Stützstellen ersetzen kann. Es gilt  $f(\xi_i) = c_i + c_{i+1} + d_j$ .

**Lemma 3.4.** Der Raum  $T(\mathbb{R})$  aller Treppenfunktionen auf  $X = \mathbb{R}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum<sup>3</sup> und wird erzeugt von den charakteristischen Funktionen der kompakten Intervalle  $A \subset \mathbb{R}$ , und  $T(\mathbb{R})$  definiert einen Verband auf  $\mathbb{R}$ .

**Beweis.** Offensichtlich ist jedes skalare Vielfache einer Treppenfunktionen wieder eine Treppenfunktion. Seien  $f, g \in T(\mathbb{R})$  Treppenfunktion. Durch Vergrössern der Menge der Stützstellen kann man oBdA annehmen, daß sowohl  $f$  als auch  $g$  Träger in  $[\xi_0, \xi_m]$  haben und konstant sind auf den Teilintervallen  $(\xi_{i-1}, \xi_i)$  für  $i = 1, \dots, m$ . Dann ist natürlich klar, daß auch  $f + g$  eine Treppenfunktion ist mit Träger in  $[\xi_0, \xi_m]$  und Stützstellen  $\xi_0, \dots, \xi_m$ . Dies zeigt,  $T(\mathbb{R})$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Wegen (\*) bilden die charakteristischen Funktionen  $\chi_A$  aller kompakten Intervalle  $A \subset \mathbb{R}$  ein Erzeugendensystem des Vektorraums  $T(\mathbb{R})$ . Um zu sehen daß  $T(\mathbb{R})$  ein Verband ist, beachte daß für Treppenfunktionen wie in (\*) gilt

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^m |c_i| \cdot \chi_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}(x) + \sum_{j=0}^m b_j \cdot \chi_{[\xi_j, \xi_j]}(x)$$

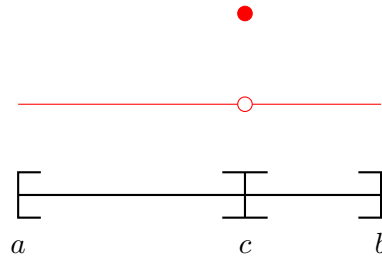
für die Konstanten  $b_j := |c_j + c_{j+1} + d_j| - |c_j| - |c_{j+1}|$ . □

**Achtung.** Die charakteristischen Funktionen  $\chi_A$  bilden zwar ein Erzeugendensystem von  $T(\mathbb{R})$ , aber keine Basis. Beispiele für lineare Abhängigkeiten zwischen den erzeugenden charakteristischen Funktionen sind etwa

$$\chi_{[a,b]} = \chi_{[a,c]} + \chi_{[c,b]} - \chi_{[c,c]} \cdot$$

für  $a \leq c \leq b$ . Beachte auch  $\chi_{(c,d)} = \chi_{[c,d]} - \chi_{[c,c]} - \chi_{[d,d]}$  und  $\chi_{(a,b)} = \chi_{[a,b]} - \chi_{[a,a]}$ .

<sup>3</sup>Wie man leicht sieht ist  $T(\mathbb{R})$  unendlich dimensional.



Die im vorigen Abschnitt erläuterten Eigenschaften 1.-4. legen nun auf  $T(\mathbb{R})$  ein eindeutig bestimmtes Integral  $I$  fest:

**Lemma 3.5.** *Es gibt eine eindeutig bestimmte  $\mathbb{R}$ -lineare monotone translationsinvariante und normierte Abbildung  $I : T(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Verband der Treppenfunktion  $T(\mathbb{R})$ .*

**Beweis.** Da  $T(\mathbb{R})$  als Vektorraum von den Funktionen  $\chi_A$ ,  $A = [a, b]$  erzeugt wird, genügt es zum Beweis der *Eindeutigkeit* zu zeigen

$$I(\chi_A) = |b - a| \quad , \quad A = [a, b] .$$

OBdA  $a = 0$  (Translationsinvarianz von  $I$ ). Zu zeigen ist dann  $I(\chi_{[0,b]}) = b$ . Für  $b = 1$  ist dies klar. Beachte  $0 \leq \sum_{i=1}^n \chi_{[\frac{i}{n}, \frac{i}{n}]} \leq \chi_{[0,1]}$ . Aus der Translationsinvarianz  $I(\chi_{[\frac{i}{n}, \frac{i}{n}]}) = I(\chi_{[0,0]})$  und der Monotonie folgt daher  $0 \leq I(\chi_{[0,0]}) \leq 1/n$  für alle  $n$ , also  $I(\chi_{[a,a]}) = I(\chi_{[0,0]}) = 0$  für alle  $a$ . Aus  $\sum_{i=1}^n \chi_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} = \chi_{[0,1]} + \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{[\frac{i}{n}, \frac{i}{n}]}$  und der Translationsinvarianz folgt damit  $I(\chi_{[0, \frac{1}{n}]}) = 1/n$ . Analog zeigt man  $I(\chi_{[0,b]}) = b$  für alle rationalen Zahlen  $m = \frac{m}{n} \geq 0$ . Jedes reelle  $b > 0$  kann durch rationale Zahlen  $\nu, \mu$  mit  $\nu < b < \mu$  beliebig gut angenähert werden (Dezimalbruchentwicklung von  $b$ ). Die Monotonie von  $I$  liefert  $\nu \leq I(\chi_{[0,b]}) \leq \mu$ , und im Limes  $\nu \rightarrow b, \mu \rightarrow b$  folgt  $I(\chi_{[0,b]}) = b$ .

Die Existenz von  $I$  zeigt man durch den Ansatz

$$I(f) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot |\xi_i - \xi_{i-1}|$$

für  $f(x) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot \chi_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}(x) + \sum_{j=0}^m d_j \cdot \chi_{[\xi_j, \xi_j]}(x)$  in  $T(\mathbb{R})$ . Offensichtlich ändert sich dieser Wert nicht bei Hinzunahme von weiteren Stützstellen  $\xi_i$ . Damit ist  $I(f)$  wohldefiniert und hängt nur von der Funktion  $f \in T(\mathbb{R})$  ab. Man zeigt durch Hinzunahme von Stützstellen sofort die behaupteten Eigenschaften 1.-4. □

### 3.3 Das reelle Standardintegral

**Definition 3.6.** *Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **stückweise stetig**, wenn es endlich viele reelle Stützpunkte  $\xi_0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_m$  gibt mit: 1)  $f$  hat Träger im Intervall  $[\xi_0, \xi_m]$  und 2) die Einschränkungen  $f|_{(\xi_{i-1}, \xi_i)}$  von  $f$  auf die offenen Teilintervalle  $(\xi_{i-1}, \xi_i)$  lassen sich zu stetigen Funktionen  $f_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}$  der abgeschlossenen Intervalle  $A_i = [\xi_{i-1}, \xi_i]$  fortsetzen.*

Können die Funktionen  $f_i$  konstant gewählt werden, ist  $f$  eine Treppenfunktion. Also ist der Raum der Treppenfunktion  $T(\mathbb{R})$  ein Unterraum des Raumes  $CT(\mathbb{R})$  aller stückweise stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$ . Wie im Beweis von Lemma 3.4 zeigt man, daß  $CT(\mathbb{R})$  einen Verband auf  $\mathbb{R}$  definiert. Dieser Verband enthält ausser  $T(\mathbb{R})$  auch den Verband  $C_c(\mathbb{R})$  aller stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$  mit kompaktem Träger. Wir verallgemeinern nun Lemma 3.5 auf stückweise stetige Funktionen.

**Satz 3.7.** *Es gibt eine eindeutig bestimmte  $\mathbb{R}$ -lineare monotone translationsinvariante und normierte Abbildung*

$$I : CT(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf dem Verband  $CT(\mathbb{R})$  der stückweise stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$ .

Dieses  $I$  nennen wir das **Euklidische Standardintegral** und schreiben dafür  $I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ . Da für jede Treppenfunktion  $f \in CT(\mathbb{R})$  auch die Funktion  $\chi_{[a,b]} \cdot f$  in  $CT(\mathbb{R})$  ist, benutzen wir folgende Schreibweise

$$\int_{[a,b]} f(x)dx := \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x) \cdot f(x)dx .$$

Ganz wesentlich für den Beweis von Satz 3.7 ist das folgende

**Lemma 3.8.** *Für jedes  $f \in CT(\mathbb{R})$  und jede reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $g \in T(\mathbb{R})$  mit  $\|f - g\| < \varepsilon$  (Supremumsnorm auf  $CT(\mathbb{R})$ ). Hat  $f$  Träger im Intervall  $A$ , dann oBdA auch  $g$ .*

**Beweis.** Man reduziert dies sofort auf den Fall  $f \in C(A)$  und  $g \in T_A(\mathbb{R})$ , für ein Intervall  $A = [a, b]$ . Es existiert dann ein  $\delta > 0$  mit  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  für alle  $x, y \in A$ ,  $|x - y| < \delta$  (nach Satz 2.14). Zerlege  $A$  äquidistant in Teilintervalle  $[\xi_{i-1}, \xi_i]$  der Länge  $|\xi_i - \xi_{i-1}| < \delta$ . Setze  $g(x) = f(\xi_i)$  für  $x \in (\xi_{i-1}, \xi_i]$  und  $g(\xi_0) = f(\xi_0)$ . Dann ist  $g \in T_A(\mathbb{R})$  und  $\|f - g\| < \varepsilon$ .  $\square$

*Beweis von Satz 3.7.* Für die Existenz von  $I(f)$  benutzt man die Methode des Beweises von Satz 2.24: Für gegebenes  $f \in CT_A(\mathbb{R})$  wähle eine Folge  $g_n \in T_A(\mathbb{R})$  mit  $\|f - g_n\| \rightarrow 0$  vermöge Lemma 3.8. Bezüglich der Supremumsnorm ist dann  $g_n$  eine Cauchyfolge in  $T_A(\mathbb{R})$ . Nach Lemma 3.1 ist damit  $I(g_n)$  (definiert in Lemma 3.5) eine reelle Cauchyfolge. Diese konvergiert gegen einen Grenzwert in  $\mathbb{R}$  und wir setzen

$$I(f) := \lim_n I(g_n) .$$

Durch Mischen von Folgen in  $T(\mathbb{R})$  zeigt man nun, daß  $I(f)$  nur von  $f$  und nicht von der Wahl der Hilfsfolge  $g_n \in T(\mathbb{R})$  abhängt. Man zeigt dann leicht die Linearität von  $I$  und die Translationsinvarianz mit Hilfe von Lemma 3.5. Ist  $f \geq 0$ , kann man oBdA die  $g_n \in T(\mathbb{R})$  durch die Treppenfunktionen  $\max(g_n, 0)$  ersetzen und damit  $g_n \geq 0$  und  $I(g_n) \geq 0$  annehmen. Dies beweist  $I(f) \geq 0$  für  $f \geq 0$ . Die Normierungseigenschaft ist trivial.

*Eindeutigkeit.* Seien  $I_1, I_2$  verschiedene Lösungen. Dann ist  $J = I_1 - I_2$  eine stetige  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung auf  $CT(\mathbb{R})$  und es gilt  $J(g) = 0$  für alle  $g \in T(\mathbb{R})$  wegen Lemma 3.5. Nach Definition gilt wegen  $g_n \in T(\mathbb{R})$  daher  $J(f) = \lim_n J(g_n) = 0$  für alle  $f \in CT(\mathbb{R})$ .  $\square$

### 3.4 Eigenschaften des Standardintegrals

Man hat folgende elementare **Substitutionsregel** für das Standardintegral

**Lemma 3.9.** Für reelle  $a, b$  und  $\lambda > 0$  und Funktionen  $f \in CT_{[\lambda a, \lambda b]}(\mathbb{R}) \subset CT(\mathbb{R})$  gilt

$$\frac{1}{\lambda} \int_{[\lambda a, \lambda b]} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{[a, b]} f(x) dx,$$

**Beweis.** Für  $f \in CT(\mathbb{R})$  ist  $h_f(x) := \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$  in  $CT(\mathbb{R})$ , und daher  $J(f) := \int_{\mathbb{R}} h_f(x) dx$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare monotone und translationsinvariante normierte Abbildung  $CT(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . [Wegen  $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(\frac{x}{\lambda}) dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\lambda]}(x) dx = \lambda$  ist  $J$  normiert]. Aus Satz 3.7 folgt  $J(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ . Es folgt  $\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$  für alle  $f \in CT(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Lemma 3.10.** Für alle  $f \in CT(\mathbb{R})$  und alle reellen Zahlen  $a \leq c \leq b$  gilt

$$\int_{[a, b]} f(x) dx = \int_{[a, c]} f(x) dx + \int_{[c, b]} f(x) dx.$$

**Beweis.** Benutze  $\chi_{[a, b]} = \chi_{[a, c]} + \chi_{[c, b]} - \chi_{[c, c]}$  und  $\int_{[c, c]} f(x) dx = f(c)I(\chi_{[c, c]}) = 0$ .  $\square$

### 3.5 Der Logarithmus

Für  $0 < a \leq b$  ist  $f(t) = \frac{1}{t}$  stetig auf  $[a, b]$ . Wegen  $C([a, b]) \leftrightarrow CT(\mathbb{R})$  ist daher nach Satz 3.7 das Integral  $\int_{[a, b]} \frac{dt}{t}$  erklärt. Dies definiert für  $x \geq 1$  den natürlichen **Logarithmus**

$$\log(x) := \int_{[1, x]} \frac{dt}{t}.$$

Aus Lemma 3.9 für  $\lambda = y$  folgt  $\int_{[y, xy]} \frac{dt}{t} = \int_{[1, x]} \frac{dt}{t}$  für  $x, y \geq 1$ . Wegen Lemma 3.10 gilt

$$\int_{[1, y]} \frac{dt}{t} + \int_{[y, xy]} \frac{dt}{t} = \int_{[1, xy]} \frac{dt}{t},$$

und zusammen genommen erhält man die **Funktionalgleichung**

$$\log(x) + \log(y) = \log(xy).$$

Beachte  $\log(1) = 0$ . Setzt man  $\log(x) := -\log(1/x)$  für  $x \in (0, 1)$ , folgt diese Formel dann rein formal für alle  $x, y > 0$ . Es gilt **Monotonie**:  $\log(b) - \log(a) = \log(b/a) > 0$  für alle  $b > a > 0$  [wegen  $b/a > 1$  und  $\log(x) > 0$  für  $x > 1$ ; beachte  $\log(x) \geq l([1, x]) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$  wegen  $\min_{t \in [1, x]} \frac{1}{t} = \frac{1}{x}$  und der Monotonie des Integrals  $\int_{[1, x]} \frac{dt}{t} \geq \int_{[1, x]} \frac{dt}{x}$ .] Dies zeigt

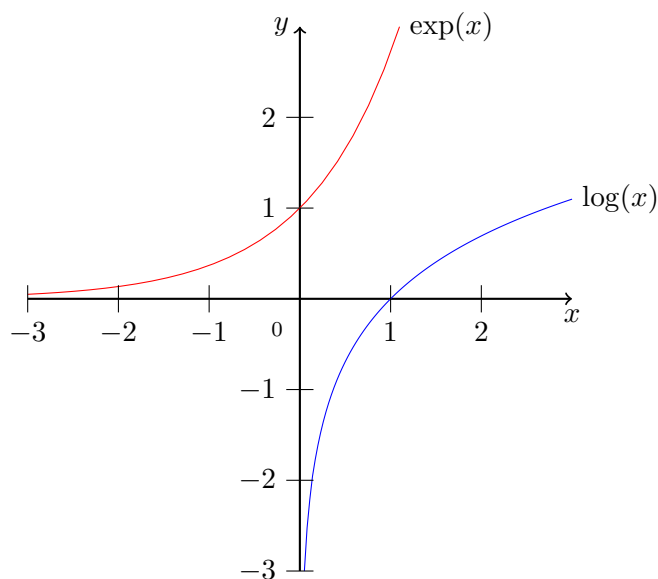
**Satz 3.11.** Der Logarithmus  $\log: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine streng monoton wachsende Funktion, und definiert einen Gruppenhomomorphismus von der multiplikativen Gruppe in die additive Gruppe

$$\log: (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +).$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß der Logarithmus sogar einen Isomorphismus definiert

$$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +).$$

Die Injektivität folgt sofort aus der strengen Monotonie. Für die Surjektivität genügt, daß jede Zahl  $\geq 0$  im Bild liegt. Wegen  $\log(2^n) = n \cdot \log(2)$  und  $\log(2) > 0$  nimmt  $\log(x)$  beliebig große Werte an. Andererseits gilt  $\log(x) - \log(y) \leq \frac{1}{a}|x - y|$  für  $x, y \in [a, b]$  (Boxungleichung) wegen  $\max_{t \in [a, b]} (\frac{1}{t}) = \frac{1}{a}$ . Also ist  $\log(x)$  eine Lipschitz-stetige Funktion auf  $[1, b]$ . Aus dem Zwischenwertsatz folgt dann, daß jede reelle Zahl  $\geq 0$  im Bild des Logarithmus liegt.



Die dadurch eindeutig bestimmte monotone Umkehrfunktion des Logarithmus ist die sogenannte **Exponentialfunktion**, die einen bijektiven Gruppenhomomorphismus

$$\exp: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$$

definiert mit  $\exp(0) = 1$ . Für alle reellen Zahlen  $x, y$  gilt daher die **Funktionalgleichung**

$$\boxed{\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)}.$$

**Notation.** Für beliebige reelle Zahlen  $\alpha$  und  $x > 0$  ist daher die  $\alpha$ -Potenz wohldefiniert

$$\boxed{x^\alpha := \exp(\alpha \cdot \log(x))}.$$

Es gilt  $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$  und  $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$  für alle reellen Zahlen  $x > 0$  und  $y > 0$ . Beachte, daß für natürliche Zahlen  $\alpha$  der Wert  $x^\alpha$  die übliche Potenz von  $x$  ist wegen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

### 3.6 Das mehrdimensionale Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$

Wir verallgemeinern jetzt das Standardintegrals auf den  $n$ -dimensionalen Fall. Betrachten wir zunächst den Raum  $T(\mathbb{R}^n)$  der Treppenfunktionen.

**Definition.** Wir definieren  $T(\mathbb{R}^n)$  induktiv, d.h. wir nehmen an die  $T(\mathbb{R}^m)$  seien für  $m < n$  bereits definierte Verbände auf  $\mathbb{R}^m$ . Per Definition liegt dann eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in  $T(\mathbb{R}^n)$ , wenn  $f(x)$  sich für  $x = (x_1, \dots, x_n)$  in der Form schreiben lässt

$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot \chi_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}(x_n) + \sum_{j=0}^m d_j(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot \chi_{[\xi_j, \xi_{j+1}]}(x_n)$$

für gewisse Funktionen  $c_i, d_j \in T(\mathbb{R}^{n-1})$  und gewisse reelle Zahlen  $\xi_0 \leq \dots \leq \xi_m$ . Wie in Lemma 3.4 folgt daraus sofort, daß  $T(\mathbb{R}^n)$  einen Verband auf  $\mathbb{R}^n$  definiert.

**Quader.** Sei  $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  ein beschränkter **Euklidischer Quader** im  $\mathbb{R}^n$ . Wir nehmen  $a_i \leq b_i$  an, lassen aber **degenerierte Quader** mit der Eigenschaft  $a_i = b_i$  zu. Durch Induktion nach  $n$  zeigt man dann leicht:  $\chi_A \in T(\mathbb{R}^n)$ , und  $T(\mathbb{R}^n)$  wird als Vektorraum von den charakteristischen Funktionen  $\chi_A$  der kompakten Quader  $A \subset \mathbb{R}^n$  erzeugt (Übungsaufgabe). Dies liefert sofort die Eindeutigkeitsaussage im nächsten

**Lemma 3.12.** *Es gibt eine eindeutig bestimmte  $\mathbb{R}$ -lineare monotone Abbildung*

$$I : T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft: Es gilt  $I(\chi_A) = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$  für kompakte Quader  $A = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ .

**Beweis.** Die Existenz von  $I$  folgt induktiv aus der Existenz einer  $\mathbb{R}$ -linearen monotonen Abbildung  $T(\mathbb{R}^n) \rightarrow T(\mathbb{R}^{n-1})$ , welche  $\chi_A$  auf  $|b_n - a_n| \cdot \chi_{A'}$ ,  $A' = \prod_{i=1}^{n-1} [a_i, b_i]$  abbildet. Die gesuchte relative Abbildung ist

$$f(x) \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt.$$

Sie ist offensichtlich  $\mathbb{R}$ -linear und monoton. Daß sie  $T(\mathbb{R}^n)$  in  $T(\mathbb{R}^{n-1})$  abbildet, ist klar. Es genügt daher für die Erzeuger  $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^n \chi_{[a_i, b_i]}(x_i)$  des Vektorraums  $T(\mathbb{R}^n)$  die einfache Formel

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt = \chi_{A'}(x_1, \dots, x_{n-1}) \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a_n, b_n]}(t) dt = \chi_{A'}(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot |b_n - a_n|.$$

□

**Bemerkung.** Lemma 3.8 überträgt sich auf  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $f \in C(A)$  und  $A \subset \mathbb{R}^n$  ein kompakter Quader und  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert<sup>4</sup> ein  $g \in T_A(\mathbb{R})$  mit  $\|f - g\| < \varepsilon$  (Supremumsnorm). Für den von den Funktionen  $\chi_A(x) \cdot f(x)$ , für kompakte Quader  $A$  und  $f \in C(\mathbb{R}^n)$ , aufgespannten  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $CT(\mathbb{R}^n)$  folgt daher (wie im Beweis von Satz 3.7)

<sup>4</sup>Hinweis: Zerlege dazu  $A$  äquidistant in halboffene 'Quader' der Gestalt  $\prod_{\nu=1}^n (a_\nu, b_\nu]$ ; verwende am Rand Durchschnitte der halboffenen Quader mit  $A$ . Oder man benutzt das allgemeinere Resultat 8.12.

**Satz 3.13.** Das Integral  $I : T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  aus Lemma 3.12 setzt sich auf eindeutige Weise zu einer  $\mathbb{R}$ -linearen monotonen Abbildung  $I : CT(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  fort.

Für den Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger gilt  $C_c(\mathbb{R}^n) = \bigcup_A C_A(\mathbb{R}^n)$ , die Vereinigung läuft über die kompakten Quader  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Also  $C_c(\mathbb{R}^n) \subset CT(\mathbb{R}^n)$ , und  $I$  definiert daher eine monotone  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$C_c(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$I(f) =: \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx,$$

das **Euklidische Standardintegral** auf  $\mathbb{R}^n$ . Wir setzen wieder  $\int_A f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) f(x) dx$  für Quader  $A$ ; und man schreibt oft auch  $dx_1 dx_2 \cdots dx_n$  anstelle von  $dx$ .

**Bemerkung.** Für *degenerierte* kompakte Quader  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt

$$\boxed{A \text{ degeneriert und } f \in C_c(\mathbb{R}^n) \implies \int_A f(x) dx = 0}.$$

In der Tat ist  $f$  beschränkt auf  $A$ . Wegen  $I(\chi_A) = 0$  folgt diese Behauptung daher aus der Boxungleichung (Abschnitt 3.1).

**Translationsinvarianz.** Unmittelbar aus Lemma 3.12 folgt für alle  $f \in CT(\mathbb{R}^n)$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} f(x + x_0) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx}.$$

## 3.7 Monotone Hüllen

Wir lösen uns jetzt von dem konkreten Fall  $X = \mathbb{R}^n$ . Sei  $X$  eine beliebige Menge, später meist aber ein metrischer Raum. Wir betrachten auf  $X$  jetzt auch allgemeiner beliebige Funktionen mit Werten in

$$\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \infty \quad \text{oder} \quad \mathbb{R}^- = \mathbb{R} \cup -\infty.$$

Im Gegensatz zu den reellwertigen Funktionen auf  $X$ , die in natürlicher Weise einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum bilden, ist der Raum aller  $\mathbb{R}^+$ -wertigen Funktionen auf  $X$  nur noch unter Addition und unter Multiplikation mit positiven Skalaren  $\lambda \geq 0$  abgeschlossen (Konvention:  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ ).

**Definition 3.14.** Eine Teilmenge  $B(X)$  der  $\mathbb{R}^+$ - (oder  $\mathbb{R}^-$ )-wertigen Funktionen auf  $X$  heisst **Halbverband**, wenn  $B(X)$  unter den Bildungen

$$\min(f(x), g(x)) \quad \text{und} \quad \max(f(x), g(x))$$

sowie unter Addition und Multiplikation mit reellen Skalaren  $\lambda \geq 0$  abgeschlossen ist.

Das einfachste Beispiel für einen Halbverband ist  $\mathbb{R}^+$ ; hier sei  $X$  einelementig. Jeder Verband ist ein Halbverband. Ist  $B(X)$  ein Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^\pm$ , dann ist  $-B(X)$  ein Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^\mp$  wegen  $\max(-f, -g) = -\min(f, g)$  etc.

**Lemma 3.15.** Ein Halbverband  $B(X)$  ist ein Verband  $\iff B(X) = -B(X)$ .

**Beweis.** Wir zeigen  $\Leftarrow$ : Alle  $f \in B(X)$  haben wegen  $B(X) = -B(X)$  Werte in  $\mathbb{R}$ . Wegen  $B(X) = -B(X)$  und den Halbverbandsaxiomen ist  $B(X)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Für  $f \in B(X)$  gilt  $f = f^+ + f^-$  für  $f^+ = \max(f, 0) \geq 0$  und  $f^- = \min(f, 0) \leq 0$  in  $B(X)$ . Nach Annahme gilt  $-f^- \in B(X)$ ; es folgt  $|f| = f^+ + (-f^-) \in B(X)$ . Also ist  $B(X)$  ein Verband.  $\square$

Die **monotone Hülle**  $B^+(X)$  eines Halbverbandes  $B(X)$  mit Werten in  $\mathbb{R}^+$  besteht aus allen Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  für die eine punktweise monotone aufsteigende Folge  $f_n \in B(X)$  existiert, d.h.  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots$  für alle  $x \in X$ , mit  $f(x) = \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$  oder kurz

$$f = \sup_n f_n = \sup f_n .$$

Wir schreiben symbolisch  $f_n \nearrow f$ , wenn  $f$  in diesem Sinne als punktweise ‘monotoner Limes’ von Funktionen  $f_n$  definiert ist.

Die **monotone Hülle**  $B^-(X)$ . Ist  $B(X)$  ein Verband oder ein Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^-$ , definiert man analog  $f_n \searrow f$  und  $B^-(X)$  mittels monoton fallender Limiten. Funktionen in  $B^-(X)$  haben dann Werte in  $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \cup -\infty$ . Alle Aussagen sind analog, so daß wir uns meist auf den Fall von Halbverbänden mit Werten in  $\mathbb{R}^+$  beschränken. Für einen Verband  $B(X)$  gilt offensichtlich

$$B^-(X) = -B^+(X) .$$

**Lemma 3.16.** Ist  $B(X)$  ein Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^+$ , dann ist auch  $B^+(X) \cong B(X)$  ein Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^+$ . Der Halbverband  $B^+(X)$  ist unter monoton wachsenden Limiten abgeschlossen: Aus  $f_i \nearrow f$  für  $f_i \in B^+(X)$  folgt  $f \in B^+(X)$ . Das heisst

$$B^{++}(X) = B^+(X) .$$

**Beweis.**  $B(X) \cong B^+(X)$ , denn für die konstante Folge  $f_n = f \in B(X)$  gilt  $f_n \nearrow f$ .

Für  $f_n, g_n \in B(X)$  mit  $f_n \nearrow f, g_n \nearrow g$  und  $\lambda > 0$  gilt  $f_n + g_n \nearrow f + g$  und  $\lambda f_n \nearrow \lambda f$ . Zum Nachweis von  $\max(f_n, g_n) \nearrow \max(f, g)$  beachte

$$\max(f_n, g_n) \leq \max(f_{n+1}, g_n) \leq \max(f_{n+1}, g_{n+1}) ,$$

da  $h \leq g$  die Ungleichungen  $\max(h, f) \leq \max(g, f)$  (und  $\min(h, f) \leq \min(g, f)$ ) impliziert. Für  $\min(f_n, g_n) \nearrow \min(f, g)$  benutze  $\min(f_n, g_n) \leq \min(f_{n+1}, g_n) \leq \min(f_{n+1}, g_{n+1})$ .

Für den Beweis der letzten Aussage wähle  $f_{ij} \nearrow f_i$  mit  $f_{ij} \in B(X)$ . Wegen  $f_{ij} \leq f_{i,j+1}$  für alle  $i + j = n$  gilt dann  $F_n := \max_{i+j=n}(f_{ij}) \nearrow f$  sowie  $F_n \in B(X)$ , also  $f \in B^+(X)$ .  $\square$

### 3.8 Abstrakte Integrale

**Satz 3.17.** Sei  $B(X) = C_c(X)$  der Verband der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf einem metrischen Raum  $(X, d)$  und sei  $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton und  $\mathbb{R}$ -linear. Dann ist  $I$  **halbstetig**, d.h. für eine monotone Folge  $f_n \in B(X)$  mit Grenzfunktion  $f \in B(X)$  konvergiert  $\lim_n I(f_n)$  monoton gegen  $I(f)$ .

**Beweis.** Ersetzt man  $f_n$  durch  $f_n - f$ , kann man oBdA  $f = 0$  annehmen. Ersetzt man  $f_n$  durch  $-f_n$ , ist oBdA  $f_n$  monoton fallend. Der Träger aller  $f_n$  ist damit im kompakten Träger von  $f_1$  enthalten. Aus dem *Satz von Dini* (Satz 2.26) folgt daher die gleichmässige Konvergenz der Folge  $f_n$  auf  $X$ . Aus der Monotonie von  $I$  und Lemma 3.1 folgt damit die Behauptung.  $\square$

Sei  $B(X)$  ein Halbverband (oBdA) mit Werten in  $\mathbb{R}^+$ . Für eine Abbildung  $I$  von  $B(X)$  in einen anderen Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^+$  betrachten wir folgende Eigenschaften

1. **Semilinearität:**  $I(f + g) = I(f) + I(g)$  sowie  $I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f)$  für reelles  $\lambda \geq 0$ .
2. **Monotonie:**  $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$
3. **Halbstetigkeit:**  $I(f_n) \nearrow I(f)$  für  $f_n \nearrow f$  und  $f, f_n \in B(X)$ .

**Definition 3.18.** Ein **abstraktes Integral** auf  $B(X)$  ist eine *semilineare monotone und halbstetige* Abbildung  $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  (d.h.  $I$  erfüllt die obigen Eigenschaften 1, 2 und 3).

**Beispiel 3.19.** Das Euklidische Standardintegral definiert auf  $C_c(\mathbb{R}^n)$  ein abstraktes Integral (Satz 3.17).

*Integrale auf Verbänden.* Aus 1) für  $\lambda = 0$  folgt  $0 \in B(X)$  und aus 1) Additivität folgt  $I(0) = 0$ . Ist  $B(X)$  sogar ein Verband, gilt  $f \in B(X) \implies -f \in B(X)$ . Aus 1) folgt dann  $I(-f) = -I(f)$  und insbesondere ist  $I(f) < \infty$  reell. Die Semilinearität von  $I$  ist damit auf Verbänden äquivalent zur  **$\mathbb{R}$ -Linearität** der Abbildung  $I$ . Ist  $B(X)$  ein Verband, folgt die Monotonie (Eigenschaft 2) bereits aus der schwächeren Bedingung  $f \geq 0 \implies I(f) \geq 0$ , indem man die Hilfsfunktion  $g - f \geq 0$  betrachtet.

**Satz 3.20 (Fortsetzungssatz).** Sei  $B(X)$  ein Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^+$  und sei  $I$  ein abstraktes Integral<sup>5</sup> auf  $B(X)$ . Dann setzt sich  $I$  auf eindeutige Weise zu einem abstrakten Integral  $I^+$  der monotonen Hülle  $B^+(X)$  fort

$$I^+ : B^+(X) \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Die analoge Aussage gilt, wenn man alle  $+$ -Zeichen durch  $-$ -Zeichen ersetzt.

**Beweis.** Existenz. Für  $g_n \nearrow g$  und  $g_n \in B$  setzen wir

$$I^+(g) := \sup_n I(g_n),$$

müssen aber zeigen, dass dieser Grenzwert  $I^+(g)$  nicht von der Wahl der Folge  $f_n \nearrow g$  mit  $f_n \in B$  abhängt. Mischen der Folgen wie im Beweis von Satz 3.7 zerstört die Monotonie der Folgen. Wir werden daher die Halbstetigkeit von  $I$  in Form von Lemma 3.21 ins Spiel bringen! Dieses Lemma zeigt  $I(f_n) \leq \sup I(g_n)$  und damit  $\sup I(f_n) \leq \sup I(g_n)$  im Limes. Vertauscht man die Rollen von  $f_n$  und  $g_n$ , folgt wie gewünscht  $\sup I(f_n) = \sup I(g_n)$ .

<sup>5</sup>oder allgemeiner: Eine beliebige semilineare monotone halbstetige Abbildung  $I : B(X) \rightarrow B'(Y)$  zwischen zwei Halbverbänden mit Werten (jeweils) in  $\mathbb{R}^+$  setzt sich eindeutig auf die monotonen Hüllen fort.

### 3 Integration

*Eindeutigkeit.* Für  $g \in B^+(X) = B^+$  wähle  $g_n \in B(X) = B$  mit  $g_n \nearrow g$ . Ein abstraktes Integral  $I^+$  auf  $B^+$  ist als Fortsetzung von  $I$  durch  $I^+(g) = \sup I^+(g_n) = \sup I(g_n)$  (wegen der Halbstetigkeit) eindeutig festgelegt.

*Semi-Linearität.* Diese folgt durch Limesbildung aus der Semilinearität von  $I$ .

*Monotonie:*  $f \leq g \implies I^+(f) \leq I^+(g)$ . [Für  $f, g \in B^+$  wähle  $f_n \nearrow f$  mit  $f_n \in B$ ; aus Lemma 3.21 folgt wieder  $I(f_n) \leq I^+(g)$  und damit  $I^+(f) \leq I^+(g)$  im Limes  $n \rightarrow \infty$ ].

*Halbstetigkeit.* Für  $f_n \in B^+$  mit  $f_n \nearrow f \in (B^+)^+ = B^+$  gilt  $\sup I^+(f_n) = I^+(f)$ . Benutze dazu die Hilfsfolge  $F_n \nearrow f$  definiert durch  $F_n = \max_{i+j=n} f_{ij} \in B$  wie in Lemma 3.16. Wegen  $F_n \leq f_n \leq f$  gilt  $I^+(f) := \sup I(F_n) \leq \sup I^+(f_n) \leq I^+(f)$ . Also  $\sup I^+(f_n) = I^+(f)$  (Halbstetigkeit).  $\square$

**Lemma 3.21.** Sei  $g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \dots$  eine monoton wachsende Folge von Funktionen  $g_n$  eines Halbverbandes  $B(X)$  mit Werten in  $\mathbb{R}^+$  und  $I$  ein abstraktes Integral auf  $B(X)$ . Dann gilt:  $B(X) \ni f \leq \sup_n g_n \implies I(f) \leq \sup_n I(g_n)$ .

**Beweis.** Aus  $f \leq \sup_n g_n$  folgt  $f_n \nearrow f \in B(X)$  für  $f_n := \min(f, g_n) \in B(X)$ , also  $I(f) = \sup I(f_n)$  wegen der Halbstetigkeit von  $I$ . Wegen  $f_n \leq g_n$  folgt aus der Monotonie  $I(f_n) \leq I(g_n)$ . Dies zeigt  $\sup_n I(f_n) \leq \sup_n I(g_n)$ .  $\square$

**Folgerung.** Das Euklidische Standardintegral

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

läßt sich zu einem abstrakten Integral  $I^- : C_c^-(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  fortsetzen.

Die monotone Hülle  $C_c^-(\mathbb{R}^n)$  aller monoton fallenden Folgen von Funktion  $f$  in  $C_c(\mathbb{R}^n)$  enthält wegen Beispiel 2.25 alle Funktionen der Gestalt  $\chi_A(x) \cdot f(x)$ , für beliebige abgeschlossene Teilmengen  $A$  von  $\mathbb{R}^n$  und beliebige nichtnegative Funktionen  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ .

Wir benutzen dies später bei dem Beweis der allgemeinen Substitutionsregel (Satz 4.27).

## 4 Differentiation

Eine Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}^n$  heisst **zulässig**, wenn für jeden Punkt  $\xi$  aus  $X$  ein abgeschlossener nicht degenerierter Quader  $Q$  existiert mit  $\xi \in Q \subset X$ .

Eine Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}^n$  (oder allgemeiner eine Teilmenge  $X$  eines metrischen Raumes) heisst **offen**, wenn für jeden Punkt  $\xi \in X$  eine Kugel  $B_r(\xi) = \{x \mid d(x, \xi) < r\}$  vom Radius  $r > 0$  existiert mit  $\xi \in B_r(\xi) \subset X$ .

Jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist zulässig. Der Durchschnitt von zwei offenen Mengen ist wieder offen. Dies gilt jedoch nicht für zulässige Mengen.

### 4.1 Das Landausymbol

Wir erklären in diesem Abschnitt, was es bedeuten soll, daß eine Funktion  $f$  *schneller in einem Punkt  $\xi$  gegen Null geht als jede von Null verschiedene lineare Funktion*. Man schreibt in diesem Fall nach Landau:  $f(x) = o(x - \xi)$ . Dies soll mit Lemma 4.1 präzise gemacht werden.

Sei dazu  $X$  eine Teilmenge des Euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$  und  $\xi \in X$  ein gegebener Punkt. Für eine Funktion

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

schreiben wir

$$\boxed{f(x) = o(x - \xi)},$$

wenn eine Funktion  $H : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  existiert, die stetig im Punkt  $\xi$  ist mit  $H(\xi) = 0$ , so daß gilt

$$\boxed{f(x) = \|x - \xi\|_{\mathbb{R}^n} \cdot H(x)}.$$

**Bemerkung.** Für Funktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  auf  $X$  mit Werten in  $\mathbb{R}^m$  sieht man sofort:  $f_i(x) = o(x - \xi) \implies \alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x) = o(x - \xi)$  für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Lemma 4.1.** Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  eine zulässige Teilmenge. Sei  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung und  $\xi$  aus  $X$ . Gilt  $L(x - \xi) = o(x - \xi)$  auf  $X$ , dann ist  $L = 0$ .

**Beweis.** OBdA ist  $X$  ein Quader und durch eine Translation ist oBdA  $\xi = 0$ . Für  $x \in X$  gilt

$$L(x) = \|x\| \cdot H(x)$$

## 4 Differentiation

sowie:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  mit  $\|x\| < \delta \implies \|H(x)\| < \varepsilon$ . Mit  $x$  liegt auch  $x/n$  im Quader  $X$ , für alle  $n \geq 1$  in  $\mathbb{N}$ . Da  $L$  linear ist, gilt  $L(x/n) = L(x)/n$ . Ist  $L(x) \neq 0$ , folgt daraus  $H(x) = H(x/n)$  wegen  $\|x/n\| = \|x\|/n$ . Für große  $n$  gilt  $\|x/n\| < \delta(\varepsilon)$  und damit  $\|H(x/n)\| < \varepsilon$ , also  $0 \leq \|H(x)\| < \varepsilon$ . Da dies bei festem  $x \in X$  für beliebiges  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt  $\|H(x)\| = 0$  und damit  $H(x) = 0$  (für alle  $x \in X$ ). Dies zeigt  $L(x) = 0$  für alle  $x \in X$ .

Da der Quader  $X$  eine Basis des Vektorraums  $\mathbb{R}^n$  enthält, folgt daraus  $L = 0$ .  $\square$

## 4.2 Differenzierbarkeit

Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  eine zulässige Teilmenge, und sei

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Funktion. Unter dieser Annahme machen wir nun die folgende

**Definition 4.2.**  $f$  heisst **differenzierbar** im Punkt  $\xi \in X$ , wenn es eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt, so dass gilt (\*)

$$\boxed{f(x) - f(\xi) - L(x - \xi) = o(x - \xi)}.$$

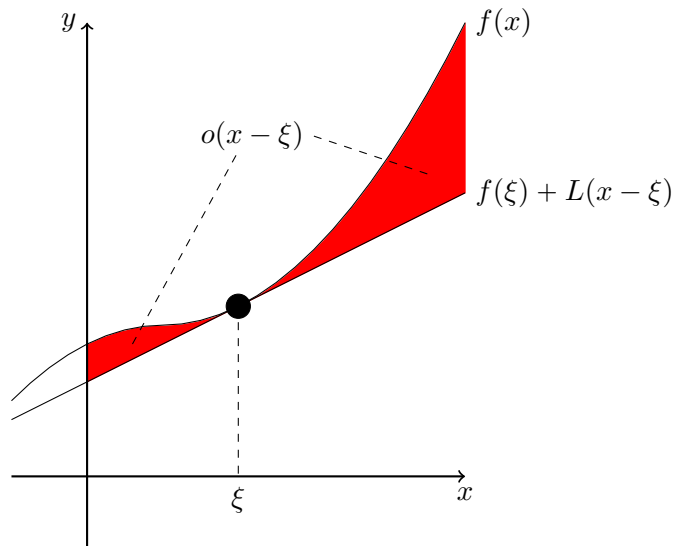
Gilt (\*), dann ist die (stetige) lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eindeutig bestimmt durch  $f$  und  $\xi$ , und man nennt  $L$  das Differential der Abbildung  $f$  im Punkt  $\xi$  und schreibt

$$L = Df(\xi).$$

Ableitung/Tangente im eindimensionalen Fall:



**Beweis.** Angenommen zwei lineare Abbildungen  $L_1, L_2$  erfüllen Eigenschaft (\*). Dann hätte die Differenz  $L = L_1 - L_2$  die Eigenschaft  $L(x - \xi) = o(x - \xi)$  auf  $X$ . Nach Lemma 4.1 folgt daraus  $L = 0$ .  $\square$

**Bemerkung.** Im Fall  $X \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , d.h. im Fall der Dimensionen  $n = m = 1$ , schreibt man  $Df(\xi)(x) = m \cdot x$  und benutzt für die *Tangentensteigung*  $m$  der Funktion  $f(x)$  im Punkt  $\xi$  folgende synonyme Notationen

$$m = \dot{f}(\xi) = f'(\xi) = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=\xi} = \frac{df(\xi)}{dx} = \frac{d}{dx} f(\xi) = \frac{\partial f(\xi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi) = \partial_x f(\xi).$$

**Definition 4.3.** Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt  $\xi \in X$  differenzierbar ist.

**Beispiel 4.4.** Seien  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$  Euklidische Räume und  $c \in \mathbb{R}^m$  eine Konstante und  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Dann ist die **affin lineare** Abbildung  $f(x) = c + L(x)$  differenzierbar, und hat in jedem Punkt  $\xi \in \mathbb{R}^n$  die Ableitung

$$Df(\xi) = L,$$

denn  $H(x) := f(x) - f(\xi) - L(x - \xi)$  ist Null, insbesondere gilt also  $H(x) = o(x - \xi)$ .

*Eine Reduktion.* Eine Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Werten in dem Euklidischen Vektorraum  $\mathbb{R}^m$  wird beschrieben durch  $m$  reellwertige Abbildungen  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, m$  (die sogenannten Komponenten  $f_i$  von  $f$ )

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdot \\ f_{m-1}(x) \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

**Lemma 4.5.**  $f(x)$  ist differenzierbar im Punkt  $\xi$  genau dann, wenn jede der Komponenten  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  differenzierbar ist im Punkt  $\xi$ .

**Beweis.** Die durch  $f(x) - f(\xi) - L(x - \xi) = \|x - \xi\| \cdot H(x)$  für  $x \neq \xi$  definierte vektorwertige Funktion  $H(x)$  konvergiert gegen Null für  $x \rightarrow \xi$  genau dann, wenn die Komponenten  $H_1(x), \dots, H_m(x)$  von  $H(x)$  gegen Null konvergieren für  $x \rightarrow \xi$ . Analog ist  $L$  (stetig und)  $\mathbb{R}$ -linear genau dann, wenn alle Komponenten  $L_1, \dots, L_m$  (stetige)  $\mathbb{R}$ -Linearformen sind.  $\square$

**Lemma 4.6.** Ist  $f$  differenzierbar im Punkt  $\xi$ , dann ist  $f$  stetig im Punkt  $\xi$ .

**Beweis.** Sowohl  $d(x, \xi) = \|x - \xi\|$  als auch  $H(x)$  sind stetig im Punkt  $\xi$ . Summen und Produkte in  $\xi$  stetiger reellwertiger Funktionen sind stetig in  $\xi$ . Daher sind die Komponenten der Funktion  $f(x) = f(\xi) + L(x - \xi) + \|x - \xi\| \cdot H(x)$  stetig im Punkt  $\xi$ . Dasselbe gilt daher auch für  $f(x)$ .  $\square$

#### 4 Differentiation

**Lemma 4.7 (Kettenregel).** Seien  $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$  nicht degenerierte Quader (oder allgemeiner zulässige Mengen) und  $Z = \mathbb{R}^k$ . Gegeben seien Abbildungen  $f, g$  sowie  $\xi \in X$  mit

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$\xi \xrightarrow{f} \eta = f(\xi)$$

Dann gilt: Ist  $f$  differenzierbar im Punkt  $\xi$  und ist  $g$  differenzierbar im Punkt  $\eta = f(\xi)$ , dann ist die Zusammensetzung  $g \circ f$  differenzierbar im Punkt  $\xi$  und es gilt für

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{Df(\xi)} \mathbb{R}^m \xrightarrow{Dg(\eta)} \mathbb{R}^k$$

die **Kettenregel**:  $D(g \circ f)(\xi) = Dg(\eta) \circ Df(\xi)$ .

**Beweis.** Die Differenzierbarkeit von  $f$  im Punkt  $\xi$  zeigt

$$(**) \quad f(x) = f(\xi) + Df(\xi)(x - \xi) + H(x) \cdot \|x - \xi\|$$

für eine Funktion  $H(x)$  mit  $\lim_{x \rightarrow \xi} \|H(x)\| = 0$ . Analog gilt

$$(*) \quad g(y) = g(\eta) + Dg(\eta)(y - \eta) + \tilde{H}(y) \cdot \|y - \eta\|$$

für eine Funktion  $\tilde{H}(y)$  mit  $\lim_{y \rightarrow \eta} \|\tilde{H}(y)\| = 0$ . Setzt man  $(**)$  in  $(*)$  ein, ergibt sich

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \stackrel{(*)}{=} g(\eta) + Dg(\eta)(f(x) - \eta) + \tilde{H}(f(x)) \cdot \|f(x) - \eta\|$$

$$\stackrel{(**)}{=} g(\eta) + Dg(\eta) \left( Df(\xi)(x - \xi) + H(x) \cdot \|x - \xi\| \right) + \tilde{H}(f(x)) \cdot \left\| Df(\xi)(x - \xi) + H(x) \cdot \|x - \xi\| \right\|$$

$$= (g \circ f)(\xi) + \left( Dg(\eta) \circ Df(\xi) \right) (x - \xi) + H_1(x) \cdot \|x - \xi\|$$

für

$$H_1(x) = Dg(\eta)(H(x)) + \tilde{H}(f(x)) \cdot \frac{\|Df(\xi)(x - \xi) + H(x) \cdot \|x - \xi\|\|}{\|x - \xi\|}.$$

Zweimaliges Anwenden der Dreiecksungleichung sowie die Ungleichung  $\|L(v)\| \leq \|L\| \|v\|$  für  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen  $L$  zeigt

$$\|H_1(x)\| \leq \|Dg(\eta)\| \cdot \|H(x)\| + \|\tilde{H}(f(x))\| \cdot (\|Df(\xi)\| + \|H(x)\|).$$

$f$  ist nach Lemma 4.6 stetig im Punkt  $\xi$ , also  $\lim_{x \rightarrow \xi} \|\tilde{H}(f(x))\| = \lim_{y \rightarrow \eta} \|\tilde{H}(y)\| = 0$  für  $y = f(x)$ . Wegen  $\lim_{x \rightarrow \xi} \|H(x)\| = 0$  folgt insgesamt  $\lim_{x \rightarrow \xi} \|H_1(x)\| = 0$ . Also ist  $g \circ f$  differenzierbar im Punkt  $\xi$  mit dem Differential  $L = Dg(\eta) \circ Df(\xi)$ .  $\square$

## 4.3 Die Jacobi-Matrix

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine zulässige Teilmenge im Euklidischen Raum und

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine im Punkt  $\xi \in X$  differenzierbare Abbildung.

Für  $t \in (-\varepsilon, 0]$  oder  $[0, \varepsilon)$  liegt  $i_\nu(t) := \xi + t \cdot e_\nu$  in  $X$  für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  (hierbei sei  $e_\nu$  der  $\nu$ -te Basisvektor des  $\mathbb{R}^n$ ). Sei  $p_\mu: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  die Projektion auf die  $\mu$ -te Koordinate. Die Zusammensetzung

$$p_\mu \circ f \circ i_\nu(t) = f_\mu(\xi_1, \dots, \xi_{\nu-1}, \xi_\nu + t, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_n)$$

ist reellwertig und definiert auf einem zulässigen Intervall in  $\mathbb{R}$ ; und ist nach der Kettenregel differenzierbar im Punkt  $t = 0$  als Zusammensetzung von  $i_\nu$  (affin linear),  $f$  und  $p_\mu$  (linear). Die Kettenregel berechnet die Ableitung nach  $t$  im Punkt  $t = 0$

$$\left. \frac{d}{dt} f_\mu(\xi_1, \dots, \xi_{\nu-1}, \xi_\nu + t, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_n) \right|_{t=0} = Dp_\mu(\eta) \circ Df(\xi) \circ Di_\nu(0).$$

Beispiel 4.4 berechnet zwei der Terme der rechten Seite. Bezeichne  $J(f)(\xi)$  die der linearen Abbildung  $D(f)(\xi): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  zugeordnete  $m \times n$ -Matrix. Dies ergibt für die linke Seite, welche man die **partielle Ableitung** von  $f$  im Punkt  $\xi$  nennt, in Matrixschreibweise die Formel

$$\frac{\partial f_\mu(\xi)}{\partial x_\nu} = (0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0) \cdot Jf(\xi) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = Jf(\xi)_{\mu\nu}.$$

Auf der rechten Seite steht dann der Matrixkoeffizient  $Jf(\xi)_{\mu\nu}$  von  $Jf(\xi)$  an der  $\mu, \nu$ -ten Stelle.

*Wir fassen zusammen: Differenzierbarkeit im Punkt  $\xi$  impliziert partielle Differenzierbarkeit im Punkt  $\xi$ , und die Ableitung  $Df(\xi)$  wird als lineare Abbildung gegeben durch die Matrix  $J(f)(\xi)$  (**Jacobimatrix**) der partiellen Ableitungen für  $\nu = 1, \dots, n$  und  $\mu = 1, \dots, m$*

$$Df(\xi) \leftrightarrow J(f)(\xi) = \left( \frac{\partial f_\mu(\xi)}{\partial x_\nu} \right).$$

Die **Kettenregel** (Lemma 4.7), via Matrixmultiplikation  $J(g \circ f)(\xi)_{\lambda\nu} = \sum_{\mu=1}^m Jg(\eta)_{\lambda\mu} Jf(\xi)_{\mu\nu}$ , liefert daher

$$\frac{\partial (g \circ f)_\lambda(\xi)}{\partial x_\nu} = \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial g_\lambda(\eta)}{\partial y_\mu} \cdot \frac{\partial f_\mu(\xi)}{\partial x_\nu}.$$

**Notation.** Wir schreiben oft  $\partial_\nu g$  anstelle von  $\frac{\partial g}{\partial x_\nu}$  und manchmal  $Df(\xi)$  anstatt  $Jf(\xi)$ .

## 4.4 Extremwerte

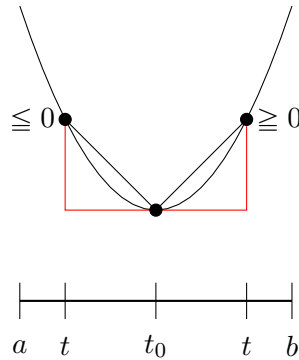
Jede differenzierbare Funktion  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine stetige Funktion (Lemma 4.6) und nimmt damit auf dem Intervall  $[a, b]$  Minimum und Maximum an (Satz 2.10). Sei

$$t_0 \in (a, b)$$

ein *innerer* Punkt, in dem  $h$  sein Minimum annimmt. Wählt man eine Folge  $t \rightarrow t_0$ , deren Glieder alle von  $t_0$  verschieden sind, dann impliziert die Differenzierbarkeit von  $h$  im Punkt  $t_0$

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \rightarrow h'(t_0) + \lim_{t \rightarrow t_0} \left( H(t) \cdot \frac{|t - t_0|}{t - t_0} \right) = h'(t_0).$$

wegen  $Dh(t_0) = H'(t_0)(t - t_0)$  und  $\lim_{t \rightarrow t_0} H(t) = 0$ . Der Zähler  $h(t) - h(t_0)$  der linken Seite ist nach Annahme nicht negativ. Wählt man eine Folge von Punkten  $t \in (0, 1)$  für die alle  $t - t_0 > 0$  sind, folgt daher im Limes  $h'(t_0) \geq 0$ .



Wählt man eine Folge, deren Glieder  $t - t_0 < 0$  sind, folgt  $h'(t_0) \leq 0$ . Wegen  $t_0 \in (0, 1)$  sind beide Möglichkeiten von Folgen realisierbar. Aus  $t_0 \in (a, b)$  folgt somit (\*)

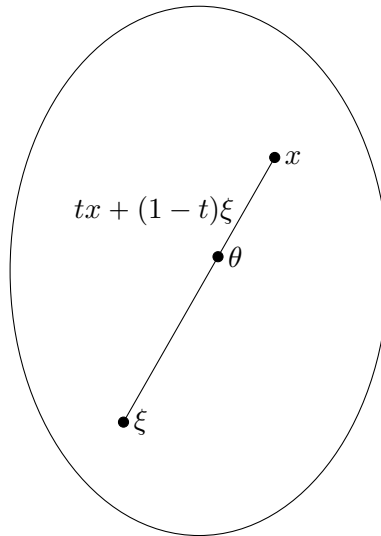
$$\boxed{h'(t_0) = 0}.$$

**Satz 4.8 (Mittelwertsatz).** Sei  $X$  zulässig im  $\mathbb{R}^n$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Seien  $x, \xi \in X$  feste Punkte und die Verbindungsgerade  $\{tx + (1 - t)\xi \mid t \in [0, 1]\}$  liege ganz in  $X$  (z.B. wenn  $X$  ein Quader ist). Dann gibt einen Punkt  $\theta \in X$

$$\theta = tx + (1 - t)\xi \quad , \quad 0 < t < 1$$

mit der Eigenschaft

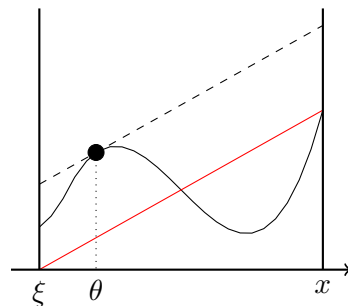
$$\boxed{f(x) - f(\xi) = Df(\theta)(x - \xi)}.$$



**Beweis.** Ist  $f$  affin linear, gilt diese Aussage für alle  $x$  und  $\theta$ . Daher kann man eine geeignete affin lineare Abbildung von  $f$  subtrahieren und oBdA annehmen

$$f(x) = f(\xi) = 0.$$

Für  $h(t) = f(tx + (1-t)\xi)$  liefert die Kettenregel die Formel  $h'(t_0) = Df(\theta)(x - \xi)$  mit  $\theta = t_0x + (1-t_0)\xi$ . Dies reduziert auf folgende *Aufgabe*: Suche für die differenzierbare Funktion  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(0) = h(1) = 0$  ein  $0 < t_0 < 1$  mit  $h'(t_0) = 0$ . Die *Lösung*: Für ein Maximum oder Minimum von  $h$  in  $t_0 \in (0, 1)$  gilt  $h'(t_0) = 0$  nach (\*). Beide Extremwerte existieren, da  $h$  stetig und  $[0, 1]$  folgenkompakt ist. Wegen  $h(0) = h(1) = 0$  existiert mindestens ein Extremwert in einem inneren Punkt  $t_0 \in (0, 1)$ .  $\square$



**Folgerung.** Gilt  $Df(\xi) = 0$  für alle  $\xi \in U$  und ist  $U$  offen, dann ist  $f$  lokalkonstant<sup>1</sup> auf  $U$ .

**Lemma 4.9 (Extremwerte).** Sei  $f$  eine differenzierbare reellwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{R}^n$ . Nimmt  $f$  in  $\xi \in U$  ein Maximum (analog Minimum) an, dann verschwindet die Jacobimatrix im Punkt  $\xi$  (man nennt solche Punkte **kritische Punkte**)

$$\boxed{f(\xi) = \max_{x \in U} f(x) \implies Df(\xi) = 0}.$$

<sup>1</sup>d.h., für jeden Punkt  $x \in U$  gibt es eine offene Kugel um  $x$  in  $U$ , auf der  $f$  konstant ist.

## 4 Differentiation

**Beweis.**  $x_i = \xi_i$  ist ein Extremwert der eingeschränkten Funktion  $f(\xi_1, \dots, x_i, \dots, \xi_n)$  für festes  $\xi$ . Daher gilt  $\partial_i f(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n) = \partial_i f(\xi) = 0$  nach (\*) für alle  $i$ , also  $Df(\xi) = 0$ .  $\square$

Die Umkehrung gilt bekanntlich nicht! Die Funktion  $f(x) = -x^3$  hat einen kritischen Punkt bei  $x = 0$ , obwohl an dieser Stelle kein Extremwert vorliegt. Aber es gilt

**Lemma 4.10.** Sei  $h : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Gilt  $h'(0) = 0$  und  $h''(\eta) < 0$  für alle  $\eta \in (0, r)$ , dann gilt  $h(t) < h(0)$  für alle  $0 < t \leq r$ .

**Beweis.** Aus dem Mittelwertsatz folgert man die Existenz von Punkten  $0 < \eta < \theta < t$  mit  $h(t) - h(0) = t \cdot h'(\theta)$  und  $h'(\theta) - h'(0) = \theta \cdot h''(\eta)$ . Aus  $h'(0) = 0$  folgt daher  $h'(\theta) < 0$ , und damit  $h(t) - h(0) < 0$ .  $\square$

## 4.5 Symmetrie der Hessematrix

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  zulässig und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $C^2(U)$ , d.h.  $f$  sei eine zweimal stetig partiell differenzierbare reellwertige Funktion auf  $U$ . Damit sei gemeint, daß  $f$  zweimal partiell differenzierbar auf  $U$  ist für alle Koordinatenrichtungen, und daß diese partiellen Ableitungen stetige Funktionen auf  $U$  definieren. Unter dieser Annahme ist die **Hessematrix**  $Hess_\xi(f)$

$$Hess_\xi(f) = \begin{pmatrix} \partial^2 f(\xi) \\ \partial x_i \partial x_j \end{pmatrix}$$

als reelle  $n \times n$ -Matrix für alle Punkte  $\xi \in U$  definiert. Die Koeffizienten  $Hess_x(f)_{ij}$  der Hessematrix sind nach Annahme stetige reellwertige Funktionen der Variable  $x \in U$ .

**Satz 4.11.** Unter den obigen Annahmen an  $f$  und  $U$  ist die Hessematrix  $Hess_\xi(f)$  eine symmetrische reelle  $n \times n$ -Matrix für alle  $\xi \in U$ .

**Beweis.** Es genügt der Fall einer Funktion in zwei Variablen  $f(x, y)$ . Wäre  $f_{xy}(\xi) \neq f_{yx}(\xi)$ , gäbe es aus Stetigkeitsgründen einen nicht degenerierten kleinen Quader  $Q$  um den Punkt  $\xi$  mit

$$\partial_x \partial_y f(\theta) \neq \partial_y \partial_x f(\eta) \quad \text{für alle } \theta, \eta \in Q.$$

Setzt man  $g(x) = f(x, x_2) - f(x, \xi_2)$ , ist  $F := f(x_1, x_2) - f(x_1, \xi_2) - f(\xi_1, x_2) + f(\xi_1, \xi_2)$  gleich  $F = g(x_1) - g(\xi_1)$ . Für  $x = (x_1, x_2) \in Q$  liefert zweimaliges Anwenden des Mittelwertsatzes

$$F = (x_1 - \xi_1) \cdot g'(\theta_1) = (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \cdot \partial_y \partial_x f(\theta_1, \theta_2).$$

Hierbei weiß man  $\theta_1 \in (x_1, \xi_1)$  und  $\theta_2 \in (x_2, \xi_2)$ , also  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in Q$ . Ebenso gilt auch  $F = h(x_2) - h(\xi_2)$  für  $h(y) = f(x_1, y) - f(\xi_1, y)$ . Dies liefert vollkommen analog

$$F = (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \cdot \partial_x \partial_y f(\eta_1, \eta_2)$$

für ein  $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in Q$ . Offensichtlich ein Widerspruch, da  $x_2 \neq \xi_2$  und  $x_1 \neq \xi_1$  gewählt werden kann und dann die rechten Seiten, die beide  $F$  berechnen, verschieden wären!  $\square$

## 4.6 Lokale Maxima

Eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix  $H$  mit reellen Koeffizienten  $H_{ij}$  heisst positiv definit und man schreibt  $H > 0$ , wenn für alle Vektoren  $v = (v_1, \dots, v_n) \neq 0$  gilt

$${}^T v H v = \sum_{1 \leq i, j \leq n} v_i v_j H_{ij} > 0.$$

Ist  $-H$  positiv definit, nennt man  $H$  negativ definit und schreibt  $H < 0$ .

**Satz 4.12.** Sei  $U$  zulässig im  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in C^2(U)$ . Gilt

$$\boxed{Df(\xi) = 0 \quad \text{und} \quad \text{Hess}_\xi(f) < 0 \quad (\text{resp. } \text{Hess}_\xi(f) > 0)},$$

dann ist  $f(\xi)$  ein **lokales striktes Maximum (Minimum)** von  $f$  auf jedem nichtdegenerierten Quader  $Q$  in  $U$ , der  $\xi$  enthält. Insbesondere gibt es eine offene Teilmenge  $V$  von  $U$ , welche  $\xi$  enthält, so dass gilt

$$\boxed{f(\xi) = \max_{x \in V} f(x)}$$

(resp.  $f(\xi) = \min_{x \in V} f(x)$ ).

Setzt man  $H(x) := \text{Hess}_x(f)$ , gilt unter den Voraussetzungen von Satz 4.12

**Lemma 4.13.** Ist  $H(\xi) < 0$ , dann gibt es eine Konstante  $C > 0$  und ein  $r > 0$ , so daß für alle  $x \in Q$  in der offenen Kugel um  $\xi$  vom Radius  $r$  gilt

$$\boxed{{}^T v H(x) v \leq -C \|v\|^2}.$$

**Beweis.** ObdA genügt es dazu die Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$  aller Vektoren  $v$  von der Länge 1 zu betrachten, und die  $x$  aus einer abgeschlossenen beschränkten Kugel  $K$  von positivem Radius  $r$  um  $\xi$ . Dann ist  $S \times K$  folgenkompakt und die Aussage folgt aus Satz 2.10, vorausgesetzt  ${}^T v H(x) v < 0$  gilt für alle  $(v, x) \in S \times K$ . Angenommen dies wäre nicht der Fall, egal wie klein man  $r$  wählt. Dann existiert eine Folge  $x_m \rightarrow \xi$  und Vektoren  $v_m \neq 0$  der Länge 1 mit

$${}^T v_m H(x_m) v_m \geq 0.$$

Da die Einheitskugel  $S$  abgeschlossen und beschränkt und damit folgenkompakt ist, kann man durch Übergang zu einer Teilfolge annehmen  $v_m \rightarrow v$  für einen Vektor  $v$  der Länge 1. Daraus folgt im Limes  $m \rightarrow \infty$

$${}^T v H(\xi) v \geq 0, \quad v \neq 0$$

im Widerspruch zur Annahme. □

Zum Beweis des Satzes 4.12 fixiere  $Q \subseteq U$ ,  $r > 0$  und  $v \in S$  mit  $\xi + tv \in Q$  für  $0 \leq t \leq r$ .

#### 4 Differentiation

**Beweis.** Setze  $h(t) = f(\xi + tv)$ . Aus  $h'(t) = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i f(\xi + tv)$  und  $Df(\xi) = 0$  folgt dann  $h'(0) = 0$ . Ein weiteres Anwenden der Kettenregel liefert

$$h''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i v_j \partial_j \partial_i f(\xi + tv) = {}^T v \text{Hess}_{\xi+tv}(f) v.$$

Lemma 4.13 zeigt  $h''(t) < 0$  für  $v \in S$  und  $t \in (0, r)$ . Der Satz folgt damit aus Lemma 4.10.  $\square$

### 4.7 Der Hauptsatz

**Satz 4.14.** Sei  $a < b$  und sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist

$$F(x) := \int_{[a,x]} f(t) dt$$

eine differenzierbare Funktion auf dem Intervall  $[a, b]$ , und es gilt

$$F'(x) = f(x).$$

Jede andere differenzierbare Funktion  $G(x)$  auf  $[a, b]$  mit der Eigenschaft  $G'(x) = f(x)$  (solche Funktionen  $G$  nennt man **Stammfunktionen** von  $f$ ) unterscheidet sich von  $F(x)$  um eine reelle additive Konstante  $C$ , d.h. es gilt  $F(x) = G(x) + C$ .

**Beweis.** Sei  $\xi \in [a, b]$ . Für  $h(x) = F(x) - F(\xi) - f(\xi) \cdot (x - \xi)$  ist  $h(x) = o(x - \xi)$  zu zeigen. Dazu genügt, daß für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit der Eigenschaft  $|h(x)| < |x - \xi| \cdot \varepsilon$  für alle  $x$  mit der Eigenschaft  $|x - \xi| < \delta$ . Dabei können wir  $h(x)$  durch  $-h(x)$  ersetzen.

Je nachdem ob  $x \geq \xi$  oder  $x \leq \xi$  gilt nach Lemma 3.10

$$\pm h(x) = \int_{[a,x]} f(t) dt - \int_{[a,\xi]} f(t) dt - \int_{[\xi,x]} f(\xi) dt = \int_{[\xi,x]} (f(t) - f(\xi)) dt.$$

Aus der Boxungleichung (Abschnitt 3.1) folgt daher

$$|h(x)| \leq |x - \xi| \cdot \sup_{t \in [\xi,x]} |f(t) - f(\xi)|.$$

Die Funktion  $f(x)$  ist stetig im Punkt  $\xi$ . Es folgt  $\sup_{t \in [\xi,x]} |f(t) - f(\xi)| < \varepsilon$  für alle  $t \in [\xi, x]$ , falls  $|x - \xi| < \delta$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon)$ . Dies zeigt die erste Behauptung. Der verbleibende Zusatz folgt aus dem Mittelwertsatz: Die Ableitung von  $F(x) - G(x)$  ist Null auf  $[a, b]$ . Nach Satz 4.8 ist daher  $F(x) - G(x)$  konstant auf  $[a, b]$ .  $\square$

**Konvention.** Man definiert ganz allgemein für eine stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und beliebige  $x, y \in [a, b]$  das **orientierte Integral**

$$\int_x^y f(t) dt$$

durch  $\int_{[x,y]} f(t)dt$  im Fall  $x \leq y$ , bzw. durch  $-\int_{[y,x]} f(t)dt$  im Fall  $y \leq x$ . Mit dieser Konvention gilt dann wegen Lemma 3.10 und dem Hauptsatz für jede Stammfunktion  $G$  von  $f$  auf  $[a, b]$  die Formel

$$\boxed{\int_x^y f(t)dt = G(y) - G(x)} .$$

**Folgerung.**  $\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$  ist differenzierbar<sup>2</sup> auf  $\mathbb{R}_{>0}$  mit Ableitung  $\frac{1}{x}$ .

## 4.8 Differentialgleichungen

Gegeben sei eine stetige Funktion  $a = a(x, y)$  der reellen Variablen  $x \in [c, d]$  und  $y \in \mathbb{R}^N$

$$a : [c, d] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N .$$

Gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit der Eigenschaft

$$\boxed{f'(x) = a(x, f(x)) \quad \text{und} \quad f(x_0) = y_0}$$

für ein vorgegebenes  $x_0 \in [c, d]$  und vorgegebenen **Anfangswert**  $y_0 \in \mathbb{R}^N$ . Hierbei bezeichne  $f'(x)$  die komponentenweise Ableitung von  $f$  nach  $x$ .

**Satz 4.15 (Picard).** Sei  $a(x, y)$  ausserdem Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}^N$  in der Variable  $y$  mit einer nicht von  $x$  abhängigen Lipschitzkonstante  $M$ . Dann existiert auf  $[c, d]$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $f(x) \in C^1([c, d], \mathbb{R}^N)$  der Differentialgleichung  $f'(x) = a(x, f(x))$  zu jedem gegebenem Anfangswert  $f(x_0) = y_0$ .

Nach Annahme gilt  $\|a(x, y_1) - a(x, y_2)\|_{\mathbb{R}^N} \leq M \cdot \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^N}$  für eine Lipschitz-Konstante  $M$ , welche nicht (!) von der Variable  $x \in [c, d]$  abhängt.

**Beweis.** Die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung ist wegen unserem Hauptsatz 4.14 äquivalent zu einer Integralgleichung:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ ist differenzierbar auf } [c, d] \\ f'(x) = a(x, f(x)), f(x_0) = y_0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ ist stetig auf } [c, d] \\ f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x a(t, f(t)) dt \end{array} \right.$$

*Beweis der Äquivalenz von rechts nach links.* Nach Annahme sind  $a(t, y)$  und  $f(t)$ , und daher auch  $a(t, f(t))$ , stetig. Das vektorwertige Integral  $F(x) = \int_{x_0}^x a(t, f(t)) dt$  ist komponentenweise definiert und alle Komponenten sind in der Variable  $x$  differenzierbare Funktionen (Hauptsatz) und für den Vektor der Ableitungen gilt  $F'(x) = a(x, f(x))$ . Aus  $f(x) = y_0 + F(x)$  folgt daher durch Ableiten  $f'(x) = a(x, f(x))$ . Für  $x = x_0$  gilt  $f(x_0) = y_0$  wegen  $F(x_0) = 0$ .

<sup>2</sup>Wegen der Kettenregel gilt daher  $\lim_{x \rightarrow 0} \log(1 + yx)/x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+yx)-0}{x-0} = \log(1+yx)'|_{x=0} = y$ . Anwenden der stetigen Funktion  $\exp$  für  $x_n = \frac{1}{n}$  liefert die nützliche Formel  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{y}{n})^n = \exp(y)$ .

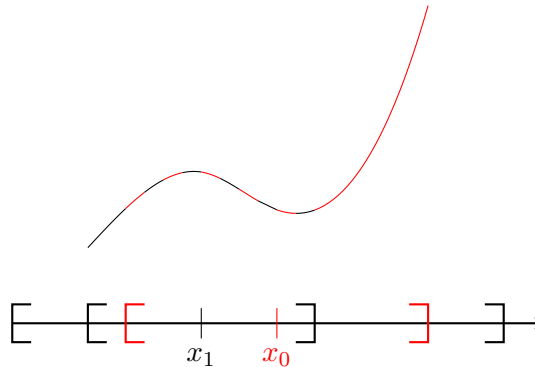
#### 4 Differentiation

*Beweis der Äquivalenz von links nach rechts.* Ist  $f(x)$  differenzierbar, dann ist  $f(x)$  stetig nach Lemma 4.6. Aus dem Hauptsatz folgt andererseits

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt = \int_{x_0}^x a(t, f(t)) dt .$$

Mit Hilfe der gezeigten Äquivalenz genügt es also die entsprechende Integralgleichung auf  $[c, d]$  zu lösen. Wir lösen die Integralgleichung (und damit die Differentialgleichung) dazu zuerst *lokal* auf Teilintervallen genügend kleiner Länge  $< \frac{1}{M\sqrt{N}}$ .

**Verheftung.** Angenommen die Lösung der Differential-(oder Integral)gleichung existiert und ist lokal eindeutig auf jedem Teilintervall von  $[c, d]$  der Länge  $< \frac{1}{M\sqrt{N}}$ . Man überdeckt dann das Intervall  $[c, b]$  durch überlappende Teilintervalle der Länge  $< \frac{1}{M\sqrt{N}}$ , wählt Hilfspunkte  $x_i$  in den Überlappungen und wendet das lokale Resultat sukzessive für alle Hilfspunkte  $x_i$  an. Dies reduziert den allgemeinen Fall auf den Beweis der lokalen Version mit Intervalllänge  $< \frac{1}{M\sqrt{N}}$ .



**Beweis der lokalen Version.** Der Raum  $X = C([c, d], \mathbb{R}^N)$  aller stetigen  $\mathbb{R}^N$ -wertigen Funktionen, versehen mit der Supremums-Norm, ist ein vollständiger metrischer Raum (nach Satz 2.24). Die Selbstabbildung  $F : X \rightarrow X$

$$F(f)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x a(t, f(t)) dt$$

ist wohldefiniert, denn für stetiges  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist auch  $F(f) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$  stetig und sogar komponentenweise differenzierbar. Die Lösung unserer (lokalen) Integralgleichung ist äquivalent zu der Fixpunktgleichung

$$F(f) = f \quad , \quad f \in X .$$

Unsere Behauptung über die *lokale* Existenz und Eindeutigkeit ergibt sich jetzt sofort aus dem **Banachschen Fixpunktsatz**, denn im Fall  $|d - c| < \frac{1}{M\sqrt{N}}$  ist  $F : X \rightarrow X$  kontraktiv wegen

$$d_X(F(f), F(g)) = d_X \left( y_0 + \int_{x_0}^x a(t, f(t)) dt , y_0 + \int_{x_0}^x a(t, g(t)) dt \right)$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \sup_{x \in [c, d]} \left\| \int_{x_0}^x \left( a(t, f(t)) - a(t, g(t)) \right) dt \right\|_{\mathbb{R}^N}$$

Abschätzen des Integralvektors im  $\mathbb{R}^N$  (siehe Seite 13) liefert für  $\kappa = |d - c|M\sqrt{N}$

$$\begin{aligned} d_X(F(f), F(g)) &\leq \sqrt{N} \cdot |d - c| \cdot \sup_{t \in [c, d]} \|a(t, f(t)) - a(t, g(t))\|_{\mathbb{R}^N} \\ &\leq \sqrt{N}|d - c|M \cdot \sup_{t \in [c, d]} \|f(t) - g(t)\|_{\mathbb{R}^N} = \kappa \cdot d_X(f, g) \end{aligned}$$

mit Hilfe der Boxungleichung und der Lipschitzstetigkeit von  $h$ . Aus  $|d - c| < \frac{1}{M \cdot \sqrt{N}}$  folgt die gewünschte Kontraktivität  $\kappa < 1$ .  $\square$

**Beispiel 4.16.** Ist  $a(x, y)$  linear in  $y \in \mathbb{R}^N$

$$a(x, y) = A(x) \cdot y + b(x)$$

mit einer  $N \times N$ -Matrixfunktion  $A(x)$  und einem Vektor  $b(x)$ , welche stetig von  $x$  abhängen, dann sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard erfüllt. [Benutze Satz 2.10 und den Beweis von Beispiel 2.2 (4).]

**Beispiel 4.17.** Um für  $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}^N$  allgemeinere Differentialgleichungen vom Typ

$$\boxed{g^{(n)}(x) = H(x, g(x), \dots, g^{(n-1)}(x))}$$

mit der Anfangswertbedingung  $g(x_0) = \eta_0, \dots, g^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}$  zu behandeln, definiert man die Hilfsfunktion  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$  durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \\ \dots \\ g^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nN}$$

und erhält eine äquivalente Differentialgleichung

$$\boxed{f'(x) = a(x, f(x)) \quad , \quad f(x_0) = y_0} \quad , \quad y_0 = (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})$$

wobei  $a: [c, d] \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$  definiert wird als

$$(x; y_0, \dots, y_{n-1}) \mapsto (y_1, \dots, y_{n-1}, H(x, y_1, \dots, y_{n-1})) .$$

Kombiniert man unsere letzten beiden Beispiele 4.16 und 4.17, erhält man folgende Aussage über lineare Differentialgleichungen auf einem Intervall  $[c, d]$ ,  $c < d$ .

#### 4 Differentiation

**Satz 4.18.** Seien  $a_0(x), \dots, a_n(x)$  stetige reellwertige Funktionen auf  $[c, d]$ . Seien  $x_0 \in [c, d]$  und  $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann besitzt die **lineare Differentialgleichung**

$$(*) \quad \boxed{g^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot g^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x) \cdot g'(x) + a_n(x) \cdot g(x) = a_0(x)}$$

zu gegebenen Anfangsbedingungen

$$g(x_0) = \eta_0, \dots, g^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}$$

eine eindeutige Lösung  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , welche  $n$ -mal stetig differenzierbar ist auf  $[c, d]$ .

**Beweis.** Die Methode von Beispiel 4.17 führt auf eine vektorwertige lineare Differentialgleichung  $f'(x) = A(x) \cdot f(x) + b(x)$  wie in Beispiel 4.16, hier für die Matrixfunktion

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \dots & -a_2(x) & -a_1(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Vektors  $b(x)$  sind hierbei Null bis auf die letzte  $b_n(x) := a_0(x)$ .  $\square$

Ist  $b(x) = 0$  oder äquivalent dazu  $a_0(x) = 0$ , nennt man die obige lineare Differentialgleichung **homogen**. Die Lösungen einer homogen linearen Differentialgleichung wie in Satz 4.18 bilden einen reellen Vektorraum  $V$  von Funktionen, wenn man die Forderung von Anfangswertbedingungen weglässt, denn für Lösungen  $g(x)$  und  $\tilde{g}(x)$  und beliebige reelle Konstanten  $\alpha, \beta$  ist dann auch  $\alpha \cdot g(x) + \beta \cdot \tilde{g}(x)$  eine Lösung, wie man sofort sieht.

**Satz 4.19.** Der Raum  $V$  aller Lösungen einer homogenen Differentialgleichung vom Typ  $(*)$  ist ein endlich dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ .

**Beweis.** Für  $x_0 \in [c, d]$  ist die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$ev_{x_0} : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g \mapsto (g(x_0), \dots, g^{(n-1)}(x_0))$$

injektiv (Eindeutigkeitsaussage von Satz 4.18) und surjektiv (Existenzaussage von Satz 4.18), also ein  $\mathbb{R}$ -linearer Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen.  $\square$

**Beispiel 4.20.** Die Differentialgleichung  $f'(t) = f(t)$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $f(0) = 1$  hat eine eindeutige Lösung. Die Kettenregel zeigt  $\log(f(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)} = 1$ , also  $\log(f(t)) = t + C$  mit  $C = 0$  wegen  $f(0) = 1$ . Es folgt  $f(t) = \exp(t)$  und damit<sup>3</sup>

$$\boxed{\exp(t)' = \exp(t)}.$$

<sup>3</sup>Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  folgt  $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$  wegen  $\exp(\alpha \cdot \log(x))' = \exp(\alpha \cdot \log(x)) \cdot \frac{\alpha}{x}$  sowie  $\frac{1}{x} = \exp(-\log(x))$ .

**Beispiel 4.21 (Sinus und Cosinus).** Wir definieren  $\sin(x)$  resp.  $\cos(x)$  als die eindeutig bestimmten (zweimal stetig differenzierbaren) Funktionen auf  $\mathbb{R}$ , die im zweidimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  der Lösungen der homogenen Differentialgleichung vom Grad  $n = 2$

$$g''(x) + g(x) = 0$$

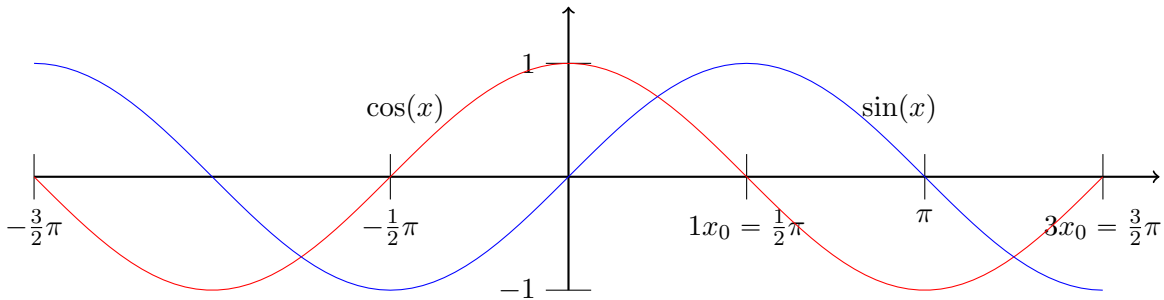
liegen und die Anfangswertbedingungen  $g(0) = 0, g'(0) = 1$  resp.  $g(0) = 1, g'(0) = 0$  erfüllen. Offensichtlich gilt hier  $g \in V \implies g' \in V$ . Es folgt  $\sin(x)' = \cos(x)$  und  $\cos(x)' = -\sin(x)$  und somit (nach Satz 4.8) durch Ableiten

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

Für  $g \in V$  gilt  $g(x) = g(0) \cdot \cos(x) + g'(0) \cdot \sin(x)$ . Wegen  $g(x) \in V \implies g(x + x_0) \in V$  (Kettenregel!) folgt  $\cos(x + x_0) = \cos(x_0)\cos(x) - \sin(x_0)\sin(x)$  sowie  $\sin(x + x_0) = \sin(x_0)\cos(x) + \cos(x_0)\sin(x)$ . Dies beweist das sogenannte

**Lemma 4.22 (Additionstheorem).** Für  $e(x) := \cos(x) + i \cdot \sin(x)$  in  $\mathbb{C}$  und  $x, x_0 \in \mathbb{R}$  gilt

$$e(x + x_0) = e(x) \cdot e(x_0).$$



**Behauptung.** Der Kern  $K$  des so definierten Homomorphismus  $e : \mathbb{R} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  ist eine Untergruppe der additiven Gruppe von  $\mathbb{R}$  und es gilt für eine reelle Zahl  $2\pi > 0$

$$K = 2\pi \cdot \mathbb{Z}.$$

Die Funktionen  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  sind periodisch mit der genauen Periode  $2\pi$ .

**Beweis.** Aus Stetigkeitsgründen existiert wegen  $\cos(0) = 1$  ein  $\delta > 0$  mit  $\cos(x) > 0$  für  $x \in I = (0, \delta)$ . Für  $0 \leq x_1 < x_2 \leq \delta$  gilt dann nach dem Mittelwertsatz  $\sin(x_2) - \sin(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot \cos(\theta) > 0$ . Also  $K \cap I = \emptyset$ . Ist  $K \neq \{0\}$ , wird daher  $K$  von  $2\pi := \inf(K \cap \mathbb{R}_{>0})$  als Gruppe erzeugt! Zum Nachweis von  $K \neq \{0\}$  genügt ein  $x_0 > 0$  mit  $\cos(x_0) = 0$ . [Dann ist  $\sin(x_0) = \pm 1$ . Es folgt  $e(x_0) = \pm i$  und damit  $e(4x_0) = 1$ , also  $4x_0 \in K$ .]

*Zur Existenz von  $x_0$ .* Wäre  $\cos(x) > 0$  für alle  $x > 0$ , wäre nach dem Mittelwertsatz  $\sin(x)$  strikt monoton steigend auf  $(0, \infty)$ . Also insbesondere wäre  $\sin(x) > 0$ , nach oben beschränkt durch 1 wegen  $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ , und  $\cos(x)$  wäre monoton fallend nach unten beschränkt durch 0. Nach Satz 1.27 existiert deshalb der Limes  $\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} e(n)$ . Die Monotonie des  $\sin(x)$  impliziert  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Aus Lemma 4.22 folgt andererseits  $\zeta = \zeta \cdot \zeta$ , also  $\zeta = 0, 1$ . Ein Widerspruch! Daher nimmt  $\cos(x)$  im Bereich  $\mathbb{R}_{>0}$  nicht nur positive Werte an. Also existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle  $x_0 > 0$  von  $\cos(x)$ .  $\square$

## 4.9 Stetig partiell differenzierbare Funktionen

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und sei

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

in  $C^1(U, \mathbb{R}^m)$ , d.h. eine auf  $U$  einmal stetig partiell differenzierbare Funktion.

**Lemma 4.23.** *Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine einmal stetig partiell differenzierbare Funktion, dann ist  $f$  differenzierbar auf  $U$ .*

**Beweis.** Wegen Lemma 4.5 können wir  $m = 1$  annehmen. Für festes  $\xi \in U$  und alle  $x$  nahe genug bei  $\xi$  ist die folgende Umformung erklärt

$$\begin{aligned} f(x) - f(\xi) &= [f(x_1, \dots, x_n) - f(\xi_1, x_2, \dots, x_n)] + [f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - f(\xi_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n)] \\ &\quad + \dots + [f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) - f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)]. \end{aligned}$$

Betrachtet man die Funktion in der  $i$ -ten Klammer als Funktion der Variable  $x_i$  bei festgehaltenen anderen Variablen, ergibt der eindimensionale Mittelwertsatz 4.8.

$$f(x) - f(\xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \theta_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

für gewisse  $\theta_i$  zwischen  $x_i$  und  $\xi_i$ . Es folgt daher

$$f(x) - f(\xi) - \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi) = o(x - \xi),$$

denn rechts steht  $\sum_i (x_i - \xi_i) \cdot [\frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \theta_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi)]$  mit  $|x_i - \xi_i| \leq \|x - \xi\|$  und der Term in eckigen Klammern ist stetig bei  $x = \xi$  mit dem Limes

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \theta_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi) \right| = 0,$$

weil nach Annahme die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x_i} f$  stetig im Punkt  $\xi$  sind. Beachte  $x \rightarrow \xi$  impliziert  $\theta_i \rightarrow \xi_i$ . Also ist  $f$  differenzierbar im Punkt  $\xi$ .  $\square$

**Lemma 4.24 (Kritische Punkte).** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  einmal stetig partiell differenzierbar auf  $U$ . Gilt  $Df(\xi) = 0$  für ein  $\xi \in U$ , dann existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so daß (für die Euklidische Norm oder die Quadernorm des  $\mathbb{R}^n$ ) gilt*

$$\|x - \xi\| < \delta, \|y - \xi\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \cdot \|x - y\|.$$

**Beweis.** ObdA ist  $m = 1$ . Wähle  $\delta > 0$  so klein, daß die Kugel  $B$  vom Radius  $\delta$  um  $\xi$  ganz in  $U$  enthalten ist. Aus dem Mittelwertsatz 4.8 folgt dann

$$|f(x) - f(y)| = \|Df(\theta)(x - y)\| \leq n \sup_i \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(\theta) \right| \cdot \|x - y\|$$

für alle  $x, y \in B$ , da die Verbindungsgerade zwischen  $x$  und  $y$  auch in  $B$  liegt. Aus der Annahme  $\frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi) = \dots = \frac{\partial}{\partial x_n} f(\xi) = 0$  und der Stetigkeit der partiellen Ableitungen im Punkt  $\xi$  folgt  $n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(\theta) \right| < \varepsilon$  für alle  $\theta$  mit  $\|\theta - \xi\| < \delta$ , wenn  $\delta > 0$  genügend klein gewählt wird.  $\square$

## 4.10 Der Umkehrsatz

Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und sei

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine einmal stetig partiell differenzierbare, also insbesondere differenzierbare Funktion auf  $U$ . Wegen  $n = m$  ist in jedem Punkt  $\xi \in U$  die Jacobimatrix eine  $n \times n$ -Matrix. Der folgende Satz zeigt, dass die Invertierbarkeit der Jacobimatrix  $Df(\xi)$  im Punkt  $\xi$  eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer lokalen Umkehrfunktion von  $f$  in der Nähe von  $\xi$  resp.  $f(\xi)$  ist:

**Satz 4.25.** Für  $\xi_0 \in U$  mit invertierbarem  $Df(\xi_0)$  gibt es eine offene Teilmenge  $V$  von  $U$ , welche  $\xi_0$  enthält, für die  $f$  eingeschränkt auf  $V$  eine bijektive Abbildung von  $V$  auf  $W = f(V)$  definiert, so daß gilt

$$\boxed{W = f(V) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist } \underline{\text{offen}} .}$$

Weiterhin: Die lokale Umkehrfunktion

$$\boxed{f^{-1}: W \rightarrow V}$$

ist einmal stetig partiell differenzierbar, und damit auch differenzierbar auf  $W = f(V)$ .

**Bemerkung.** Die Invertierbarkeit von  $Df(\xi)$  ist auch eine notwendige Bedingung für die Existenz einer differenzierbaren lokalen Umkehrfunktion  $g = f^{-1}$  in der Nähe von  $\xi$ . Dies folgt aus der Kettenregel, denn  $g \circ f = id$  impliziert  $Dg(\eta) \circ Df(\xi) = D(id)(\xi) = id$  für  $\eta = f(\xi)$ . Somit ist  $Dg(\eta)$  als Matrix zu  $Df(\xi)$  invers.

**Beweis.** Wir geben zuerst den Beweis im Spezialfall  $\xi_0 = f(\xi_0) = 0$  und  $Df(\xi_0) = id$ .

Die Hilfsfunktion  $F = F_\eta$ :

$$\boxed{F(x) = x - f(x) + \eta}$$

hat für gegebenes konstantes  $\eta \in \mathbb{R}^n$  verschwindende Ableitung im Punkt  $\xi$ . Für  $\varepsilon = 1/2$  gilt somit nach Lemma 4.24 für alle  $x, y$  vom Abstand zu  $\xi_0 = 0$  kleiner als  $\delta = \delta(1/2) > 0$

$$\boxed{\|F(x) - F(y)\| < \frac{1}{2}\|x - y\| .}$$

Der vollständige Raum  $X$ . Wir wählen eine abgeschlossene Kugel<sup>4</sup>  $X$  um  $\xi_0 = 0$  vom Radius  $r$  für ein  $0 < r < \delta$ . Dann ist  $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante  $\frac{1}{2}$ .

Bedingung an  $\eta$ .  $F(0) = \eta$  und  $\|F(x)\| \leq \|F(x) - F(0)\| + \|F(0)\| \leq \frac{1}{2}\|x\| + \|\eta\|$  implizieren für  $x \in X$  (d.h.  $\|x\| \leq r$ ) sowie gleichzeitig für

$$\|\eta\| < r/2$$

<sup>4</sup>Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , also versehen mit der Euklidischen Metrik nach 2.8 ein vollständiger metrischer Raum.

#### 4 Differentiation

die Ungleichung  $\|F(x)\| \leq r$ . Es folgt

$$\boxed{F: X \rightarrow X}.$$

*Fixpunktsatz.* Der Fixpunktsatz von Banach liefert daher einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $\xi \in X$  der kontraktiven Abbildung  $F: X \rightarrow X$ . Beachte  $F(\xi) = \xi$  ist äquivalent zu  $f(\xi) = \eta$ . Mit anderen Worten  $\xi = f^{-1}(\eta)$ :

$$\exists! \xi \in X \text{ mit } f(\xi) = \eta, \text{ falls } \|\eta\| < r/2.$$

*Konstruktion von  $V$ .* Sei  $W = B_{r/2}(0)$  die offene Kugel um Null aller  $\eta \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\eta\| < r/2$ . Da  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f$  stetig ist, ist das Urbild  $f^{-1}(W)$  offen in  $\mathbb{R}^n$  (benutze Lemma 4.6 und Satz 2.12). Für  $V = f^{-1}(W) \cap X$  gilt dann wie bereits gezeigt

$$\boxed{f: V \cong f(V) = W}.$$

*Kontroll-Abschätzungen.* Die Kontraktivität  $\|F(x) - F(y)\| < \frac{1}{2}\|x - y\|$  von  $F$  auf  $X$  liefert für  $x, y \in X$  mit Hilfe der unteren und oberen Dreiecksungleichung<sup>5</sup> (s. Seite 6)

$$\boxed{\frac{1}{2}\|x - y\| < \|f(x) - f(y)\| < \frac{3}{2}\|x - y\|}.$$

$V$  ist offen.  $\xi \in V \implies \eta = f(\xi) \in W$ . Aus der unteren Kontroll-Abschätzung von  $f$  folgt für  $x = \xi, y = 0$  dann  $\frac{1}{2}\|\xi\| < \|\eta\|$ . Andererseits  $\|\eta\| < \frac{r}{2}$ . Somit  $\|\xi\| < r$ . Also liegt  $\xi$  bereits in der offenen Kugel  $X^0 \subset X$  vom Radius  $r$  um Null. Daher ist  $V = f^{-1}(W) \cap X = f^{-1}(W) \cap X^0$  als Durchschnitt zweier offener Mengen selbst offen.

*Stetigkeit von  $f^{-1}: W \rightarrow V$ .* Eine unmittelbare Konsequenz von

$$\frac{1}{2}\|f^{-1}(\eta_1) - f^{-1}(\eta_2)\| < \|\eta_1 - \eta_2\|,$$

und dies gilt für alle  $\eta_1, \eta_2 \in W$  wegen der linken Kontrollabschätzung.

*Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  im Punkt 0.* Für  $\eta \neq 0 \iff f^{-1}(\eta) = \xi \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{\|f^{-1}(\eta) - f^{-1}(0) - id(\eta - 0)\|}{\|\eta - 0\|} &= \frac{\|f^{-1}(\eta) - \eta\|}{\|\eta\|} = \frac{\|\xi - f(\xi)\|}{\|f(\xi)\|} \\ &= \frac{\|\xi\|}{\|f(\xi)\|} \cdot \frac{\|f(\xi) - f(0) - id(\xi - 0)\|}{\|\xi - 0\|} \end{aligned}$$

Da  $f$  nach 4.6 auf  $V$  stetig ist, und  $f^{-1}$  stetig auf  $W$  ist, sind  $\xi \rightarrow 0$  und  $\eta = f(\xi) \rightarrow 0$  zueinander äquivalent. Da rechts der Limes  $\xi \rightarrow 0$  existiert und Null ist ( $f$  ist differenzierbar im Punkt  $\xi = 0$  mit der Ableitung  $id$ , und der Faktor  $\|\xi\|/\|f(\xi)\|$  kann durch 2 abgeschätzt werden

<sup>5</sup>Benutze  $\|u\| - \|v\| \leq \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  für  $u = x - y$  und  $v = F(y) - F(x)$  und  $u + v = f(y) - f(x)$ . Beachte  $\|v\| < \frac{1}{2}\|u\|$  wegen der Kontraktivität von  $F$ .

wegen der Kontrollabschätzungen), existiert der Limes  $\eta \rightarrow 0$  links und ist auch Null. Somit ist  $f^{-1}$  differenzierbar im Punkt  $\eta = 0$  mit der Ableitung  $Df^{-1}(0) = id$ .

*Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  auf  $W$ .* Hierzu nehmen wir an, dass der Radius  $r$  obdA so klein gewählt wurde, dass für alle  $\xi \in X$  und damit für alle  $\xi \in V$  die Ableitung von  $f$  im Punkt  $\xi$  invertierbar ist. Dann zeigt unser vorheriges Argument die Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  in allen Punkten  $\eta = f(\xi) \in W$ . Beachte die nachfolgende Reduktion auf den Spezialfall.

*Stetig partielle Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  auf  $W$ .* Wegen der Kettenregel ist  $Df^{-1}(\eta)$  die zu  $Df(\xi)$  inverse Matrix ist (wir unterscheiden jetzt nicht zwischen  $Df$  und  $Jf$  etc.). Die Cramersche Regel oder der Laplace Entwicklungssatz liefert daher die Formel

$$Df^{-1}(\eta) = (Df(\xi))^{-1} = \frac{Df(\xi)^{ad}}{\det(Df(\xi))}.$$

Beachte,  $\xi$  hängt stetig von  $\eta$  ab, da  $f^{-1}$  stetig ist. Die Einträge der adjungierten Matrix und die Determinante von  $Df(\xi)$  sind Polynome in den Matrixkoeffizienten von  $Df(\xi)$ , also stetig in  $\xi$ , da  $f$  stetig partiell differenzierbar ist. Andererseits sind die partiellen Ableitungen von  $f^{-1}$  die Koeffizienten der Jacobimatrix  $Df^{-1}(\eta)$ , also wie oben erklärt stetige Funktionen von  $\eta \in W$ .

**Reduktion auf den Spezialfall.** Die zum Beweis des Umkehrsatzes gemachten Annahmen

$$\xi_0 = 0 \text{ und } \eta_0 = f(\xi_0) = 0 \text{ und } Df(\xi_0) = id$$

sind unbedenklich. Dazu modifiziert man ein allgemeines  $f$  mit affin linearen Abbildungen der Gestalt  $\varphi(x) = L(x) + \xi_0$ ,  $L \in Gl(n, \mathbb{R})$  resp.  $\psi(x) = x - \eta_0$ . Solche Abbildungen haben Jacobimatrix  $L$  resp.  $id$  und sind invertierbar auf ganz  $\mathbb{R}^n$ , und ihre Umkehrabbildungen sind wieder affin linear. Hat die Hilfsfunktion

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi$$

eine lokale Umkehrfunktion bei  $x = 0$ , dann besitzt unsere Funktion  $f$  wie behauptet eine lokale Umkehrfunktion<sup>6</sup> bei  $x = \xi_0$ , nämlich

$$f^{-1} = \varphi \circ \tilde{f}^{-1} \circ \psi.$$

Andererseits<sup>7</sup> gilt  $\tilde{f}(0) = 0$  und  $D\tilde{f}(0) = id$ , falls  $L$  geeignet gewählt wird, nämlich

$$L = Df(\xi_0)^{-1}.$$

Genau an dieser Stelle geht die Invertierbarkeit der Jacobimatrix  $Df(\xi_0)$  ein! □

<sup>6</sup> $f \circ (\varphi \circ \tilde{f}^{-1} \circ \psi) = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1} \circ \psi = id$  und  $(\varphi \circ \tilde{f}^{-1} \circ \psi) \circ f = \varphi \circ \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1} = id$ .

<sup>7</sup>Für die Funktion  $\tilde{f}$  folgt die Existenz der lokalen Umkehrfunktion bei  $x = 0$  aus dem vorherigen Abschnitt.

## 4.11 Substitutionsregel

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf  $U$ . Wir nehmen an,  $f$  habe kompakten Träger in  $U$ . D.h. es gibt eine kompakte Teilmenge  $K \subset U$  so daß  $f(x)$  ausserhalb von  $K$  Null ist. Es bezeichne  $C_c(U) \subseteq C(U)$  den Raum aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in  $U$ . Funktionen in  $C_c(U)$  können durch Null zu stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  fortgesetzt werden. Dadurch ändert sich der Träger nicht. In diesem Sinn kann man  $C_c(U)$  als Unterraum von  $C_c(\mathbb{R}^n)$  auffassen. Einschränkungen des Euklidischen Standardintegrals  $\int_{\mathbb{R}^n} : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  auf den Teilraum  $C_c(U)$  definiert das abstrakte Integral

$$I(f) = \int_U f(x) dx \quad , \quad f \in C_c(U)$$

auf dem Verband  $C_c(U)$ .

**Definition 4.26.** Ein **Koordinatenwechsel** ist eine bijektive und einmal stetig partiell differenzierbare Abbildung zwischen offenen Mengen  $U, V$  in  $\mathbb{R}^n$

$$\varphi: U \rightarrow V$$

für die gilt:

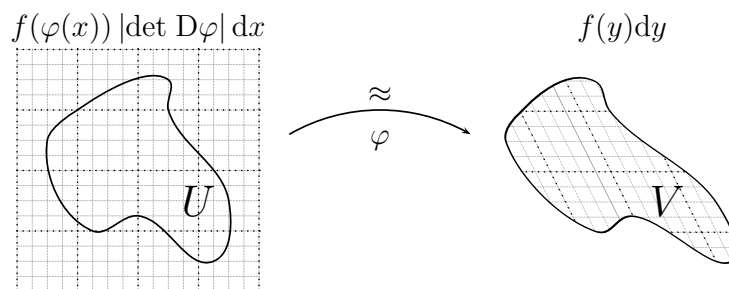
$$\det D\varphi(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U .$$

Man nennt  $\varphi$  einen **orientierten Koordinatenwechsel**, wenn  $\det D\varphi(x) > 0$  gilt für alle  $x \in U$ .

Aus dem Satz von der Umkehrfunktion folgt: Ist  $\varphi: U \rightarrow V$  ein Koordinatenwechsel, dann ist auch  $\psi = \varphi^{-1}: V \rightarrow U$  ein Koordinatenwechsel.

**Satz 4.27 (Substitutionsregel).** Sei  $\varphi$  ein Koordinatenwechsel. Dann liegt für jede Funktion  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  aus  $C_c(V)$  die Funktion  $f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|$  in  $C_c(U)$ , und es gilt

$$(*) \quad \boxed{\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| dx .}$$



*Bemerkung.* Durch einen einfachen Limeschluß folgt später die analoge Substitutionsregel für alle Funktionen  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ , welche *Lebesgue integrierbar* sind im Sinne von Kapitel 5.

**Beweis.** *1.Schritt.* Die Zerlegung  $f = f^+ - f^-$  mit  $f^+ = \max(f, 0)$  und  $f^- = -\min(f, 0)$  und die  $\mathbb{R}$ -Linearität des Integrals erlaubt es auf den Fall  $f \geq 0$  zu reduzieren. Sei also obdA  $f \geq 0$ , und damit auch  $g(x) = f(\varphi(x))|det D\varphi(x)| \geq 0$ .

*2.Schritt.* Es genügt für alle Koordinatenwechsel  $\varphi: U \rightarrow V$  und alle  $f \in C_c(V)$  mit  $f \geq 0$  zu zeigen

$$(**) \quad \boxed{\int_V f(y)dy \leq \int_U f(\varphi(x)) \cdot |det D\varphi(x)|dx},$$

denn angewandt auf  $\psi: V \rightarrow U$  mit  $\psi = \varphi^{-1}$  und  $g(x) = f(\varphi(x))|det D\varphi(x)|$  gibt (\*\*) die Ungleichung  $\int_U g(x)dx \leq \int_V g(\psi(y))|det D\psi(y)|dy$ . Nun ist  $g(\psi(y))|det D\psi(y)|$  gleich  $f(\varphi(\psi(y)))|det D\varphi(\psi(y))||det D\psi(y)| = f(y)|det D(\varphi \circ \psi)(y)| = f(y)$ . Aus (\*\*) folgt damit

$$\int_U f(\varphi(x)) \cdot |det D\varphi(x)| \leq \int_V f(y)dy, \quad ,$$

und damit, durch beide Abschätzungen zusammen, die Substitutionsregel (\*).

*3.Schritt.* Gilt (\*\*) für  $\varphi: U \rightarrow V$  und  $\psi: V \rightarrow W$ , dann gilt (\*\*) für  $\psi \circ \varphi: U \rightarrow W$ . [(\*\*) für die Substitutionen  $y = \varphi(x)$  und  $z = \psi(y)$  liefert  $\int_W g(z)dz \leq \int_V g(\psi(y)) \cdot |det D\psi(y)|dy \leq \int_U g(\psi(\varphi(x))) \cdot |det D(\psi(\varphi(x)))| \cdot |det D\varphi(x)|dx = \int_U g((\psi \circ \varphi)(x))|det D(\psi \circ \varphi)(x)|dx$  vermöge der Kettenregel und der Produktformel für Determinanten. Ditto für (\*).]

*4.Schritt.* Um die Aussage (\*) - oder äquivalent (\*\*) - für die Einschränkung  $\varphi: U \rightarrow V$  von linearen Abbildungen  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu zeigen, kann man sich wegen Schritt 3 auf den Fall von Elementarmatrizen zurückziehen [Jede invertierbare Matrix ist ein Produkt von Diagonalmatrizen und oberen und unteren elementaren Dreiecksmatrizen (Scherungen).] Den Fall von Diagonalmatrizen behandelt man wie in Lemma 3.9. Der Fall einer elementaren Scherung ist ein einfacher Spezialfall des späteren Satzes von Fubini<sup>8</sup>, folgt aber auch aus einer simplen Modifikation des Arguments in Schritt 8. Wir können daher jetzt annehmen, im Fall von linearen Koordinatenwechseln sei (\*) bereits gezeigt. Ditto für Translationen.

*5.Schritt.* Also angenommen es gäbe einen Fall, wo die Ungleichung (\*\*) tatsächlich falsch wäre, also die linke Seite in (\*\*) etwa um  $\kappa > 0$  grösser wäre als die rechte. Wir legen dann den Träger  $K$  von  $f(\varphi(x))$  in  $U$  in einen Quader  $Q = Q_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ , sagen wir mit Seitenlänge  $c$ , und halbieren alle Seitenlängen sukzessive (Quaderschachtelung). Für jeden der iterierten Teilquader  $Q_m$  ist die Funktion  $\chi_{\varphi(Q_m)}(y)f(y)$  integrierbar bezüglich eines erweiterten Integrals  $I^-$  (siehe Beispiel 2.25 und 3.19 zusammen mit Satz 3.20). Dann zeigt<sup>9,10</sup> man leicht durch einen

<sup>8</sup>Im Scherungsfall ist obdA  $n = 2$  und die Aussage folgt aus  $\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x, \lambda \cdot x + y)dy)dx = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy)dx$  wegen der Translationsinvarianz  $\int_{\mathbb{R}} h(y_0 + y)dy = \int_{\mathbb{R}} h(y)dy$  des Integrals.

<sup>9</sup>Schubfachschluss: Gilt  $\kappa \geq \lambda_{Q_{m-1}}/vol(Q_{m-1}) = \sum_{\nu=1}^{2^n} \lambda_{Q_{m,\nu}}/vol(Q_{m-1})$ , und ist  $Q_m$  einer der  $2^n$  Teilquader  $Q_{m,\nu}$  mit maximalem  $\lambda_{Q_{m,\nu}}$ , dann gilt  $\kappa \geq 2^n \cdot \lambda_{Q_m}/vol(Q_{m-1}) = \lambda_{Q_m}/vol(Q_m)$ .

<sup>10</sup>5.Schritt: Eigentlich müsste als Integrationsbereich dastehen  $Q_m \cap U$  respektive  $\varphi(Q_m \cap U)$ . Aber für  $m \gg 0$  gilt  $Q_m \subseteq U$  wegen  $x_0 \in K \subseteq U$ .

#### 4 Differentiation

**Schubfachschluss(!):** Es gibt eine absteigende Folge von Teilquadern  $Q_m \subseteq Q_0$  mit  $\text{vol}(Q_m) = 2^{-mn} \text{vol}(Q_0)$  sowie

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int \chi_{\varphi(Q_m)}(y) f(y) dy}{\text{vol}(Q_m)} \geq \frac{\kappa}{\text{vol}(Q_0)} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{Q_m} f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| dx}{\text{vol}(Q_m)}$$

und  $\bigcap Q_m = \{x_0\}$  (Quaderschachtelung; siehe Übungsaufgaben).

*Hinweis.* Lasse den Limes weg und multipliziere mit  $\text{vol}(Q_m)$ . Wie findet man dann wohl den Quader  $Q_m$  in  $Q_{m-1}$ ? Natürlich wie folgt:  $Q_m$  ist einer der Teilquader mit maximaler Abweichung in der Ungleichung (\*\*)!

6.Schritt. Wegen der Stetigkeit von  $f$  existiert der Limes<sup>11</sup>

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{Q_m} f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| dx}{\text{vol}(Q_m)} = f(\varphi(x_0)) \cdot |\det D\varphi(x_0)|.$$

7.Schritt. Durch Komposition mit einer linearen Abbildung kann wegen Schritt 2), 3) und 4) weiterhin obdA  $D\varphi(x_0) = id_{\mathbb{R}^n}$  angenommen werden. Dann gilt für  $y_0 := \varphi(x_0)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{Q_m} f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| dx}{\text{vol}(Q_m)} = f(y_0).$$

OBdA sei ausserdem  $x_0 = 0$  und  $y_0 = 0$ .

8.Schritt. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wegen Schritt 7 ist  $D\varphi(x_0) = id_{\mathbb{R}^n}$ , also  $D(\varphi - id_{\mathbb{R}^n})(x_0) = 0$ . Es folgt  $\|\varphi(x) - x\| < \varepsilon \|x\|$  für  $\|x\| < \delta(\varepsilon)$  nach Lemma 4.24. Ist daher  $m$  groß genug, gilt wegen dieser Abschätzung<sup>12</sup>:

- $\varphi(Q_m)$  im Quader  $Q'_m = (1 + \varepsilon)Q_m$  der Seitenlänge  $(1 + \varepsilon) \frac{c}{2^m}$  enthalten. Zur Erinnerung:  $\frac{c}{2^m}$  war die Seitenlänge von  $Q_m$ . Also  $\text{vol}(Q'_m) = (1 + \varepsilon)^n \text{vol}(Q_m)$ .

Schritt 1 impliziert  $\chi_{Q'_m}(y) f(y) \geq \chi_{\varphi(Q_m)}(y) f(y)$  und damit ist wegen der Monotonie des abstrakten Integrals  $I^-$  auf  $C_c(\mathbb{R}^n)^-$

$$(1 + \varepsilon)^n \cdot \frac{\int \chi_{Q'_m}(y) f(y) dy}{\text{vol}(Q'_m)} = \frac{\int \chi_{Q'_m}(y) f(y) dy}{\text{vol}(Q_m)} \geq \frac{\int \chi_{\varphi(Q_m)}(y) f(y) dy}{\text{vol}(Q_m)}.$$

Schritt 9. Die Stetigkeit von  $f$  und  $y_0 \in \varphi(Q_m) \subseteq Q'_m$  liefert wie in Schritt 6

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int \chi_{Q'_m}(y) f(y) dy}{\text{vol}(Q'_m)} = f(y_0).$$

<sup>11</sup>6.Schritt: Es gilt  $\text{vol}(Q_m) \cdot \min_{x \in Q_m} h(x) \leq \int_{Q_m} h(x) dx \leq \text{vol}(Q_m) \cdot \max_{x \in Q_m} h(x)$ , und somit  $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vol}(Q_m)^{-1} \int_{Q_m} h(x) dx = h(x_0)$  für jede stetige Funktion  $h$ .

<sup>12</sup>8.Schritt: Die hier benutzte Norm sei obdA die Norm  $\|x\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$  und obdA  $x_0 = y_0 = 0$ . Dann gilt  $(1 - \varepsilon)x_i < \varphi_i(x) < (1 + \varepsilon)x_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Daraus folgt  $\varphi(Q_m) \subset Q'_m$  für einen Quader  $Q'_m$  wie behauptet.

Zusammen mit Schritt 5), 6), 7) und 8) folgt daraus

$$(1 + \varepsilon)^n \cdot f(y_0) \geq \frac{\kappa}{\text{vol}(Q_0)} + f(y_0),$$

oder  $(1 + \varepsilon)^n \cdot f(y_0) - f(y_0) \geq \frac{\kappa}{\text{vol}(Q_0)} > 0$  wegen der Schritt 5, 6, 7 und 8. Wählt man  $\varepsilon > 0$  genügend klein, wird die linke Seite  $f(y_0) \cdot [(1 + \varepsilon)^n - 1]$  kleiner als jede feste positive Zahl im Widerspruch zu  $\frac{\kappa}{\text{vol}(Q_0)} > 0$  von Schritt 5. Dies zeigt (\*\*) und damit die Behauptung (\*).  $\square$

## 4.12 Differentialformen

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  zulässig und  $C^\infty(U)$  der Raum aller unendlich oft partiell differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf  $U$ . Wir betrachten Teilmengen  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  der festen Kardinalität  $|I| = i$ . Einen formalen Ausdruck der Gestalt

$$\omega(x) = \sum_{I, |I|=i} \omega_I(x) \cdot dx_I,$$

dessen Koeffizienten Funktionen  $\omega_I(x) \in C^\infty(U)$  sind, nennt man  $\omega$  eine  $i$ -Form auf  $U$ . Man nennt  $i$  den **Grad** von  $\omega$ . Den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller  $i$ -**Formen** auf  $U$  (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation der Koeffizienten) bezeichnen wir mit

$$A^i(U).$$

**Schreibweise.** Sei  $I = \{n_1, \dots, n_i\}$  mit  $n_1 < \dots < n_i$ , dann schreiben wir symbolisch  $dx_I = dx_{n_1} \wedge \dots \wedge dx_{n_i}$  sowie  $dx_\emptyset = 1$ . Für die einelementigen Teilmengen  $I = \{i\}$  schreiben wir meistens  $dx_i$  anstelle von  $dx_{\{i\}}$ . Wir erhalten damit für  $A^\bullet(U) := \bigoplus_{i=0}^n A^i(U)$

- $A^0(U) = C^\infty(U)$
- $A^1(U) = C^\infty(U) \cdot dx_1 \oplus \dots \oplus C^\infty(U) \cdot dx_n$
- $A^2(U) = C^\infty(U) \cdot dx_1 \wedge dx_2 \oplus \dots \oplus C^\infty(U) \cdot dx_{n-1} \wedge dx_n$
- ...
- $A^n(U) = C^\infty(U) \cdot \omega_n$  für  $\omega_n := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

**Das  $\wedge$ -Produkt.** Wir definieren  $dx_I \wedge dx_J := 0$ , falls  $I \cap J \neq \emptyset$ . Anderenfalls setzen wir  $dx_I \wedge dx_J = \text{sign}(\sigma) dx_{I \cup J}$ , wobei  $\sigma$  die Permutation ist, welche  $n_1, \dots, n_i, m_1, \dots, m_j$  in eine aufsteigende Reihenfolge bringt. Hierbei seien  $n_1 < \dots < n_i$  und  $m_1 < \dots < m_j$  so gewählt, dass  $dx_I = dx_{n_1} \wedge \dots \wedge dx_{n_i}$  und  $dx_J = dx_{m_1} \wedge \dots \wedge dx_{m_j}$  gilt. Wir erhalten eine wohldefinierte  $\mathbb{R}$ -bilineare Abbildung<sup>13</sup>

$$A^i(U) \times A^j(U) \xrightarrow{\wedge} A^{i+j}(U)$$

$$\left( \sum_I \omega_I(x) \cdot dx_I, \sum_J \omega_J(x) \cdot dx_J \right) \mapsto \sum_I \sum_J \omega_I(x) \omega_J(x) \cdot dx_I \wedge dx_J.$$

<sup>13</sup>Wir zeigen später, dass das  $\wedge$ -Produkt assoziativ ist im Sinne von  $(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K)$ . Da es auch offensichtlich distributiv ist, wird dadurch  $A^\bullet(U)$  zu einem (nichtkommutativen) Ring.

#### 4 Differentiation

Das  $\wedge$ -Produkt ist per Definition distributiv.

**Beispiel.** Aus der Definition des  $\wedge$ -Produkts folgt unmittelbar

- $dx_i \wedge dx_i = 0$
- $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$

Allgemeiner folgt aus der Definition:  $dx_I \wedge dx_J = (-1)^{|I||J|} dx_J \wedge dx_I$ . Also für beliebige  $\eta \in A^i(U)$  und  $\omega \in A^j(U)$

$$\boxed{\eta \wedge \omega = (-1)^{ij} \cdot \omega \wedge \eta}.$$

**Die Cartanableitungen.** Wir definieren die Cartan Ableitungen  $d$  und damit den sogenannten **Differentialformenkomplex**

$$A^0(U) \xrightarrow{d} A^1(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} A^{n-1}(U) \xrightarrow{d} A^n(U) \xrightarrow{d} A^{n+1}(U) = 0$$

wobei die Cartan Ableitungen definiert sind durch

$$d\left(\sum_I \omega_I(x) \cdot dx_I\right) = \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}(x) \cdot dx_i \wedge dx_I.$$

**Beispiel.** Für eine Funktion  $f(x) \in A^0(U) = C^\infty(U)$  bedeutet dies

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot dx_i.$$

Man nennt dann  $df \in A^1(U)$  das **totale Differential** von  $f$  (im Prinzip ist es dasselbe wie die Jacobimatrix von  $f$ , nur etwas anders geschrieben). Die Abbildung

$$d = d_i : A^{i-1}(U) \rightarrow A^i(U)$$

nennt man im Fall  $i = 1$  den **Gradient grad** und im Fall  $i = n$  die **Divergenz div**. Im Fall  $n = 3, i = 2$  (der klassischen Vektoranalysis auf  $\mathbb{R}^3$ ) benutzt man die Bezeichnung **Rotation**.

**Spezialfall.** Sei  $f(x) = x_i$  die  $i$ -te Koordinatenfunktion, mit anderen Worten die Zusammensetzung  $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{pr_i} \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$df = 1 \cdot dx_i = dx_i,$$

oder kurz  $d(x_i) = dx_i$ . Dies (!) rechtfertigt erneut die Schreibweise  $dx_i$ .

**Die Produktformel** (Superderivationseigenschaft). Für  $\eta \in A^i(U)$  und  $\omega \in A^j(U)$  gilt

$$\boxed{d(\eta \wedge \omega) = d\eta \wedge \omega + (-1)^i \eta \wedge d\omega}.$$

**Beweis.** Wegen der Bilinearität des  $\wedge$ -Produkts können wir obdA annehmen  $\eta = f(x) \cdot dx_I$  und  $\omega = g(x) \cdot dx_J$  für  $f, g \in C^\infty(U)$ . Dann gilt

$$d(\eta \wedge \omega) = d(fg \cdot dx_I \wedge dx_J) = d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J$$

nach der Definition der Cartanableitung. Die übliche Produktformel für die partiellen Ableitungen einer Funktion liefert

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

Also  $d(\eta \wedge \omega) = (gd(f) + fd(g)) \wedge (dx_I \wedge dx_J) = d(f)dx_I \wedge gdx_J + (-1)^i f dx_I \wedge (d(g) \wedge dx_J) = d\eta \wedge \omega + (-1)^i \eta \wedge d\omega$ . Hierbei wurde benutzt  $dx_i \wedge (dx_I \wedge dx_J) = (dx_i \wedge dx_I) \wedge dx_J = (-1)^i (dx_I \wedge dx_i) \wedge dx_J = (-1)^i dx_I \wedge (dx_i \wedge dx_J)$  vermöge des Assoziativgesetzes, welches hier als Übungsaufgabe verbleibt<sup>14</sup>.  $\square$

**Integration.** Sei  $\omega = f(x) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  eine Form **höchsten Grades** mit kompaktem Träger, d.h.  $f \in C_c^\infty(U)$  oder kurz  $\omega \in A_c^n(U) := C_c^\infty(U) \cdot \omega_n$ . Dann wird per Definition das Integral  $\int_U \omega$  erklärt durch das  $n$ -dimensionale Standardintegral der Funktion  $f(x)$

$$\int_U \omega := \int_U f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

**Der Pullback  $\varphi^*$ .** Sei  $\varphi : U \rightarrow V$  eine unendlich oft differenzierbare Abbildung für zulässige Mengen  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$ . Dann gibt es eine *graderhaltende* Abbildung

$$\varphi^* : A^\bullet(V) \rightarrow A^\bullet(U)$$

eindeutig bestimmt durch die folgenden vier Eigenschaften

1.  $\varphi^*$  ist  $\mathbb{R}$ -linear
2.  $\varphi^*$  ist multiplikativ  $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta)$  für alle  $\omega, \eta \in A^\bullet(V)$
3.  $\varphi^*$  vertauscht mit der Cartan Ableitung:  $\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega)$  für alle  $\omega \in A^\bullet(V)$
4. Für Nullformen  $\omega = f(y)$  aus  $A^0(V)$ , d.h. Funktionen, gilt

$$\boxed{\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x))}.$$

Beachte  $\varphi^*(\sum_I \omega_I(y) dy_I) = \sum_I \omega_I(\varphi(x)) \varphi^*(dy_I)$  und  $\varphi^*(dy_I) = \varphi^*(dy_{m_1} \wedge \dots \wedge dy_{m_i}) = \varphi^*(dy_{m_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dy_{m_i})$  sowie  $\varphi^*(dy_k) = d\varphi^*(y_k) = d\varphi_k$  für alle  $k = 1, \dots, m$ . Also

$$\boxed{\varphi^*(dy_k) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}(x) dx_l}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}(x) = (D\varphi(x))_{kl}.$$

<sup>14</sup>Für  $(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K)$  benutze Induktion nach  $i+j+k$  und bei festem  $i+j+k$  Induktion nach  $\max(i, j, k)$ . Der Induktionsanfang  $i = j = k = 1$  ist trivial. Sei  $j > 1$ , also  $dx_J = dx_U \wedge dx_V$ . Dann gilt  $(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = (dx_I \wedge (dx_U \wedge dx_V)) \wedge dx_K = ((dx_I \wedge dx_U) \wedge dx_V) \wedge dx_K = (dx_I \wedge dx_U) \wedge (dx_V \wedge dx_K) = dx_I \wedge (dx_U \wedge (dx_V \wedge dx_K)) = dx_I \wedge (dx_U \wedge dx_K)$ . Ist  $k > 1$  und  $dx_K = dx_U \wedge dx_V$ , dann  $dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K) = dx_I \wedge (dx_J \wedge (dx_U \wedge dx_V)) = dx_I \wedge ((dx_J \wedge dx_U) \wedge dx_V) = (dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_U)) \wedge dx_V = ((dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_U) \wedge dx_V = (dx_I \wedge dx_J) \wedge (dx_U \wedge dx_V) = (dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K$ . Analog für  $i > 1$ .

#### 4 Differentiation

Aus der **Leibniz Formel** für die Determinante der Matrix  $D\varphi(x)$  folgt daher im Spezialfall  $n = m$  für Formen  $\omega = f(y) \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m \in A^m(V)$

$$\varphi^*(f(y) \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m) = f(\varphi(x)) \cdot \det D\varphi(x) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n .$$

Aus der Substitutionsformel (Satz 4.27) folgt daher sofort

**Korollar 4.28.** Für orientierte Koordinatenwechsel<sup>15</sup>  $\varphi : U \rightarrow V$  und Formen  $\omega = f(y) \cdot \omega_n$  in  $A_c^n(V)$  gilt

$$\int_U \varphi^*(\omega) = \int_V \omega .$$

**Lemma 4.29.** Zweimaliges Anwenden der Cartanableitung  $d^2 : A^i(U) \rightarrow A^{i+2}(U)$  gibt die Nullabbildung

$$d^2 = 0 .$$

**Beweis.** Im Spezialfall  $i = 0$  ist wegen  $d^2(f) = d(\sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(x) \cdot dx_\mu)$

$$d^2(f) = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}(x) \cdot dx_\nu \wedge dx_\mu .$$

Da  $dx_\nu \wedge dx_\mu$  alternierend in  $\nu$  und  $\mu$  ist, und andererseits wegen Satz 4.11 die zweiten partiellen Ableitungen symmetrisch in  $\nu$  und  $\mu$  sind, verschwindet dieser Ausdruck. Damit ist der Fall  $i = 0$  gezeigt. Für  $i > 0$  ist oBdA  $\omega = f(x) \cdot dx_I$  für  $f \in C^\infty(X)$ . Nach der Definition der Cartanableitung ist  $d^2(f(x) \cdot dx_I) = d^2(f(x)) \wedge dx_I$  und  $d^2 f = d(df) = 0$  wurde bereits gezeigt (der Fall  $i = 0$ ).  $\square$

Dies zeigt, dass alle **exakten** Formen  $\omega = d\eta$  **geschlossene** Formen sind, d.h.  $d\omega (= d^2\eta) = 0$ . Für Differentialformen vom Grad  $> 0$  gilt folgende Umkehrung:

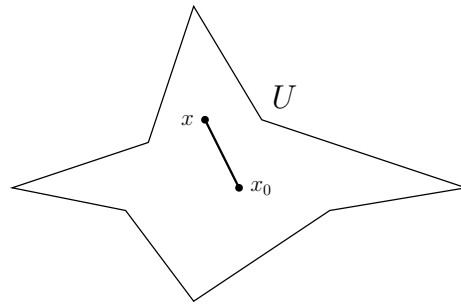
**Satz 4.30 (Poincare Lemma).** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und **sternförmig** und sei  $\omega \in A^j(U)$ . Dann gilt

- $d\omega = 0$  für  $j > 0 \implies \exists \eta \in A^{j-1}(U)$  mit  $\omega = d\eta$ .
- $d\omega = 0$  im Fall  $j = 0 \implies \omega \in A^0(U)$  ist lokalkonstant<sup>16</sup>

**Sternförmigkeit** bedeutet: Es gibt einen Punkt  $x_0 \in U$ , einen sogenannten *Sternmittelpunkt*, so dass für alle  $x \in U$  der *Verbindungsweg*  $x_0 + \{t(x - x_0) \mid 0 \leq t \leq 1\}$  auch in  $U$  liegt. Ein Sternmittelpunkt ist nicht eindeutig bestimmt, wie man an folgendem Beispiel für  $x_0$  sieht:

<sup>15</sup>zwischen offenen Teilmengen  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  wie in Abschnitt 4.11. Orientiert bedeutet dabei  $\text{sign}(\det D\varphi(x)) > 0$ .

<sup>16</sup>d.h., für jeden Punkt  $\xi \in U$  gibt es eine offene Kugel vom Radius  $r > 0$  um  $\xi$  auf der  $\omega$  konstant ist.



Zum Beweis des Poincare Lemmas genügt die Existenz von Operatoren  $I: A^j(U) \rightarrow A^{j-1}(U)$  mit der Eigenschaft  $\omega - \delta_{j0} \cdot \omega(x_0) = I(d\omega) + dI(\omega)$ .

**Der eindimensionale Fall.** Für eine zulässige Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}$  reduziert sich der allgemeine Differentialformenkomplex auf die Grade 0 und 1. Es bleibt also nur

$$A^0(U) = C^\infty(U) \xrightarrow{d} A^1(U) = C^\infty(U) \cdot dx ,$$

und für  $f(x) \in C^\infty(U)$  ist die Cartan Ableitung  $d$  gegeben durch

$$f(x) \mapsto df(x) = f'(x) \cdot dx .$$

Das Poincare Lemma im eindimensionalen Fall ist damit fast der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Im Grad  $j = 1$  besagt es nämlich, daß jede Funktion  $g(x) \in C^\infty(U)$  eine Stammfunktion besitzt, da im letzten Grad  $j = n$  (hier ist  $n = 1$ ) automatisch  $d\omega = 0$  gilt für die Differentialform  $\omega = g(x)dx$ . Im Grad 0 besagt das Poincare Lemma, daß Stammfunktionen eindeutig sind bis auf eine lokalkonstante Funktion. Allerdings gibt es zwei Einschränkungen. Erstens, wir beschränken uns hier auf  $C^\infty$ -Funktionen anstelle von stetigen Funktionen. Zweitens, erst der Satz von Stokes wird die noch fehlende Verbindung zur Integrationstheorie herstellen. Die höherdimensionale Integrationstheorie werden wir dazu noch verfeinern müssen.

## 4.13 Beweis des Poincare Lemmas

**Lemma 4.31.**  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  sei offen und sternförmig<sup>17</sup>. Dann ist für  $f(x) \in C^\infty(U)$  das Integral

$$I^{(j)}(f) = \int_0^1 t^j f(tx) dt , \quad (\text{für } j \in \mathbb{N})$$

als Funktion von  $x \in U$  definiert, und als solche wieder eine Funktion in  $C^\infty(U)$ .

Wir formulieren nun, unter Vorgriff auf das Kapitel 5, einen allgemeinen Satz aus der Theorie Lebesgue integrierbarer Funktionen, welcher in unserem Fall  $Y = [0, 1]$  für stetig differenzierbare Funktionen wegen  $C(Y) \subset L(Y)$  unmittelbar anwendbar ist. Die Behauptung von Lemma 4.31 folgt unmittelbar aus diesem später bewiesenen **Vertauschungssatz** (Beweis siehe Abschnitt 6.5).

<sup>17</sup>Wir nehmen zur Vereinfachung der Notation  $x_0 = 0$  für den Sternmittelpunkt an.

#### 4 Differentiation

**Satz 4.32.** Sei  $Y = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{Z}$  oder  $Y = \mathbb{N}$ . Sei  $f(x, y) : [a, b] \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar nach  $x$ . Ist  $f(x, y)$  für feste  $x$  in  $L(Y)$ , und gilt unabhängig von  $x$  die Abschätzung  $|\partial_x f(x, y)| \leq F(y)$  für ein  $F \in L(Y)$ , dann ist

$$g(x) = \int_Y f(x, y) dy$$

differenzierbar auf  $[a, b]$  als Funktion von  $x$  und es gilt  $g'(x) = \int_Y \partial_x f(x, y) dy$ .

Für  $f(x) \in C^\infty(U)$  sei  $f_\alpha := \frac{\partial f(x)}{\partial x_\alpha}$ . Aus dem Hauptsatz folgt  $f(x) = t^j f(tx)|_0^1 = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^j f(tx)) dt$  (für  $j > 0$ ). Aus  $\frac{d}{dt} f(tx) = \sum_\alpha x_\alpha f_\alpha(tx)$  folgt dann

**Lemma 4.33.**  $f(x) = j \cdot I^{(j-1)}(f)(x) + \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha I^{(j)}(f_\alpha)(x)$  für alle  $j > 0$ .

Wir kommen nun zum eigentlichen *Beweis des Poincare Lemmas*.

**Beweis.** Für  $\beta \in \{1, \dots, n\}$  und  $J \subset \{1, \dots, n\}$  definieren wir die **Kontraktionen**

$$\boxed{\partial_\beta \vee dx_J = 0} \quad (\text{im Fall } \beta \notin J) \quad \boxed{\partial_\beta \vee dx_J = \varepsilon \cdot dx_{J \setminus \{\beta\}}} \quad (\text{im Fall } \beta \in J)$$

mit dem eindeutig bestimmten Vorzeichen  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  so daß  $dx_\beta \wedge \varepsilon \cdot dx_{J \setminus \{\beta\}} = dx_J$ .

**Der Operator  $I$ .** Wir definieren nun für alle  $j > 0$  den  $\mathbb{R}$ -linearen Operator

$$I : A^j(U) \longrightarrow A^{j-1}(U),$$

durch  $I(\sum_J \omega_J(x) \cdot dx_J) = \sum_J I^{(j-1)}(\omega_J)(x) \cdot i_E(dx_J)$  mit  $i_E(dx_J) := \sum_{\beta=1}^n x_\beta \cdot \partial_\beta \vee dx_J$ .

Für  $j = 0$  folgt das Poincare Lemma aus dem Mittelwertsatz 4.8. Genauer gilt

**Bemerkung:** Im Grad  $j = 0$  gilt  $\boxed{(I \circ d)f(x) = f(x) - f(0)}$  (Beweis wie bei Lemma 4.33).

Im Fall  $j > 0$  setze  $\eta = I(\omega) \in A^{j-1}(U)$ . Aus  $d\omega = 0$  folgt dann das Poincare Lemma  $\omega = (d \circ I + I \circ d)\omega = d(I(\omega)) + 0 = d\eta$  auf Grund der folgenden

**Homotopieformel:** Für  $\omega \in A^j(U)$  und Grad  $j > 0$  gilt

$$\boxed{\omega = (d \circ I + I \circ d) \omega}.$$

Da diese Formel linear in  $\omega$  ist, kann man für ihren Beweis  $\omega = f(x) \cdot dx_J$  annehmen:

*1.Schritt.* Es gilt  $I(\omega) = I^{(j-1)}(f) \cdot \sum_\beta x_\beta \cdot (\partial_\beta \vee dx_J)$ . Wegen der Produktformel für die Cartanableitung ist

$$(d \circ I)(\omega) = d\left(I^{(j-1)}(f)\right) \wedge \left(\sum_\beta x_\beta \cdot (\partial_\beta \vee dx_J)\right) + I^{(j-1)}(f) \cdot d\left(\sum_\beta x_\beta \cdot (\partial_\beta \vee dx_J)\right).$$

Es gilt  $d(I^{(j-1)}(f)) = \sum_{\alpha} (\partial_{\alpha} \int_0^1 t^{j-1} f(tx) dt) dx_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\int_0^1 t^{j-1} \partial_{\alpha} f(tx) dt) dx_{\alpha}$  wegen dem Vertauschungssatz 4.32. Also  $d(I^{(j-1)}(f)) = \sum_{\alpha} (\int_0^1 t^j f_{\alpha}(tx) dt) dx_{\alpha} = \sum_{\alpha} I^{(j)}(f_{\alpha}) dx_{\alpha}$ . Ausserdem ist  $d(\sum_{\beta} x_{\beta} (\partial_{\beta} \vee dx_J)) = \sum_{\beta \in J} dx_{\beta} \wedge (\partial_{\beta} \vee dx_J) = |J| \cdot dx_J = j \cdot dx_J$ . Es folgt

$$(d \circ I)(\omega) = j \cdot I^{(j-1)}(f) \cdot dx_J + \left( \sum_{\alpha} I^{(j)}(f_{\alpha}) \cdot dx_{\alpha} \right) \wedge \left( \sum_{\beta} x_{\beta} \cdot (\partial_{\beta} \vee dx_J) \right).$$

2.Schritt. Andererseits ist  $(I \circ d)(\omega) = I(\sum_{\alpha} f_{\alpha} \cdot dx_{\alpha} \wedge dx_J)$  gleich

$$(I \circ d)(\omega) = \sum_{\alpha} I^{(j)}(f_{\alpha}) \sum_{\beta} x_{\beta} \cdot (\partial_{\beta} \vee (dx_{\alpha} \wedge dx_J)).$$

3.Schritt. Wegen<sup>18</sup>  $dx_{\alpha} \wedge (\partial_{\beta} \vee dx_J) + \partial_{\beta} \vee (dx_{\alpha} \wedge dx_J) = \delta_{\alpha\beta} \cdot dx_J$  vereinfacht sich die Formel bei der Addition von  $(d \circ I)(\omega)$  und  $(I \circ d)(\omega)$  und liefert für  $j > 0$  dank Lemma 4.33 die Homotopieformel

$$(dI + Id)(\omega) = \left( j \cdot I^{(j-1)}(f) + \sum_{\alpha} x_{\alpha} I^{(j)}(f_{\alpha}) \right) \cdot dx_J = f(x) \cdot dx_J = \omega.$$

□

**Bemerkung.** Die Sternförmigkeit von  $U$  ist wesentlich für das Poincare Lemma. Die gelochte Ebene  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist nicht sternförmig! Die 1-Form  $\omega = \text{Im}\left(\frac{dz}{z}\right)$ , in reellen Koordinaten

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

hat eine Singularität im Ursprung. Aber es gilt  $\omega \in A^1(U)$  und man zeigt leicht  $d\omega = 0$  auf  $U$ . Für die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow U$  definiert durch  $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$  gilt

$$\varphi^*(\omega) = \frac{\cos(t) \sin(t)' - \sin(t) \cos(t)'}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} dt = dt.$$

Hätte  $\omega$  eine Stammfunktion  $\eta$  auf  $U$ , d.h. würde  $d\eta = \omega$  gelten für ein  $\eta \in A^0(U)$ , wäre

$$\varphi^*(\omega) = \varphi^*(d\eta)(t) = d\varphi^*(\eta)(t) = d(\eta(\varphi(t))) = \eta(\varphi(t))' \cdot dt.$$

Ein Vergleich ergäbe daher  $\eta(\varphi(t))' dt = dt$ , und nach dem Hauptsatz wäre folglich bis auf eine Integrationskonstante  $C$

$$\eta(\varphi(t)) = t + C.$$

Ein Widerspruch, denn  $\eta(\varphi(t))$  ist periodisch in  $t$  (mit Periode  $2\pi$ ), während die Funktion  $t + C$  für kein  $C$  in  $t$  periodisch ist. Das Poincare Lemma gilt also nicht für  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

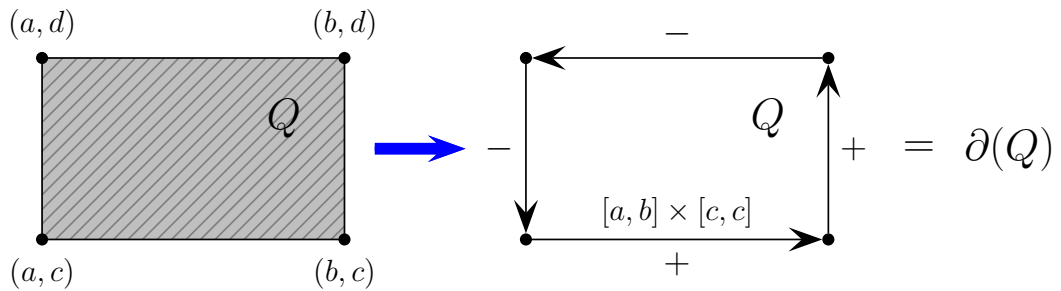
<sup>18</sup>oder  $\frac{\partial}{\partial \theta_{\beta}} \theta_{\alpha} + \theta_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta_{\beta}} = \delta_{\alpha\beta}$  im Sinne von Abschnitt 5.14. Es genügt dies auf den Erzeugern  $\theta^J \in \mathcal{S}_n$  zu zeigen.

Zum Beweis unterscheidet man die Fälle  $|\{\alpha, \beta\} \cap J| = 0, 1, 2$ . Diese Formel steht in Analogie zur Heisenberg Kommutatorformel  $\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} x_{\alpha} - x_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} = \delta_{\alpha\beta}$ .

### 4.14 Satz von Stokes für Quader

Sei  $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  ein nichtdegenerierter Quader im  $\mathbb{R}^n$ . Wir betrachten orientierte Quader  $\varepsilon \cdot Q$  für eine **Orientierung**  $\varepsilon = \pm 1$ . Der Rand  $\partial Q$  eines Quaders  $Q$  ist in natürlicher Weise die Vereinigung von  $2n$  nicht degenerierten orientierten Quadern im  $\mathbb{R}^{n-1}$  (aber degeneriert im  $\mathbb{R}^n$ ). Wir erläutern dies obdA im Fall  $n = 2$  des Quaders  $Q = +[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  (positiv orientiert). Hier ist

$$\partial(Q) := +[a_1, b_1] \times [a_2, a_2] + [b_1, b_1] \times [a_2, b_2] - [a_1, b_1] \times [b_2, b_2] - [a_1, a_1] \times [a_2, b_2].$$



Die mathematisch positive Orientierung des  $\mathbb{R}^2$  oder von  $Q$  entspricht einer Orientierung im Gegenuhrzeigersinn. Diese Orientierung auf  $Q$  induziert eine Orientierung des Randes  $\partial Q$ . Fügt man mehrere (positiv orientierte) Quader nahtlos zusammen, dann haben Ränder zweier jeweils aneinander stossenden Quader immer umgekehrte Orientierung. Bildet man den Rand als formale Summe von Kanten heben sich diese inneren Kanten dann automatisch weg und es verbleibt nur der umrandende Kantenzug übrig. Die Situation ist in höheren Dimension vollkommen analog. Dies führt sehr leicht zu einer Verallgemeinerung des nächsten Satzes. Im Fall  $n = 3$  ist analog

$$\begin{aligned} \partial(Q) := & \{b_1\} \times [a_2, b_2] \times [a_2, b_2] - [a_1, b_2] \times \{b_2\} \times [a_3, b_3] + [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \{b_3\} \\ & - \{a_1\} \times [a_2, b_2] \times [a_2, b_2] + [a_1, b_2] \times \{a_2\} \times [a_3, b_3] - [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \{a_3\}. \end{aligned}$$

Für nichtdegenerierte kompakte Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  gilt

**Satz 4.34.** (Baby Stokes) Für jede Differentialform  $\omega \in A^{n-1}(Q)$  gilt

$$\int_Q d\omega = \int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q}.$$

**Beweis.** Per Definition ist  $\omega|_{\partial Q} := i^*(\omega)$  für  $i : \partial(Q) \hookrightarrow Q$  der Pullback von  $\omega$  auf die  $2n$  Randflächen von  $Q$  für die ‘offensichtlichen’ linearen Inklusionen  $i$ . Man definiert dann für

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot dx_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}}.$$

das Integral als die Summe über die  $2n$  Beiträge des Randes  $\partial Q$  versehen mit dem zugehörigen Orientierungsfaktor. Dieser ist wie folgt definiert:  $\{b_i\} \times \prod_{\nu \neq i} [a_\nu, b_\nu]$  bekommt die Orientierung  $(-1)^{i-1}$  und  $\{a_i\} \times \prod_{\nu \neq i} [a_\nu, b_\nu]$  die Orientierung  $-(-1)^{i-1}$ . Da es sich bei den Summanden um  $(n-1)$ -dimensionale Euklidische Standardintegrale handelt, ist immer jeweils die  $i$ -te Integration bei diesen Summanden wegzulassen. Für  $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  mit  $a_i < b_i, \forall i$  ist

$$\int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q} := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \cdot dx_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} \\ - (-1)^{i-1} \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \cdot dx_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} .$$

Die Aussage des Satzes ist additiv in  $\omega$ , daher ist oBdA  $\omega = f_i(x) \cdot dx_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}}$  für ein festes  $i$ . Damit vereinfacht sich die obige Formel zu

$$\int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q} := (-1)^{i-1} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} (f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)|_{x=b_i} - f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)|_{x=a_i}) \cdot dx_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} .$$

Andererseits gilt für  $\omega = f_i(x) \cdot dx_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}}$  dann  $d\omega = \partial_i f_i(x) (-1)^{i-1} \cdot dx_{\{1, \dots, n\}}$  wegen  $dx_i \wedge dx_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} = (-1)^{i-1} \cdot dx_{\{1, \dots, n\}}$ . Das Integral  $\int_Q d\omega$  ist somit gegeben durch

$$\int_Q d\omega = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \partial_i f_i(x) (-1)^{i-1} \cdot dx_1 \dots dx_n ,$$

stimmt also (nach Fubini, Korollar 6.13) überein mit  $\int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q}$ , wenn man den Hauptsatz (Satz 4.14) für die Integration über die  $i$ -te Koordinate benutzt.  $\square$

**Satz 4.35.** Sei  $U$  offen im  $\mathbb{R}^n$  und  $\omega \in A^{n-1}(U)$ . Verschwindet  $\int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q}$  für jeden Quader  $Q$  in  $U$ , dann gilt  $d\omega = 0$ .

**Beweis.** Sei  $d\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Da  $f$  gleichmäßig stetig ist auf  $Q$ , gibt es für  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$  für  $\|x - \xi\| < \delta$ . Für  $Q \subset K_\delta(\xi)$  folgt daher aus der Boxungleichung

$$-\varepsilon < f(\xi) - \frac{1}{\text{vol}(Q)} \int_Q d\omega < \varepsilon .$$

Unsere Annahme und Satz 4.34 zeigen  $\frac{1}{\text{vol}(Q)} \int_Q d\omega = \frac{1}{\text{vol}(Q)} \int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q} = 0$ . Es folgt  $|f(\xi)| < \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ , also  $f(\xi) = 0$  für alle  $\xi \in U$ .  $\square$

## 4.15 Analytische Funktionen

**Beispiel 4.36.** Im metrischen Raum  $Y = \mathbb{Z}$  (mit der Euklidischen Metrik) sind die folgenkompakten Teilmengen die endlichen Teilmengen von  $Y$  und jede (!) Funktion  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig. Die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf  $Y = \mathbb{Z}$  sind daher die Funktionen mit endlichem Träger. Der Raum  $C_c(\mathbb{Z})$  kann also identifiziert werden mit dem Raum der Folgen  $\mathbb{Z} \ni n \mapsto f(n) \in \mathbb{R}$ , für die fast alle Folgenglieder  $f(n)$  Null sind. Daher definiert die endliche (!) Summe  $I(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$  ein abstraktes Integral  $I : B(\mathbb{Z}) := C_c(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  im Sinne von Abschnitt 3.18. Analoges gilt für die Teilmenge  $\mathbb{N}$  anstelle von  $\mathbb{Z}$ . Man überlegt sich nun leicht: Eine Funktion  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist in der monotonen Hülle  $B^+(\mathbb{Z})$  genau dann, wenn  $f(n) < 0$  nur für endlich viele  $n \in \mathbb{Z}$  gilt. In diesem Abschnitt wenden wir den späteren Satz 4.32 im Fall  $Y = \mathbb{Z}$  oder genauer  $Y = \mathbb{N}$  an um zu zeigen, daß die im folgenden betrachteten Potenzreihen gliedweise abgeleitet werden dürfen.

Für eine Folge  $a_l$  reeller (oder komplexer) Zahlen betrachten wir die formale **Potenzreihe**  $\sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l$  und fragen, für welche Werte von  $x = x_0 \in \mathbb{R}$  (oder  $x = x_0 \in \mathbb{C}$ ) der Limes

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^N a_l \cdot x^l =: \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot x^l$$

existiert. Wenn dieser Limes existiert, nennt man die Potenzreihe konvergent im Punkt  $x = x_0$ . Allgemeiner kann man anstatt der Monome  $P_l(x) = a_l x^l$  auch homogene Polynome  $P_l(x)$  vom Grad  $l$  in mehreren Variablen betrachten.

Seien  $P_l(x)$  für  $l = 0, 1, 2, \dots$  homogene Polynome  $P_l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad  $l$ , dann gilt  $P_l(t \cdot x) = t^l \cdot P_l(x)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Wie man leicht aus der Homogenität folgert, nimmt ein homogenes Polynom  $P_l(x)$  auf einer Kugel  $\|x\| \leq \rho$  ihr Maximum auf dem Rand  $\|x\| = \rho$  an. Zur Untersuchung der Konvergenz von  $\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)$  definiert man den **Konvergenzradius**

$$R := \sup \left\{ \rho \mid \exists C_\rho > 0 \text{ mit } \max_{\|y\|=\rho} (|P_l(y)|) \leq C_\rho \text{ für alle } l \right\}.$$

Der Konvergenzradius  $R$  ist eine Zahl in  $\mathbb{R}_{\geq 0}^+ = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ . Nach Definition gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft  $\|x\| \leq \rho < R$  wegen der Homogenität von  $P_l(x)$

$$|P_l(x)| \leq C_\rho \cdot \frac{\|x\|^l}{\rho^l}.$$

**Satz 4.37.** Ist der Konvergenzradius  $R > 0$ , so ist die offene Kugel  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < R\}$  nichtleer und

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)$$

konvergiert absolut für  $x \in X$ . Für  $\rho' \in [0, R)$  ist die Konvergenz absolut und gleichmäßig auf der folgenkompakten Teilmenge  $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \rho'\}$  von  $X$ . Die Grenzfunktion  $f(x)$  ist daher eine stetige Funktion der Variable  $x$  auf  $K$ , und definiert durch Variation von  $\rho'$  eine stetige Funktion auf  $X$ .

**Beweis.** Für gegebenes  $x \in X$  sei  $\rho < R$  und  $0 \leq q < 1$ , so daß  $x$  in der kompakten Kugel  $K$  vom Radius  $\rho' = q\rho$  enthalten ist. Wir wollen  $|P_l(x)|$  auf  $K$  abschätzen. Aus  $\|x\| \leq \rho' = q\rho$  folgt  $\|x\|^l / \rho'^l = q^l$  und damit

$$|P_l(x)| \leq C_\rho \cdot q^l \quad , \quad x \in K.$$

Für die Partialsummen  $f_n(x) := \sum_{l=0}^n P_l(x)$  gilt dann wegen Lemma 1.16 für alle  $m \geq n$

$$\|f_m - f_n\|_K = \max_{x \in K} |f_m(x) - f_n(x)| = \max_{x \in K} \left| \sum_{l=n+1}^m P_l(x) \right| \leq \sum_{l=n+1}^m C_\rho q^l \leq C_\rho \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Wegen  $|q| < 1$  geht  $C_\rho \frac{q^{n+1}}{1-q}$  gegen Null für  $n \rightarrow \infty$  (mit Schranken unabhängig von  $x$ ). Die stetigen Polynome  $f_n(x)$  bilden daher eine Cauchyfolge im Raum  $C(K)$  der stetigen Funktionen auf  $K$ . Wegen Satz 2.24 ist  $C(K)$  vollständig. Daher konvergieren die  $f_n(x)$  gleichmäßig auf  $K$  gegen eine auf  $K$  stetige Grenzfunktion  $f(x)$ . Da  $\{x \mid \|x\| < R\}$  die Vereinigung solcher  $K$  ist für geeignete  $\rho < R$  und  $q < 1$ , folgt unsere Behauptung.  $\square$

Wir betrachten jetzt den eindimensionalen Fall. Seien  $q, \rho$  wie im obigen Beweis. Wähle  $\varepsilon > 0$  genügend klein, so daß  $\tilde{q} := q(1 + \varepsilon) < 1$ . Für  $\tilde{C} := 1/\varepsilon$  gilt dann  $l < \tilde{C}(1 + \varepsilon)^l$ . Wir wollen nun den **Vertauschungssatz** 4.32 (für  $Y = \mathbb{N}$ ) auf die Funktionen  $f_l(x) = a_l x^l$  anwenden:

Sei  $f_l(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge auf  $[a, b]$  differenzierbarer Funktionen. Ist die reelle Folge  $f_l(x)$  in  $L(\mathbb{Z})$  für jedes feste  $x \in [a, b]$ , und gilt unabhängig von  $x$  für die Ableitungen eine Abschätzung  $|f'_l(x)| \leq F_l$  für eine reelle Folge  $F_l \in L(\mathbb{Z})$ . Dann ist

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n f_l(x) =: \sum_{l=0}^{\infty} f_l(x)$$

wohldefiniert und differenzierbar auf  $[a, b]$  mit der Ableitung  $f'(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f'_l(x)$ .

$|f_l(x)| = |a_l x^l|$  lässt sich durch  $C_\rho q^l, |q| < 1$  abschätzen, und  $|f'_l(x)| = |l a_l x^{l-1}|$  lässt sich durch  $F_l = C \tilde{q}^{l-1}, |\tilde{q}| < 1$  abschätzen für alle  $|x| \leq \rho q$ ; letzteres obdA für  $|x| = q\rho$  wegen

$$|f'_l(x)| = |l a_l x^{l-1}| = |a_l x^l \frac{l}{x}| \leq C_\rho q^l \frac{l}{|x|} \leq C_\rho \tilde{C} (1 + \varepsilon)^l q^l / \rho q = C \cdot \tilde{q}^{l-1}.$$

Wegen Lemma 1.16 gilt damit  $f_l, F_l \in L(\mathbb{Z})$ . Daher sind die Voraussetzungen für den Vertauschungssatz 4.32 erfüllt. Wendet man ihn an, erhält man:  $f(x)$  differenzierbar im Intervall  $[-q\rho, q\rho]$  und die Potenzreihe kann dort gliedweise abgeleitet werden, und die abgeleitete Potenzreihe besitzt (mindestens) denselben Konvergenzradius  $R$ . Iteriert man schließlich diesen Schluß, und betrachtet anschliessend den Limes  $q \rightarrow 1$  und  $\rho \rightarrow R$ , so folgt

**Satz 4.38.** Ist der Konvergenzradius  $R$  der Potenzreihe  $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l$  echt grösser als 0, dann ist im Bereich  $\|x\| < R$  die Funktion  $f(x)$  unendlich oft differenzierbar und die Potenzreihe ist gliedweise ableitbar, d.h. es gilt

$$f'(x) = \sum_{l=0}^{\infty} l a_l x^{l-1}$$

und der Konvergenzradius der abgeleiteten Potenzreihe ist wieder  $R$ .

#### 4 Differentiation

Ist der Konvergenzradius  $R > 0$ , folgt aus Satz 4.38 durch  $n$ -faches Ableiten der Potenzreihe  $f(x)$  die Formel  $f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n + \sum_{l>n} a_l \cdot (x^l)^{(n)}$ . Setzt man  $x = 0$ , wird die Restsumme über alle Summanden  $l > n$  gleich Null. Es folgt

**Lemma 4.39.** *Ist der Konvergenzradius  $R$  der Potenzreihe  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  echt größer als 0, dann gilt die **Taylorformel***

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

*Insbesondere sind alle Koeffizienten  $a_n$  durch die Funktion  $f(x)$  eindeutig bestimmt.*

Nun einige einfache, aber fundamentale **Beispiele für Potenzreihen**:

Die Funktion  $f(t) = (1+t)^\alpha$  ist auf dem Intervall  $(-1, \infty)$  differenzierbar und die eindeutig bestimmte Lösung der linearen Differentialgleichung  $(1+t)f'(t) = \alpha \cdot f(t)$  zum Anfangswert  $f(0) = 1$ . Es folgt für  $\binom{\alpha}{n} := \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n (\alpha + 1 - i)$

**Lemma 4.40.** *Für alle  $t \in (-1, 1)$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt<sup>19</sup>*

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot t^n.$$

**Beweis.** Beide Seiten erfüllen auf  $(-1, 1)$  dieselbe Differentialgleichung, auf der rechten Seite wegen  $n \cdot \binom{\alpha}{n} + (n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} = \alpha \cdot \binom{\alpha}{n}$  und  $\binom{\alpha}{0} = 1$  bei gliedweisem Ableiten.  $\square$

Im ganzzahligen Fall  $\alpha = m \in \mathbb{N}$  reduziert sich Lemma 4.40 auf das klassische **Binomial Theorem** und  $\binom{m}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n (m+1-i)$  wird dann Null für alle  $n \geq m+1$ . Man erhält dadurch folgende Formel für die **Binomialkoeffizienten**  $\binom{m}{n}$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}, \quad 0 \leq n \leq m.$$

Analog zeigt man

**Lemma 4.41.** *Für alle  $t \in (-1, 1)$  gilt  $\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$ .*

**Satz 4.42.** *Für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt<sup>20</sup>*

$$\exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Allgemeiner ist für eine  $m \times m$ -Matrix  $X$  die **Matrix Exponentialfunktion**

$$f(t) = \exp(tX) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} t^n$$

<sup>19</sup>Für  $0 < \rho := |x| < 1$  gilt  $|\binom{\alpha}{i} \rho^i| \leq C \rho^i \prod_{i=l_0}^l |1 - \frac{\alpha+1}{i}| \leq C$  für alle  $l \geq l_0$ , wenn  $l_0$  so groß ist daß  $|\frac{\alpha+1}{l_0}| < 1$ . Hierbei ist  $C$  eine geeignet gewählte von  $l$  unabhängige Konstante. Für  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot t^n$  ist damit der Konvergenzradius  $R \geq 1$ .

<sup>20</sup>Für beliebiges  $\rho$  gilt  $|\frac{\rho^l}{l!}| \leq C \cdot |\frac{\rho}{l_0}|^l \leq C$  für alle  $l \geq l_0$ , falls  $l_0$  so groß ist daß  $|\frac{\rho}{l_0}| < 1$ . Hierbei ist obdA  $C = \prod_{1 \leq i < l_0} \frac{l_0}{i}$ . Für  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$  ist daher der Konvergenzradius  $R = +\infty$ .

erklärt als matrixwertige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow M_{m,m}(\mathbb{R})$ , und ist dabei eindeutig bestimmt durch die lineare Differentialgleichung ( $\circ$  ist hier die Matrixmultiplikation)

$$\frac{d}{dt}f(t) = X \circ f(t) \quad , \quad f(0) = id .$$

Für  $t, s \in \mathbb{R}$  gilt die **Matrix-Funktionalgleichung**

$$\boxed{\exp(sX) \circ \exp(tX) = \exp((s+t)X)} .$$

Insbesondere ist  $\exp(tX)$  eine invertierbare Matrix

$$\exp(tX) \in Gl(m, \mathbb{R})$$

mit Umkehrmatrix  $\exp(-tX)$ . Zum Beweis der Funktionalgleichung genügt, daß beide Seiten dieselbe Differentialgleichung  $\frac{d}{ds}F(s) = X \circ F(s)$  erfüllen mit  $F(0) = \exp(tX)$ .

Ähnlich gilt  $\exp(tX) \in Gl(m, \mathbb{C})$  für komplexe Matrizen  $X \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ . Eine komplexe Matrix  $M \in M_{m,m}(\mathbb{C})$  nennt man **unitär**, wenn  $M^\dagger \circ M = id$  gilt; hierbei sei  $M^\dagger = {}^T \bar{M}$  die hermitesch transponierte Matrix. Gilt

$$X^\dagger = -X ,$$

nennt man eine Matrix  $X \in M_{m,m}$  **antihermitesch**. Die antihermiteschen Matrizen bilden eine **Lie Algebra**, denn für antihermitesche Matrizen  $X, Y$  gilt

$$[X, Y]^\dagger = (XY - YX)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger - X^\dagger Y^\dagger = (-Y)(-X) - (-X)(-Y) = -(XY - YX) = -[X, Y] .$$

Die hermiteschen Matrizen dagegen bilden keine Lie Algebra!

**Lemma 4.43.** Für  $M \in M_{m,m}(\mathbb{C})$  gilt:  $\exp(tX)$  ist unitär für alle  $t \in \mathbb{R}$  genau dann wenn  $X$  antihermitesch ist

$$\boxed{\exp(tX) \text{ ist unitär } \forall t \in \mathbb{R} \iff X \text{ ist antihermitesch} \iff \frac{X}{2\pi i} \text{ ist hermitesch}} .$$

**Beweis.** Ist  $\exp(tX)$  unitär für alle  $t \in \mathbb{R}$ , gilt  $\exp(tX)^\dagger \circ \exp(tX) = id$ . Durch Ableiten folgt aus der Produktregel  $(X \circ \exp(tX))^\dagger \circ \exp(tX) + \exp(tX)^\dagger \circ X \circ \exp(tX) = 0$ . Setzt man  $t = 0$ , folgt  $X^\dagger + X = 0$ .

Ist umgekehrt  $X$  antihermitesch, dann gilt  $\exp(tX)^\dagger \circ \exp(tX) = \exp(tX^\dagger) \circ \exp(tX) = \exp(-tX) \circ \exp(tX) = \exp(0) = id$ . Im ersten Schritt wurde die Stetigkeit der Abbildung  $X \mapsto X^\dagger$  benutzt, im zweiten Schritt die Annahme  $X^\dagger = -X$  und im letzten Schritt die Matrix-Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.  $\square$

**Übungsaufgabe.** Zeige für reelles  $t$  die Aussage

$$\boxed{\exp(it) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)} .$$



# 5 Ausgewählte Themen I

## 5.1 Wegintegrale

Sei  $U$  eine offene Teilmenge im  $\mathbb{R}^n$  und  $\omega \in A^1(U)$  eine 1-Form auf  $U$

$$\omega = \sum_{i=1}^n F_i(x) dx_i .$$

Ein **Weg**  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ist eine stückweise stetig differenzierbare Funktion auf  $[a, b]$  (mit Stützstellen  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{r-1} \leq t_r = b$ ); d.h.  $\gamma_i := \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  ist stetig differenzierbar auf jedem der Teilintervalle  $[t_{i-1}, t_i]$ . Wir definieren dann das **Wegintegral**

$$\int_{\gamma} \omega := \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma^*(\omega) .$$

Beachte  $\gamma^*(dx_i) = d\gamma^*(x_i) = d\gamma_i(t) = \dot{\gamma}_i(t) dt$  (Ableitung nach  $t$ ), also ist

$$\gamma^*(\omega)(t) = \sum_i \gamma^*(F_i(x) dx_i) = \left( \sum_i F_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right) dt = (F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) \cdot dt$$

bis auf  $dt$  das Skalarprodukt  $(F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t))$  von  $F(\gamma(t))$  mit dem Tangentenvektor  $\dot{\gamma}(t)$ . Besitzt  $\omega$  eine Stammfunktion  $\phi$ , d.h. gilt  $\omega = d\phi$  für ein  $\phi \in A^0(U)$ , dann gilt

$$\int_{\gamma} d\phi = \phi(B) - \phi(A)$$

für  $P = \gamma(a)$  (Anfangspunkt) und  $B = \gamma(b)$  (Endpunkt des Weges); insbesondere hängt dann das Wegintegral nur vom Anfangspunkt  $A$  und vom Endpunkt  $B$  des Weges ab. Zum Beweis:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma^*(\omega) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma^*(d\phi) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} d(\phi(\gamma(t))) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{dt} \phi(\gamma(t)) dt = \phi(\gamma(t_i)) - \phi(\gamma(t_{i-1})) .$$

Also ist  $\int_{\gamma} d\phi$  als teleskopierende Summe gleich  $\phi(\gamma(t_r)) - \phi(\gamma(t_0)) = \phi(B) - \phi(A)$ .

In der klassischen Mechanik (speziell im Fall  $n = 3$ ) kann eine 1-Form  $\omega$  im  $\mathbb{R}^n$  als **Kraft** aufgefaßt werden representiert durch den Vektor  $F = (F_1, \dots, F_n)$ , und  $\int_{\gamma} \omega$  als **Arbeit** entlang des Weges  $\gamma$ . Ist die Kraft von der Form  $\omega = d\phi$ , nennt man  $\phi$  ein **Potential**. Eine Kraft heißt **konservativ**, wenn die Arbeit nicht vom Weg  $\gamma$ , sondern nur von dem Anfangspunkt  $P = \gamma(a)$  und vom Endpunkt  $B = \gamma(b)$  des Weges abhängt. Offensichtlich äquivalent dazu ist, daß das Wegintegral  $\int_{\gamma} \omega$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$ , d.h mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , verschwindet.

## 5 Ausgewählte Themen I

**Satz 5.1.** Sei  $\omega \in A^1(U)$ . Verschwindet für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$  das Wegintegral  $\int_\gamma \omega = 0$ , dann gilt  $d\omega = 0$ .

**Beweis.** Für  $\xi \in U$  wählen wir ein kleines Quadrat  $Q$  (in der  $x_i, x_j$ -Ebene) um  $\xi$  in  $U$ . Nach Annahme gilt  $\int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q} = 0$ . Also  $\int_Q d\omega = \int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q} = 0$  (Satz von Stokes). Sei  $d\omega = \sum_{\nu < \mu} f_{\nu\mu}(x) dx_\nu \wedge dx_\mu$ , dann ist  $\int_Q d\omega = \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_j}^{b_j} f_{ij}(\xi_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, \xi_n) dx_i dx_j$  also Null. Lässt man das Quadrat schrumpfen, konvergiert  $\int_Q d\omega / \text{vol}(Q)$  gegen  $f_{ij}(\xi)$ . Es folgt  $f_{ij}(\xi) = 0$  für alle  $i, j$  aus der Stetigkeit von  $d\omega$ , und damit  $d\omega = 0$ .  $\square$

Aus dem Poincare Lemma und dem letzten Satz folgt daher

**Satz 5.2.** Sei  $U$  sternförmig. Dann ist eine Form  $\omega \in A^1(U)$  konservativ (mit Potential  $\phi$ ) genau dann, wenn  $d\omega = 0$  gilt. Das Potential  $\phi$  ist eindeutig durch  $\omega$  bestimmt bis auf eine Konstante.

**Bemerkung 5.3.** Sei  $x_0 = 0$  ein Sternmittelpunkt von  $U$ . Aus der Homotopie Formel  $dI + Id = id$  (siehe Sektion 4.13) und  $d\omega = 0$  ergibt sich  $\phi(x) = I(\omega)(x) + \text{const.}$ , also

$$\phi(x) - \phi(0) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \int_0^1 F_i(tx) dt$$

in Übereinstimmung mit der obigen Formel  $\phi(x) - \phi(0) = \int_\gamma \omega = \int_0^1 (F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) \cdot dt$ , bei Wahl des speziellen geraden Weges  $\gamma(t) = tx$ .

**Satz 5.4.** Eine Form  $\omega \in A^1(U)$  ist konservativ genau dann, wenn ein Potential  $\phi \in A^0(U)$  existiert mit  $d\phi = \omega$ .

**Beweis.** Existiert ein Potential  $\phi$ , dann ist die Kraft konservativ. Die Umkehrung: ObdA ist  $U$  wegzusammenhängend, und man kann dann jeden Punkt in  $U$  mit einem fixierten Punkt  $x_0$  durch einen Weg verbinden. Dann setzt man  $\phi(x) := \int_\gamma \omega$  für einen beliebigen Weg  $\gamma$  mit Anfangspunkt  $x_0$  und Endpunkt  $x$ . Um  $d\phi = \omega$  in einem beliebigen Punkt  $\xi \in U$  zu zeigen, kann man  $U$  durch eine offene nichtleere Kreisscheibe  $V = K_\varepsilon(\xi) \subset U$  ersetzen wegen  $\phi(x) = \phi(\xi) + \int_\gamma \omega$  (für einen Weg  $\gamma$  in  $V$  von  $\xi$  nach  $x$ ). Die Behauptung folgt dann, in der sternförmigen Menge  $V$ , aus Satz 5.2 und der nach diesem Satz folgenden Bemerkung.  $\square$

**Beispiel.** Sei

$$\omega = \frac{dz}{z} = \frac{(x - iy) \cdot (dx + idy)}{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{r^2} + i \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d \log(r) + i \cdot \text{Im}(\omega).$$

Dies ist eine komplexwertige  $C^\infty$ -Form auf  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Ihr Realteil  $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$  ist konservativ mit Potential  $\log(r)$  in  $U$ . Ihr Imaginärteil  $\text{Im}(\omega) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$  ist nicht konservativ, denn nach Sektion 4.13 gilt  $\int_\gamma \text{Im}(\omega) = 2\pi$  für den geschlossenen Kreisweg  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$  definiert durch  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . Dies liefert für den Kreisweg  $\gamma$  das Wegintegral

$$\boxed{\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i}.$$

## 5.2 Holomorphe Funktionen

Eine Differentialform mit komplexen Koeffizienten  $\omega = \alpha + i\beta$  wird definiert durch zwei reelle Differentialformen  $\alpha$  und  $\beta$ , die man den Real- bzw. Imaginärteil von  $\omega$  nennt. Für komplexwertige 1-Formen erklärt man das Wegintegral durch

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{\gamma} \alpha + i \cdot \int_{\gamma} \beta.$$

Sei nun  $U$  eine offene Teilmenge der komplexen Ebene  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ . Für Funktionen  $f$  auf  $U$  schreiben wir dann häufig  $f(z) = f(x, y)$ , falls  $z = x + iy \in U$ . Sei  $\beta \in A^1(U)$  eine reelle 1-Form auf  $U$ . Diese lässt sich schreiben in der Gestalt  $\beta = v(x, y)dx + u(x, y)dy$  für Funktionen  $u, v \in C^\infty(U)$ . Diese reelle 1-Form lässt sich interpretieren als Imaginärteil der komplexen 1-Form auf  $U$

$$\omega = \left( u(x, y)dx - v(x, y)dy \right) + i \cdot \left( v(x, y)dx + u(x, y)dy \right).$$

Für die komplexwertige  $C^\infty$ -Funktion  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  auf  $U$  und die komplexwertige 1-Form  $dz := dx + idy$  gilt dann (durch Ausmultiplizieren)

$$\omega = f(z) \cdot dz = (u + iv)(dx + idy).$$

**Lemma 5.5.** *Mit den obigen Annahmen und Bezeichnungen sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

1. Auf  $U$  gilt  $d\omega = 0$ .
2. Auf  $U$  gelten die **Cauchy-Riemann** Differentialgleichungen  $\partial_y v = \partial_x u$  und  $\partial_x v = -\partial_y u$ , oder kurz:  $(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = 0$ .
3. Die Jacobimatrix  $Df(z)$  der Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  hat für alle  $z \in U$  die Gestalt

$$Df(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ -b(z) & a(z) \end{pmatrix}.$$

**Beweis.** Dies folgt unmittelbar aus  $d\omega = -(\partial_y u + \partial_x v)dx \wedge dy - i(\partial_y v - \partial_x u)dx \wedge dy$ .  $\square$

**Definition 5.6.** *Eine komplexwertige Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  der Gestalt  $f(z) = u(z) + iv(z)$  mit  $u, v \in C^\infty(U)$  heißt **holomorph** auf  $U$ , wenn die drei äquivalenten Bedingungen des letzten Lemmas für  $f$  erfüllt sind.*

**Beispiel.** Die Funktion  $f(z) = z$  ist offensichtlich holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Wegen  $u(z) = x$  und  $v(z) = y$  verifiziert man sofort die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen.

**Lemma 5.7.** *Die auf  $U$  holomorphen Funktionen bilden einen Unterring  $\mathcal{O}(U)$  des Rings  $C^\infty(U, \mathbb{C})$ . Für  $f, g \in \mathcal{O}(U)$  mit  $g(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$  ist auch  $f(z)/g(z)$  holomorph auf  $U$ .*

**Lemma 5.8.** Sind  $f: U \rightarrow V$  und  $g: V \rightarrow W$  holomorphe Funktionen und  $U, V, W$  offene Teilmengen von  $\mathbb{C}$ , dann ist auch  $g \circ f: U \rightarrow W$  holomorph.

**Lemma 5.9.** Ist  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann sind Realteil  $u(x, y)$  und Imaginärteil  $v(x, y)$  reelle **harmonische**<sup>1</sup> Funktionen auf  $U$ , ebenso  $\log(|f(z)|)$  im Komplement der Nullstellen.

Das erste der drei letzten Lemmata folgt sofort aus der Produktregel mit Hilfe der Cauchy-Riemann Differentialgleichungen  $D(fg) = D(f)g + fD(g) = 0$  für  $D = \partial_x + i\partial_y$  und  $f, g \in \mathcal{O}(U)$ . Das zweite folgt aus der Kettenregel mit Hilfe von Lemma 5.5(3). Das dritte folgt aus  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)$ , d.h.  $(\partial_x + i\partial_y)f = 0 \Rightarrow \Delta f = 0$ .

### 5.3 Vektorfelder I

Sei  $U$  eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ein Vektorfeld  $X$  auf  $U$  ist ein Differentialoperator

$$X = \sum_{\nu=1}^n a_\nu(x) \cdot \partial_\nu$$

mit Koeffizienten  $a_\nu(x) \in C^\infty(U)$ . Hierbei faßt man die  $\partial_\nu$  als Differentialoperatoren auf. Das heißt, man kann ein Vektorfeld  $X$  auf eine Funktion  $f \in C^\infty(U)$  anwenden in der Form  $X(f)(x) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu(x) \cdot \partial_\nu(f)(x)$ , und erhält wieder eine Funktion  $X(f) \in C^\infty(U)$ . Auf diese Weise definiert ein Vektorfeld  $X$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$X: C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$$

und **Derivation**, d.h. es gilt  $X(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot X(f) + \mu \cdot X(g)$  für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  sowie

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g) \quad , \quad f, g \in C^\infty(U)$$

was sich ja unmittelbar aus der Produktregel für Ableitungen ergibt.

Sind  $X = \sum_{\nu=1}^n a_\nu(x) \cdot \partial_\nu$  und  $Y = \sum_{\mu=1}^n b_\mu(x) \cdot \partial_\mu$  Vektorfelder, dann ist der **Kommutator**

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

wieder ein Vektorfeld. In der Tat ist a priori  $[X, Y]$  ein Differentialoperator zweiter Ordnung, aber die zweiten Ableitungen  $\sum_{\nu, \mu} a_\nu(x) b_\mu(x) (\partial_\nu \partial_\mu - \partial_\mu \partial_\nu)$  kürzen sich wegen Satz 4.11 weg. Die genaue Rechnung zeigt  $X \circ Y - Y \circ X = \sum_{\nu=1}^n c_\nu(x) \cdot \partial_\nu$  mit den Koeffizienten  $c_\nu(x) = \sum_\mu a_\mu(x) \partial_\mu(b_\nu(x)) - b_\mu(x) \partial_\mu(a_\nu(x))$  in  $C^\infty(U)$ .

Ein Vektorfeld  $X = \sum_{\nu=1}^n a_\nu(x) \partial_\nu$  auf  $U$  definiert einen **Kontraktionsoperator**

$$i_X: A^j(U) \rightarrow A^{j-1}(U)$$

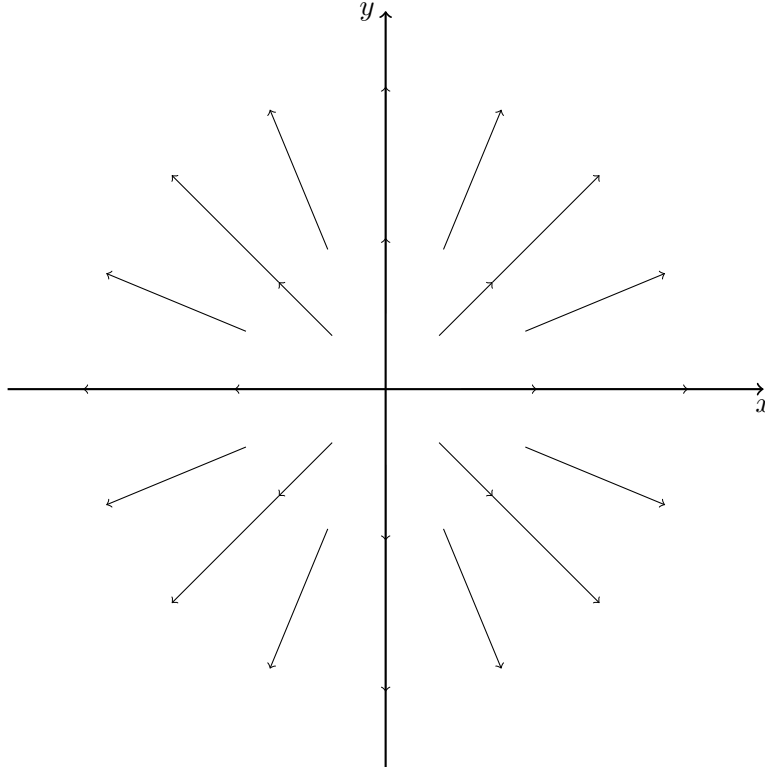
vermöge<sup>2</sup> der Definition  $i_X(\omega) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu(x) \cdot (\partial_\nu \lrcorner \omega)$ .

<sup>1</sup>d.h. wird von  $\partial_x^2 + \partial_y^2$  annulliert; siehe Abschnitt 5.8.

<sup>2</sup>Auf dem antisymmetrischen Polynomring  $\mathcal{S}_n$  (siehe Abschnitt 5.13) definiert man die  $\mathbb{R}$ -linearen ‘Ableitungen’  $\frac{\partial}{\partial \theta^\nu}: \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  durch  $\frac{\partial}{\partial \theta^\nu}(\theta^\nu \cdot g(\theta)) = g(\theta)$ , sowie  $\frac{\partial}{\partial \theta^\nu} \theta^I = 0$  für  $\nu \notin I$ . Ersetzt man formal die  $dx_J$  durch  $\theta^J \in \mathcal{S}_n$ , entspricht  $\frac{\partial}{\partial \theta^\nu} \theta^J$  der Form  $\partial_\nu \lrcorner dx_J$  (siehe Abschnitt 4.13). In diesem Sinne ist  $i_X = \sum_{\nu=1}^n a_\nu(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^\nu}$ .

Ein Vektorfeld  $X = \sum_{\nu=1}^n a_\nu(x) \cdot \partial_\nu$  lässt sich visualisieren, indem man an jedem Punkt  $\xi \in U$  den Vektor  $a(\xi) = (a_1(\xi), \dots, a_n(\xi)) \in \mathbb{R}^n$  anfügt. Die Funktion  $a: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert ein ‘Feld’ von Vektoren, wenn man  $a(x)$  als ‘Tangentenvektor’ im Punkt  $x$  visualisiert.

**Beispiel.** Das **Eulerfeld**<sup>3</sup>  $E = \sum_{\nu} x_\nu \partial_\nu$  mit  $a(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ . Im Fall  $n = 2$



Eine nicht identisch verschwindende Funktion  $f(x)$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  heisst **homogen** vom Grad  $\alpha$ , wenn für alle reellen  $t > 0$  gilt

$$f(t \cdot x) = t^\alpha \cdot f(x).$$

Der Grad  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist dann eindeutig bestimmt. Eine homogene Funktionen ist durch ihre Werte auf der Sphäre  $X$  vom Radius  $\|x\| = 1$  eindeutig bestimmt. Ist  $f(x)$  ein Polynom, dann ist  $\alpha = l$  notwendiger Weise eine natürliche Zahl  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

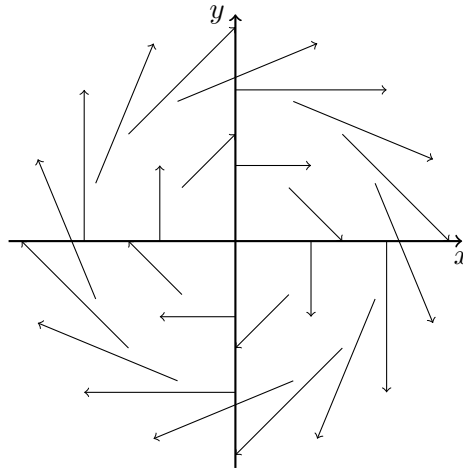
**Lemma 5.10.** Sei  $f(x)$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Dann ist  $f(x)$  homogen vom Grad  $\alpha$  genau dann, wenn für den **Euler Operator**  $E = \sum_{\nu} x_\nu \partial_\nu$  gilt  $E(f) = \alpha \cdot f$ .

**Beweis.** Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  fixiert. Im Fall  $E(f) = \alpha f$  ist  $g(t) = f(tx)$  wegen  $\alpha f(tx) = E(f)(tx) = \sum_{\nu} x_\nu \partial_\nu f(tx) = t \sum_{\nu} x_\nu (\partial_\nu f)(tx) = t \frac{d}{dt} f(tx)$  eine Lösung der Differentialgleichung  $\frac{d}{dt} g(t) = \frac{\alpha}{t} \cdot g(t)$  mit  $g(1) = f(x)$ . Also  $g(t) = t^\alpha \cdot f(x)$  wegen Satz 4.18. Die Umkehrung ist trivial.  $\square$

<sup>3</sup>Der zugehörige Fluß (Abschnitt 5.4) ist  $\varphi_t(x) = \exp(t) \cdot x$  wegen  $a(x) := \frac{d}{dt} \varphi_t(x)|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\exp(t) \cdot x)|_{t=0} = x$ . Beachte  $\frac{d}{dt} f(\exp(t) \cdot x)|_{t=0} = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} f(x) = E(f)$  für  $f \in C^\infty(U)$ .

## 5 Ausgewählte Themen I

Ein anderes Beispiel liefert das **Drehfeld**<sup>4</sup>  $L_{21} = -L_{12} = y\partial_x - x\partial_y$  mit  $a(x, y) = (y, -x)$



Ist  $f(x)$  homogen vom Grad  $\lambda$ , dann sind die partiellen Ableitungen  $\partial_\nu f$  homogen vom Grad  $\lambda - 1$ . Die Differentialoperatoren  $E = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \partial_\nu$  und  $L_{\nu\mu} = x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu$  erhalten daher den Homogenitätsgrad. Beachte  $L_{\nu\mu} = -L_{\mu\nu}$ . Wir nehmen daher immer  $\nu \neq \mu$  an. Dann ist<sup>5</sup>

$$[L_{\alpha\beta}, L_{\beta\gamma}] = L_{\alpha\gamma}$$

für  $\alpha \neq \gamma$  und ist Null sonst. Ebenso  $[L_{\alpha\beta}, L_{\gamma\delta}] = 0$ , falls  $\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset$ . Also ist  $\sum_{\nu < \mu} \mathbb{R} \cdot L_{\nu\mu}$  eine **Lie Algebra**, d.h. abgeschlossen unter Kommutatorbildung.

**Lemma 5.11.** Der Operator  $L^2 := \sum_{\alpha < \beta} (L_{\alpha\beta})^2$  vertauscht mit allen  $L_{\nu\mu}$

$$[L^2, L_{\nu\mu}] = 0.$$

**Beweis.** Sei obdA  $L_{\nu\mu} = L_{12}$ . Dann vertauscht  $L_{12}$  mit  $L_{\alpha\beta}^2$  ausser wenn genau einer der beiden Indizes  $\alpha, \beta$  in  $\{1, 2\}$  liegt. Es gilt  $[L_{12}, L_{1\alpha}^2] = (L_{12}L_{1\alpha} - L_{1\alpha}L_{12})L_{1\alpha} + L_{1\alpha}(L_{12}L_{1\alpha} - L_{1\alpha}L_{12}) = [L_{12}, L_{1\alpha}]L_{1\alpha} + L_{1\alpha}[L_{12}, L_{1\alpha}] = -L_{2\alpha}L_{1\alpha} - L_{1\alpha}L_{2\alpha}$  für  $\alpha \neq 1, 2$ . Analog  $[L_{12}, L_{2\alpha}^2] = [L_{12}, L_{2\alpha}]L_{2\alpha} + L_{2\alpha}[L_{12}, L_{2\alpha}] = L_{1\alpha}L_{2\alpha} + L_{2\alpha}L_{1\alpha}$ . Aufsummation über alle  $\alpha \geq 3$  gibt Null.  $\square$

Es gilt  $L_{\nu\mu}(r^2) = 0$  für  $r^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$ ; umgekehrt gilt für  $n \geq 2$

Jedes Polynom  $P = P(x_1, \dots, x_n)$  mit  $L_{\nu\mu}(P) = 0$  für alle  $\nu, \mu$  ist ein Polynom in  $r^2$ .

[Für  $n > 2$  kann man per Induktion annehmen  $P = Q(x_1, \rho^2)$  für  $\rho^2 = x_2^2 + \dots + x_n^2$ , und damit  $P = \sum_{i \geq m} x_1^i P_i(r^2)$  wegen  $\rho^2 = r^2 - x_1^2$ ; obdA  $P_m(r^2) \neq 0$ . Durch Subtraktion von  $P_0(r^2)$  ist obdA  $m > 0$ ; man muss dann zeigen  $P = 0$ . Wäre  $P \neq 0$ , folgt aus  $L_{1i}(P) = 0$  für  $i \geq 2$  sofort  $x_i P_m(r^2) = 0$  im Widerspruch zu  $P_m(r^2) \neq 0$ . Der Fall  $n = 2$  geht ähnlich (hierbei nimmt man am besten obdA an,  $P$  sei homogen vom Grad  $\ell$ ).]

<sup>4</sup>Der zugehörige Fluß ist  $\varphi_t(x, y) = (\cos(t)x + \sin(t)y, -\sin(t)x + \cos(t)y)$  im Sinne von Abschnitt 5.4 und Lemma 4.22, d.h. es gilt  $a(x, y) := \frac{d}{dt} \varphi_t(x, y)|_{t=0} = (y, -x)$ .

<sup>5</sup> $L_{\alpha\beta}L_{\beta\gamma} - L_{\beta\gamma}L_{\alpha\beta} = (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)(x_\beta \partial_\gamma - x_\gamma \partial_\beta) - (x_\beta \partial_\gamma - x_\gamma \partial_\beta)(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha) = x_\alpha \partial_\gamma - x_\gamma \partial_\alpha = L_{\alpha\gamma}$ .

## 5.4 Vektorfelder II

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen.  $C^\infty$ -Koordinatenwechsel  $\varphi : U \rightarrow U$  (siehe 4.26) bilden eine Gruppe unter Komposition. Einen Homomorphismus  $t \mapsto \varphi_t$  der additiven Gruppe  $\mathbb{R}$  in diese Gruppe nennt man einen **Fluß** auf  $U$ ; d.h. es gilt  $\varphi_0 = id_U$  und die **Funktionalgleichung**

$$\boxed{\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}} \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Wir fordern hierbei stillschweigend  $\varphi_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R} \times U)$ . Damit definiert  $\varphi_t$  ein **zugeordnetes Vektorfeld**  $X = X_\varphi$  auf  $U$

$$\boxed{X = \sum_{\nu=1}^n a_\nu(x) \cdot \partial_\nu} \quad \text{für} \quad \boxed{a_\nu(x) := \left. \frac{d\varphi_t(x)_\nu}{dt} \right|_{t=0}}.$$

Das Vektorfeld  $X$  (d.h. die Funktion  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ ) legt den Fluß eindeutig fest vermöge der Anfangsbedingung  $\varphi_0(x) = x$  und der Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{d}{dt} \varphi_t(x) = a(\varphi_t(x))}.$$

[Nach Definition ist  $a(\xi) = \left. \frac{d}{ds} \varphi_s(\xi) \right|_{s=0}$ . Für  $\xi = \varphi_t(x)$  ist  $\left. \frac{d}{ds} \varphi_s(\xi) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \varphi_s(\varphi_t(x)) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \varphi_{s+t}(x) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right|_{t=0}$  wegen  $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$ . Es folgt  $\left. \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right|_{t=0} = a(\varphi_t(x))$ .]

**Liableitung.** Sei  $\omega \in A^j(U)$ . Für einen Fluß  $\varphi_t$  auf  $U$  gilt  $(\varphi_t)^*(\omega) \in A^j(U)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Wir definieren die Liableitung  $L_X : A^j(U) \rightarrow A^j(U)$  durch

$$\boxed{L_X(\omega) := \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t)^*(\omega) \right|_{t=0}}.$$

Man zeigt durch Ableiten der Funktionalgleichung  $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_s$  leicht<sup>6</sup>

$$\boxed{\left. \frac{d}{dt} (\varphi_t)^*(\omega) \right|_{t=0} = \varphi_t^*(L_X(\omega)) = L_X(\varphi_t^*(\omega))} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Die Kettenregel liefert  $L_X(f)(x) = \left. \frac{d}{dt} f(\varphi_t(x)) \right|_{t=0} = \sum_{\nu=1}^n (\partial_\nu f)(x) \cdot a_\nu(x) = X(f)(x)$ , also die erste der Eigenschaften

1.  $L_X$  ist  $\mathbb{R}$ -linear, und für  $f \in A^0(U)$  gilt  $L_X(f) = X(f)$ .
2.  $L_X$  vertauscht mit der Cartanableitung  $d$ .
3.  $L_X$  eine **Derivation**:  $L_X(\eta \wedge \omega) = L_X(\eta) \wedge \omega + \eta \wedge L_X(\omega)$  für  $\eta, \omega \in A^\bullet(U)$ .

[Eigenschaft 2) folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von  $\varphi_t^*$ . Eigenschaft 3) folgt aus der  $\frac{d}{dt}$ -Produktregel wegen  $L_X(\eta \wedge \omega) = \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t)^*(\eta \wedge \omega) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} ((\varphi_t)^*(\eta) \wedge (\varphi_t)^*(\omega)) \right|_{t=0}$ .]

**Lemma 5.12 (Cartan Formel).** Auf  $A^\bullet(U)$  stimmen  $L_X$  und  $i_X \circ d + d \circ i_X$  überein.

<sup>6</sup>  $\left. \frac{d}{dt} (\varphi_t)^*(\omega) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{ds} (\varphi_{s+t}^*(\omega)) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} (\varphi_s^*(\varphi_t^*(\omega))) \right|_{s=0} = \varphi_t^* \left( \left. \frac{d}{ds} \varphi_s^*(\omega) \right|_{s=0} \right) = \varphi_t^*(L_X(\omega))$  oder gleich  $\left. \frac{d}{ds} (\varphi_s^*(\varphi_t^*(\omega))) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \varphi_s^*(\varphi_t^*(\omega)) \right|_{s=0} = L_X(\varphi_t^*(\omega))$

**Beweis.** Da  $A^\bullet(U)$  als Algebra von  $C^\infty(U)$  und  $d(C^\infty(U))$  erzeugt wird, legen die Eigenschaften 1)-3) die Lieableitung eindeutig fest. Es genügt daher, daß  $D := i_X \circ d + d \circ i_X$  die obigen Eigenschaften 1)-3) erfüllt. 1) folgt aus  $D(f) = i_X(df) = X(f)$  für  $f \in C^\infty(U)$ . Wegen  $d \circ D = d \circ i_X \circ d = D \circ d$  vertauscht  $D$  mit  $d$ , und schliesslich ist  $D$  eine Derivation<sup>7</sup>.  $\square$

**Bemerkung 5.13.** Die *Homotopieformel*  $\omega = I(d\omega) + dI(\omega)$  im Beweis des *Poincare Lemmas* erhält man recht elegant durch Lemma 5.12: Sei  $x_0 = 0$  der Sternmittelpunkt von  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Der Fluß  $\varphi_t(x) = \exp(-t) \cdot x$  auf  $\mathbb{R}^n$  bildet für  $t \leq 0$  das sternförmige Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  in sich ab mit  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = x_0$  für alle  $x \in U$ . Setze  $J(\omega) = \int_{-\infty}^0 \varphi_t^*(\omega)$  sowie  $I(\omega) = J(i_X(\omega))$  für das assoziierte Vektorfeld  $X$  (das Eulerfeld  $E$ ). Das Integral ist definiert (!), und  $\varphi_0^*(\omega)(x) - \varphi_{-\infty}^*(\omega)(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dt} \varphi_t^*(\omega)(x) dt = \int_{-\infty}^0 \varphi_t^*(L_X(\omega)) dt = J \circ (d \circ i_X + i_X \circ d)(\omega)$  nach der *Cartan Formel*. Wegen  $J \circ d = d \circ J$  (Satz 4.32) ist dies  $d \circ J \circ i_X + J \circ i_X \circ d = d \circ I + I \circ d$ . Beachte  $\varphi_0^*(\omega) = \omega$  und es gilt  $\varphi_{-\infty}^*(\omega)(x) = \delta_{j0} \cdot \omega(x_0)$  (!) für  $\omega \in A^j(U)$ .

**Konstruktion von Flüssen.** Sei  $K \subset U$  eine kompakte Teilmenge. Ein Fluß  $\varphi_t$  auf  $U$  heisst *K-lokal*, wenn  $\varphi(x) = x$  gilt für  $x \notin K$ . Aus  $\varphi_t(x) = x$  für  $x \notin K$  folgt  $a_\nu(x) = 0$  für  $x \notin K$  und alle  $\nu$ . Damit hat das assoziierte Vektorfeld  $X$  Träger in  $K$ .

**Lemma 5.14.** Auf  $U$  besteht eine 1-1 Korrespondenz zwischen *K-lokalen Flüssen*  $\varphi_t = \varphi_t^X$  und Vektorfeldern  $X = X_\varphi$  mit Träger in  $K$ .

**Beweis.** Für  $X = \sum_\nu a_\nu(x) \partial_\nu$  mit Träger in  $K$  lässt sich  $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$  durch Null zu einer  $C^\infty$ -Funktion  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  fortsetzen. Für fixiertes  $\xi \in \mathbb{R}^n$  besitzt  $f'(t) = a(f(t))$  eine eindeutige Lösung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f(0) = \xi$  nach Satz 4.15, denn die *Lipschitzbedingung*  $\|a(x) - a(y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M \sqrt{n} \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$  für  $M = \max_{\theta \in K} (\|Da(\theta)\|) < \infty$  (Satz 2.10) und alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  folgt aus dem Mittelwertsatz. Für  $\varphi_t(\xi) := f(t)$  gilt dann  $\varphi_0(\xi) = \xi$  sowie  $\varphi_s(\varphi_t(\xi)) = \varphi_{s+t}(\xi)$ , denn beide Seiten erfüllen dieselbe Differentialgleichung in  $s$  und die Anfangswerte bei  $s = 0$  sind wegen  $\varphi_0 = id$  gleich. Es folgt  $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$ . Insbesondere ist  $\varphi_t = \varphi_{-t}^{-1}$  bijektiv auf  $\mathbb{R}^n$ . Das  $\varphi_t$  zugeordnete Vektorfeld ist  $X$  wegen  $\frac{d}{dt} \varphi_t(\xi)|_{t=0} = f'(0) = a(f(0)) = a(\varphi_0(\xi)) = a(\xi)$ . Also  $\varphi_t(\xi) = \xi$  für  $\xi \notin K$ , d.h.  $\varphi_t(K) = K$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Bemerkung 5.15.** Für  $a(x) = (1 + x^2)$  definiert das Vektorfeld  $X = a(x) \frac{\partial}{\partial x}$  keinen Fluß  $\varphi_t$  auf  $\mathbb{R}$ , denn die Lösung  $f(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$  der Differentialgleichung  $f'(t) = 1 + f(t)^2$  mit  $f(0) = 0$  ‘explodiert’ bereits zu der endlichen Zeit  $t = \frac{\pi}{2}$ . Man kann sich aber oft wie folgt behelfen: In Abschnitt 5.16 konstruieren wir  $C^\infty$ -Funktionen  $\psi(x) \geq 0$ , welche auf einer gegebenen kompakten Teilmenge  $K' \subset \mathbb{R}^n$  konstant 1 sind und ausserhalb zu Null abklingen mit kompaktem Träger  $K$  in  $\mathbb{R}^n$ . Hat man ein beliebiges Vektorfeld  $Y$  auf  $\mathbb{R}^n$ , kann man  $Y$  durch  $X = \psi(x) \cdot Y$  ersetzen. Das Vektorfeld  $X$  hat dann Träger in der kompakten Menge  $K$ ; nach Lemma 5.14 gibt es den zugehörigen Fluß  $\varphi_t^X$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Innerhalb von  $K'$  hängt dieser Fluß nur von dem ursprünglichen Vektorfeld  $Y$  ab und nicht von der Wahl der Abschneidefunktion  $\psi$ . Insbesondere erlaubt uns dies, die Lieableitung für beliebige Vektorfelder zu definieren.

<sup>7</sup>Paritätsändernde  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen  $C$  mit  $C(\eta \wedge \omega) = C(\eta) \wedge \omega + (-1)^{grad(\eta)} \eta \wedge C(\omega)$  nennt man Superderivationen (auf einem graduierten Ring). Der Superkommutator  $D = AB + BA$  von zwei Superderivationen  $A, B$  ist eine Derivation, somit gilt  $D(\eta \wedge \omega) = D(\eta) \wedge \omega + \eta \wedge D(\omega)$ . Beachte,  $i_X$  und  $d$  sind Superderivationen.

## 5.5 Poissonklammer

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine 2-Form  $\omega \in A^2(U)$  heisst **nicht entartet**, wenn für alle  $x \in U$  die aus den Koeffizienten von  $\omega$  gebildete, antisymmetrisch ergänzte reelle  $n \times n$ -Matrizen  $(\omega_{\nu\mu}(x))$  invertierbar ist für alle  $x \in U$

$$\omega = \sum_{\nu < \mu} \omega_{\nu\mu}(x) \cdot dx_\nu \wedge dx_\mu \quad , \quad \boxed{\det(\omega_{\nu\mu}(x)) \neq 0} .$$

Mit Hilfe einer nicht entarteten 2-Form  $\omega$  kann man Vektorfelder  $X$  auf  $U$  mit 1-Formen  $\xi$  auf  $U$  identifizieren: Dem Vektorfeld  $X = \sum_\nu a_\nu(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_\nu}$  wird  $\xi = \sum_\mu a_\nu(x) \omega_{\nu\mu}(x) \cdot dx_\mu$  zugeordnet, umgekehrt der Form  $\xi = \sum_i f_i(x) \cdot dx_i$  in  $A^1(U)$  das Vektorfeld  $X = \sum_{i,j=1}^n f_i(x) \omega^{ij}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$ ; hierbei bezeichne  $\omega^{\nu\mu}(x)$  die zu  $\omega_{\nu\mu}(x)$  inverse Matrix. Mit anderen Worten

$$\xi = i_X(\omega) .$$

**Definition 5.16.** Man nennt  $(U, \omega)$  eine **symplektische Mannigfaltigkeit**, wenn  $\omega$  eine nicht entartete geschlossene 2-Form ist:  $\boxed{d\omega = 0}$ .

Sei  $(U, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit. Die **Poisson Klammer**  $\{f, g\} = \{f, g\}_\omega$  zweier Funktionen  $f, g \in C^\infty(U)$  ist definiert als die  $C^\infty$ -Funktion

$$\boxed{\{f, g\} = X_f(g)} .$$

Hierbei bezeichne  $X_f$  das Vektorfeld, welches bezüglich  $\omega$  der 1-Form  $\xi = df$  zugeordnet ist: Also  $\xi = \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot dx_i \leftrightarrow X_f$ . Es gilt  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ , denn nach Definition von  $X_f$  gilt

$$\boxed{\{f, g\}(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \omega^{ij}(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}} .$$

**Jacobi Identität.** Für  $f, g, h \in C^\infty(U)$  gilt

$$\boxed{\{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\}\} = 0} .$$

**Beweis.** Für  $f_i = \partial_i f$ ,  $g_j = \partial_j g$  gilt  $\{h, \{f, g\}\} = \sum_{i,j,k,\nu} h_k \omega^{k\nu} \partial_\nu (f_i \omega^{ij} g_j)$ . Summiert über die zyklischen Vertauschungen gibt dies  $\sum_{i,j,k,\nu} f_i g_j h_k (\omega^{i\nu} \partial_\nu \omega^{jk} + \omega^{j\nu} \partial_\nu \omega^{ki} + \omega^{k\nu} \partial_\nu \omega^{ij})$  sowie drei weitere Terme vom Typ  $\sum_{i,j,k,\nu} f_\nu g_j h_k (\omega^{k\nu} \omega^{ij} + \omega^{j\nu} \omega^{ki})$  etc. für  $f_\nu := \partial_\nu f_i$  etc. Die drei weiteren Terme sind Null [ $f_\nu i$  ist symmetrisch in den Indizes  $\nu$  und  $i$ ]. Wegen  $d\omega = 0$  entfällt auch der erste Term [dieser ist invariant unter zyklischen Vertauschungen der Indizes  $i, j, k$ . Benutze nun  $\partial_\nu \omega^{ij} = -\sum_{\alpha,\beta} \omega^{i\alpha} \partial_\nu (\omega_{\alpha\beta}) \omega^{\beta j}$ . Summiert man über die drei möglichen zyklischen Vertauschungen von  $i, j, k$  und verwendet  $d\omega = 0$ , d.h.  $\partial_k \omega_{ij} + \partial_j \omega_{ki} + \partial_i \omega_{jk} = 0$ , folgt die Behauptung.]  $\square$

Die Poisson Klammer macht  $C^\infty(U)$  zu einer (**abstrakten**) **Lie Algebra**, und die bereits oben definierte Zuordnung  $f \mapsto X_f$  wird zu einem Lie Algebrenhomomorphismus, denn es gilt

$$\boxed{X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]}$$

## 5 Ausgewählte Themen I

wegen  $X_{\{f,g\}}h = \{\{f,g\}, h\} = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} = X_f(X_g h) - X_g(X_f h) = [X_f, X_g](h)$ .

**Hamiltonscher Fluß.** Sei  $h \in C_c^\infty(U)$ ,  $X_h = \sum_\nu \frac{\partial h}{\partial x_\nu}(x) \omega^{\nu\mu}(x) \partial_\mu$  das Vektorfeld  $X = X_h$  und  $\varphi_t = \varphi_t^X$  ein zugehöriger Fluß. Für  $f \in C^\infty(U)$  gilt wegen  $\{h, f\} = X_h(f)$  die Gleichung (\*)

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(\varphi_t(x)) = \{h, f\}(\varphi_t(x))},$$

[links steht  $\frac{d}{dt} \varphi_t^*(f) = \varphi_t^*(L_{X_h}(f))$  and der Stelle  $x$ ; beachte  $\varphi_t^*(f)(x) = f(\varphi_t(x))$  und  $L_{X_h}(f) = X_h(f) = \{h, f\}$  für  $f \in A^0(U)$ ]. Funktionen  $f \in C^\infty(U)$ , die konstant sind auf allen Flußlinien, nennt man **Invarianten** oder **Integrale** des Hamiltonschen Flußes. Notwendig und hinreichend dafür ist  $X_h(f) = 0$  oder  $\{f, h\} = 0$ . Daher ist  $h$  selbst eine Invariante. Summen, Produkte etc. von Invarianten sind wieder Invarianten. Ebenso ist die Poisson Klammer zweier Invarianten wieder eine Invariante (wegen der Jacobi Identität). Schließlich definiert ein Hamiltonscher Fluß **symplektische Koordinatenwechsel**  $\varphi_t$  von  $(U, \omega)$  (auch **kanonische Transformationen** genannt), d.h. es gilt

$$\boxed{\varphi_t^*(\omega) = \omega} \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

denn  $\frac{d}{dt} \varphi_t^*(\omega) = \varphi_t^*(L_{X_h}(\omega)) = 0$  wegen  $L_{X_h}(\omega) = i_{X_h}(d\omega) + d(i_{X_h}(\omega)) = d(i_{X_h}(\omega)) = d(dh) = 0$  (Lemma 5.12) unter Benutzung von  $d\omega = 0$  sowie  $i_{X_h}(\omega) = dh$ .

**Beispiel.** Auf  $U = \mathbb{R}^{2n}$  mit den Koordinaten  $x = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  ist die **Liouville 2-Form**  $\omega = \sum_{\nu=1}^n dq_\nu \wedge dp_\nu$  nicht entartet mit konstanten Koeffizienten

$$(\omega_{\nu\mu}) = -(\omega^{\nu\mu}) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $\omega = -d(\alpha)$  für die 1-Form  $\alpha = \sum_{\nu=1}^n p_\nu dq_\nu$ , also ist  $d\omega = 0$ . Man nennt die symplektische Mannigfaltigkeit  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  den **Phasenraum** (das **Kotangentialbündel**) von  $\mathbb{R}^n$ .

Sei  $\varphi_t$  ein Fluß auf dem Phasenraum zu dem Hamiltonschen Vektorfeld  $X$  einer Funktion  $h$ . Wegen  $X = \sum_{\nu=1}^n (\frac{dh}{dp_\nu}) \cdot \partial_{q_\nu} + \sum_{\mu=1}^n (-\frac{dh}{dq_\mu}) \cdot \partial_{p_\mu}$  gilt für die Koordinatenfunktionen  $f(x) = p_i$  resp.  $g(x) = q_j$  dann  $\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$  sowie  $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$ ; und die Gleichung (\*) verkürzt sich symbolisch zu  $\dot{q}_i = \{h, q_i\} = \frac{\partial h}{\partial p_i}$  und  $\dot{p}_i = \{h, p_i\} = -\frac{\partial h}{\partial q_i}$ . Die Lieableitung der 1-Form  $\alpha$  (Wirkungsform) ist  $L_X(\alpha) = d\ell$  für die **Legendre Funktion**  $\ell = \ell(q, p)$  auf  $\mathbb{R}^{2n}$

$$\boxed{\ell(q, p) := \sum_{j=1}^n p_j \cdot \frac{dh}{dp_j}(q, p) - h(q, p)}.$$

[Benutze Lemma 5.12 und  $i_X(\alpha) = i_X(\sum_j p_j dq_j) = \sum_j p_j \frac{dh}{dp_j}$  sowie  $i_X(d\alpha) = -i_X(\omega) = -dh$ ]. Beachte  $f^*(\alpha)(t) = f^*(i_X(\alpha)) \cdot dt = f^*(\sum_j p_j \frac{dh}{dp_j}) \cdot dt$  für  $f(t) = \varphi_t^X(\xi)$ , also

$$\int_c^d f^*(\ell) dt = \int_c^d f^*(\alpha) - (d-c) f^*(h).$$

## 5.6 Legendre Transformation

Für eine reellwertige  $C^\infty$ -Funktion  $L = L(q, x, t)$  der Variablen  $(q, x, t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$

$$L: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R},$$

für  $t \in \mathbb{R}$  und Vektorvariable  $q, x \in \mathbb{R}^n$ , definiert man die reellwertige **Hamilton Funktion**

$$H(q, x, t) := \sum_{j=1}^n p_j \cdot x_j - L(q, x, t)$$

mit Hilfe der folgenden reellwertigen Hilfsfunktionen (**den kanonischen Impulsen**)

$$p_j := \frac{dL}{dx_j}(q, x, t) \quad \text{und} \quad p := p(q, x, t) = (p_1, \dots, p_n).$$

**Annahme.**  $\det(\text{Hess}_x(L)) \neq 0$  für  $\text{Hess}_x(L) = \left(\frac{d^2 L(q, x, t)}{dx_i dx_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Dann definiert  $\psi: (q, x, t) \mapsto (q, p, t) = (q, p(q, x, t), t)$  einen (lokalen) Koordinatenwechsel  $\varphi$  im  $\mathbb{R}^{2n+1}$  nach Satz 4.25. Man kann damit  $L = L(q, x, t)$  lokal als Funktion der Variablen  $(q, p, t)$  schreiben:  $L(q, x, t) = \ell(q, p(q, x, t), t)$  für eine geeignete Funktion  $\ell = \ell(q, p, t)$ ; man erhält für die Vektorvariablen  $q, p \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$

$$h(q, p, t) := \sum_j p_j \cdot x_j(q, p, t) - \ell(q, p, t) = H(q, x, t).$$

**Behauptung.** Es gilt<sup>8</sup>  $\ell(q, p, t) = \sum_{j=1}^n p_j \cdot \frac{dh}{dp_j}(q, p, t) - h(q, p, t)$  sowie

$$x_i = \frac{dh}{dp_i}(q, p, t) \quad \text{und} \quad \frac{dL}{dq_i}(q, x, t)|_{x=x(q, p, t)} = -\frac{dh}{dq_i}(q, p, t).$$

**Variationsrechnung.** Hier sucht man  $C^\infty$ -Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{dx_i}(f(t), \dot{f}(t), t) \right) = \frac{dL}{dq_i}(f(t), \dot{f}(t), t), \quad i = 1, \dots, n;$$

(siehe Satz 11.15). Für eine gegebene Lösung  $f(t)$  definieren wir  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ ,

$$t \mapsto \varphi_t = (q(t), p(t), t) \in \mathbb{R}^{2n+1},$$

durch  $q(t) = q(\varphi_t) := f(t)$ ,  $x(t) := \dot{f}(t)$  und  $p(t) = p(\varphi_t) := p(q(t), x(t), t) = p(f(t), \dot{f}(t), t)$ . Beachte  $q(t), x(t), p(t)$  definieren Funktionen vom Typ  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Es gilt  $\dot{q}_i(t) = \dot{f}_i(t) = x_i(t)$  und  $\dot{p}_i(t) = \frac{d}{dt}(p_i(t)) := \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{dx_i}(f(t), \dot{f}(t), t) \right) = \frac{dL}{dq_i}(f(t), \dot{f}(t), t)$ , also wegen obiger Behauptung

$$\frac{d}{dt}(q_i(\varphi_t)) = \frac{dh}{dp_i}(\varphi_t), \quad \frac{d}{dt}(p_i(\varphi_t)) = -\frac{dh}{dq_i}(\varphi_t)$$

oder kurz  $\dot{q}_i = \frac{\partial h}{\partial p_i}$  und  $\dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i}$  im Punkt  $\varphi_t$ . Somit definiert  $\varphi_t$  einen **Hamiltonschen Fluß** im **Phasenraum** zu der **Hamilton Funktion**  $h$ , zumindestens wenn  $h$  nicht von  $t$  abhängt.

<sup>8</sup>Beachte  $\frac{dh}{dp_i}(q, p, t) = x_i + \sum_j \frac{dx_j}{dp_i} p_j - \sum_j \frac{dL}{dq_j}(q, x, t) \frac{dq_j}{dp_i} - \sum_j \frac{dL}{dx_j}(q, x, t) \frac{dx_j}{dp_i} = x_i$  wegen  $\frac{dt}{dq_j} = \frac{dq_j}{dp_i} = 0$  und  $\sum_j \frac{dL}{dx_j}(q, p, t) \frac{dx_j}{dp_i} = \sum_j p_j \frac{dx_j}{dp_i}$ . Weiterhin ist  $\frac{dh}{dq_i}(q, p, t) = \sum_j \frac{dx_j}{dq_i} p_j - \frac{dL}{dq_i}(q, x, t) - \sum_j \frac{dL}{dx_j}(q, x, t) \frac{dx_j}{dq_i}$  wegen  $\frac{dp_j}{dq_i} = 0$  und  $\frac{dt}{dq_j} = 0$ . Benutze nun  $\frac{dL}{dx_j}(q, x, t) \frac{dx_j}{dq_i} = p_j \frac{dx_j}{dq_i}$ .

## 5.7 Kanonische Transformationen

Definiere Abbildungen  $p = p(q, P)$  und  $Q = Q(q, P)$  für  $p, q, P \in \mathbb{R}^n$

$$(\mathbb{R}^{2n}, \omega) \longleftarrow \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega)$$

$$(q, p) \longleftarrow (q, P) \longrightarrow (Q, P)$$

durch eine Hilfsfunktion  $W = W(q, P) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  vermöge der Formeln

$$p_i := \partial_{q_i} W(q, P) \quad \text{und} \quad Q_j := \partial_{P_j} W(q, P).$$

Ist  $\det(\partial W(q, P)/\partial q_j \partial P_i)(x_0) \neq 0$  für  $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ , folgt aus Satz 4.25 die Existenz einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  mit  $x_0 \in U$ , so daß  $f(q, P) := (q, p(q, P))$  und  $g(q, P) := (Q(p, P), P)$  lokale Koordinatenwechsel definieren,  $f : U \cong f(U) \subset \mathbb{R}^{2n}$  und  $g : U \cong g(U) \subset \mathbb{R}^{2n}$ .

**Lemma 5.17.**  $\varphi := g \circ f^{-1} : (q, p) \mapsto (Q, P)$  definiert eine kanonische Transformation zwischen den offenen Teilmengen  $f(U)$  und  $g(U)$  des Phasenraums  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ . D.h.  $\varphi^*(\omega) = \omega$

$$\sum_i dq_i \wedge dp_i = \sum_{i,j} \frac{W(q, P)}{\partial q_j \partial P_i} \cdot dq_i \wedge dP_j = \sum_i dQ_i \wedge dP_i.$$

**Beweis.** Es gilt  $\sum_i dq_i \wedge dp_i = \sum_i dq_i \wedge d(\partial_{q_i} W(q, P)) = \sum_{i,j} \partial_{P_j} \partial_{q_i} W(q, P) dq_i \wedge dP_j + \sum_{i,j} \partial_{q_j} \partial_{q_i} W(q, P) dq_i \wedge dq_j = \sum_{i,j} \partial_{P_j} \partial_{q_i} W(q, P) dq_i \wedge dP_j$ . Analog gilt  $\sum_i dQ_i \wedge dP_i = \sum_i d(\partial_{P_i} W(q, P)) \wedge dP_i = \sum_{i,j} \partial_{P_j} \partial_{P_i} W(q, P) dP_j \wedge dP_i + \sum_{i,j} \partial_{q_j} \partial_{P_i} W(q, P) dq_j \wedge dP_i = \sum_{i,j} \partial_{q_j} \partial_{P_i} W(q, P) dq_j \wedge dP_i$ . Durch Umbenennung von  $i$  und  $j$  folgt die Behauptung.  $\square$

Sei  $\varphi : U \rightarrow V$  ein lokaler Koordinatenwechsel und  $\omega \in A^2(V)$ ,  $d\omega = 0$  eine nicht entartete 2-Form. Für  $f, g \in C^\infty(V)$  gilt dann  $\varphi^*(\{f, g\}_\omega) = \{\varphi^*(f), \varphi^*(g)\}_{\varphi^*(\omega)}$ .

Findet man für eine gegebene Funktion  $h = h(q, p)$  eine Funktion  $W = W(q, P)$  mit einer einfacheren Funktion  $h(q, P) := h(q, \frac{\partial}{\partial q} W)$ , dann wird die Bestimmung des Hamiltonschen Flußes von  $h$  sich in den Koordinaten  $(q, P)$ , und gegebenenfalls dann auch  $Q, P$ , vereinfachen.

## 5.8 Harmonische Funktionen

Der Laplace Operator

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$$

bildet homogene Funktionen vom Grad  $\alpha$  auf homogene Funktionen vom Grad  $\alpha - 2$  ab und es gilt (Übungsaufgabe und obdA  $n = 2$ )

$$\boxed{[\Delta, L_{\nu\mu}] = 0}.$$

Für  $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  erhält der Operator  $r^2 \Delta$  den Grad  $\alpha$  und es gilt  $[r^2 \Delta, E] = 0$  für  $E = \sum_i x_i \partial_i$ .  
**Beispiel.** Für  $r \neq 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  die Formel

$$\boxed{\Delta r^\alpha = \alpha(\alpha + n - 2) \cdot r^{\alpha-2}} .$$

[Aus  $2r\partial_i(r) = 2x_i$  folgt  $\partial_i(r) = \frac{x_i}{r}$ . Deshalb gilt  $\Delta(r^\alpha) = \alpha \sum_i \partial_i(x_i r^{\alpha-2}) = n\alpha r^{\alpha-2} + \alpha(\alpha - 2)r^2 r^{\alpha-4}$ . Analog zeigt man  $\Delta \log(r) = (n - 2)r^{-2}$  und  $\Delta(r^{2-n} \log(r)) = (2 - n)r^{-n}$ .

**Definition.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Funktion  $f \in C^\infty(U)$  heisst **harmonisch**, wenn für den Laplace Operator  $\Delta$  gilt

$$\Delta f = 0 .$$

Konstante Funktionen und lineare Polynome sind harmonische Funktionen. Wie wir oben gezeigt haben ist die homogene Funktion

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{r^{n-2}}} , \quad \kappa := n - 2$$

auf  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  harmonisch. Diese Funktion besitzt eine Singularität<sup>9</sup> im Ursprung in den Dimensionen  $n \neq 2$ . Der Fall  $n = 2$  ist exzeptionell. Man hat hier nur die singuläre harmonische Funktion  $f(x) = \log(r)$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , welche aber nicht homogen vom Grad Null ist: Es gilt  $f(tx) = \log(t) + f(x)$  mit einer Konstante  $\log(t)$ .

**Inversion am Kreis.** Sei  $f^0(x) := f(\frac{x}{\|x\|^2})$  oder  $f^0(x_1, \dots, x_n) := f(\frac{x_1}{r^2}, \dots, \frac{x_n}{r^2})$  für Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Ist  $f$  homogen vom Grad  $\alpha$ , dann ist  $f^0$  homogen vom Grad  $-\alpha$ .

Sei nun  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , und  $\kappa := n - 2$  und  $n \geq 1$ . Wir betrachten die **Kelvin Transformation** (Achtung:  $f^*$  nicht verwechseln mit dem Pullback)

$$\boxed{f^*(x) := r^{-\kappa} f(\frac{x}{\|x\|^2})} .$$

Dann ist  $f^*(x) \in C^2(U)$  für  $f \in C^2(U)$ , und es gilt  $f^{**} = f$ . Ist  $f$  homogen vom Grad  $\alpha$ , dann ist  $f^*$  homogen vom Grad  $-\kappa - \alpha$ .

**Lemma 5.18 (Kelvin).** Für  $n \neq 2$  und  $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  gilt

$$\boxed{r^2 \Delta(f^*(x)) = (r^2 \Delta f)^*(x)} .$$

*Inbesondere ist  $f^*(x)$  harmonisch, wenn  $f(x)$  harmonisch ist.*

<sup>9</sup>Im Fall  $n = 3$  beschreibt diese Funktion bis auf eine Konstante das Coulomb Potential.

**Beweis.** Der Beweis beruht auf einer expliziten Rechnung<sup>10</sup> und benutzt die Fußnote<sup>11</sup>  $\square$

## 5.9 Harmonische Polynome

Sei  $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Polynome  $P(x)$  in  $n$  Variablen, welche homogen vom Grad  $l$  sind. Sei  $\mathcal{H}_l = \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$  der Unterraum aller **harmonischen Polynome**.

**Satz 5.19.**  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l) = \binom{n+l-1}{l} - \binom{n+l-3}{l-2}$  und für  $n \geq 3$  auch  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l) = \frac{n-2+2l}{n-2} \binom{n+l-3}{l}$ .

**Beispiel.** Im Fall  $n = 1$  ist  $\mathcal{H}_l = 0$  für  $l > 1$ . Im Fall  $n = 2$  gilt  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l) = 2$  für  $l \geq 1$ , und  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_0) = 1$ . Als Vektorraum wird  $\mathcal{H}_l$  von  $Re(z^l)$  und  $Im(z^l)$  aufgespannt ( $z = x_1 + ix_2$ ).

**Beispiel.** Im Fall  $n = 3$  folgt  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l) = 2l + 1$  für alle  $l \geq 0$ .

**Lemma 5.20.**  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_l) = \binom{n+l-1}{l}$ .

**Beweis.** Induktion nach der Variablenzahl  $n$ . Ersetzt man die Variable  $x_n$  durch 1, ergibt dies genau die Polynome in  $x_1, \dots, x_{n-1}$  vom Grad  $\leq l$ . Also

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_{l-1}(\mathbb{R}^n)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^{n-1})),$$

wie die Rekursionsformeln  $\binom{n+l-1}{l} - \binom{n+(l-1)-1}{(l-1)} = \binom{(n-1)+l-1}{l}$  der **Binomialkoeffizienten**.  $\square$

**Beispiel.** Im Fall  $n = 1$  ist  $\mathcal{P}_l = \mathbb{R} \cdot x^l$ . Im Fall  $n = 2$  ist  $\mathcal{P}_l = \mathbb{R}x^l + \mathbb{R}x^{l-1}y + \dots + \mathbb{R}y^l$  von der Dimension  $l + 1$ , und für  $n = 3$  gilt  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_l) = (l + 1)(l + 2)/2$ .

<sup>10</sup>Für  $f^0(x) := f(\frac{x}{\|x\|^2})$  gilt  $\Delta(\frac{f^0}{r^\kappa}) = \Delta(\frac{1}{r^\kappa})f + 2 \sum_i \partial_i(r^{-\kappa})\partial_i(f^0) + r^{-\kappa}\Delta(f^0)$  mit  $\Delta(\frac{1}{r^\kappa}) = 0$ . Wegen Formel 1 und 4 ist der Term  $2 \sum_i \partial_i(r^{-\kappa})\partial_i(f^0)$  gleich

$$-\frac{2\kappa}{r^{\kappa+2}} \sum_i \sum_j x_i(f_j)^0 T_{ij} = \frac{2\kappa}{r^{\kappa+4}} \sum_j x_j(f_j)^0.$$

Wegen Formel 1 ist  $r^{-\kappa}\Delta(f^0)$  gleich  $\frac{1}{r^\kappa} \sum_i \sum_j \partial_i((f_j)^0 T_{ij})$ , und aus Formel 2 und 3 folgt daher die Behauptung  $\Delta(f^*) = r^{-4}(\Delta(f))^*$  vermöge

$$\frac{1}{r^\kappa} \sum_i \sum_j \sum_k (f_{kj})^0 T_{ik} T_{ij} + \frac{1}{r^\kappa} \sum_j \sum_i (f_j)^0 \partial_i(T_{ij}) = \frac{(\Delta f)^0}{r^{\kappa+4}} - \frac{2\kappa}{r^{\kappa+4}} \sum_j x_j(f_j)^0.$$

<sup>11</sup>Formeln. Beachte  $\partial_i(r^\alpha) = \alpha x_i r^{\alpha-2}$ . Für  $T_{ij} := \partial_j(x_i x_j r^{-2}) = (\delta_{ij} r^2 - 2x_i x_j) r^{-4}$  und  $f_j := \partial_j f$  gilt

1.  $\partial_i(f^0) = \sum_j (f_j)^0 T_{ij}$  (Kettenregel)
2.  $\sum_i T_{ij} T_{ik} = \delta_{jk} r^{-4}$
3.  $\sum_i \partial_i(T_{ij}) = -2\kappa x_j r^{-4}$
4.  $\sum_i x_i T_{ij} = -x_j r^{-2}$ .

wegen  $\sum_i (\delta_{ij} r^2 - 2x_i x_j)(\delta_{ik} r^2 - 2x_i x_k) = \delta_{jk} r^4 - 2x_j x_k r^2 - 2x_j x_k r^2 + 4r^2 x_j x_k = \delta_{jk} r^4$  und  $\sum_i \partial_i(T_{ij}) = \partial_j(1/r^2) - 2n x_j / r^4 - 2E(x_j / r^4) = (-2 - 2n - 2(-3))x_j / r^4 = -2\kappa x_j / r^4$ .

**Beweis von Satz 5.19.** Wir entwickeln  $P \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  nach der letzten Variable

$$P(x_1, \dots, x_n) = Q_l(x_1, \dots, x_{n-1}) + Q_{l-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n + \dots$$

Sei  $\Delta = \Delta_{n-1} + \partial_n^2$ . Wegen  $(\Delta_{n-1} + \partial_n^2)P = 0$  bestimmen die Polynome  $Q_l \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^{n-1})$  und  $Q_{l-1} \in \mathcal{P}_{l-1}(\mathbb{R}^{n-1})$  das harmonische Polynom  $P$  eindeutig, und  $Q_l$  und  $Q_{l-1}$  vom Grad  $l$  resp.  $l-1$  können dabei beliebig vorgegeben (!) werden. Also  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^{n-1})) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_{l-1}(\mathbb{R}^{n-1})) = \binom{n-1+l-1}{l} + \binom{n-1+l-2}{l-1} = \frac{n-2+2l}{n-2} \binom{n+l-3}{l}$  für  $n \geq 3$ .  $\square$

Ein Polynom  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  definiert  $f(\partial) := f(\partial_1, \dots, \partial_n)$  als Differentialoperator auf  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  (wohldefiniert wegen der Symmetrie der Hessematrix). Die Bilinearform  $\mathcal{P}_l \times \mathcal{P}_l \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\langle f, g \rangle = f(\partial)g(x),$$

ist  $\mathbb{R}$ -bilinear und wegen  $\langle \prod_{\nu=1}^n x_\nu^{m_\nu}, \prod_{\nu=1}^n x_\nu^{k_\nu} \rangle = \prod_{\nu=1}^n (m_\nu! \delta_{m_\nu, k_\nu})$  symmetrisch positiv definit. Sei nun  $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

**Lemma 5.21.** *Bezüglich obiger Paarung  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  existiert eine orthogonale Zerlegung*

$$\mathcal{P}_l = r^2 \cdot \mathcal{P}_{l-2} \oplus^\perp \mathcal{H}_l, \quad \mathcal{P}_l = \bigoplus_{i \geq 0} r^{2i} \cdot \mathcal{H}_{l-2i}.$$

Die Teilräume  $r^2 \cdot \mathcal{P}_{l-2}$  und  $\mathcal{H}_l$  (resp.  $r^{2i} \cdot \mathcal{H}_{l-2i}$ ) sind invariant unter den Operatoren  $L_{\nu\mu}$ .

**Beweis.** Nach Lemma 5.20 und Satz 5.19 gilt  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_l) = \dim_{\mathbb{R}}(r^2 \mathcal{P}_{l-2}) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l)$ . Es genügt also für  $g(x) = r^2 \cdot f(x)$  im Durchschnitt  $r^2 \mathcal{P}_{l-2} \cap \mathcal{H}_l$  zu zeigen:  $g(x) = 0$ . Dies folgt wegen  $\Delta g(x) = 0$  aus  $\langle g(x), g(x) \rangle = \langle r^2 f(x), g(x) \rangle = \Delta f(\partial)g(x) = f(\partial)\Delta g(x) = \langle f(x), \Delta g(x) \rangle = 0$ .

Wegen  $L_{\nu\mu}(r^2) = x_\nu \cdot 2x_\mu - x_\mu \cdot 2x_\nu = 0$  gilt  $L_{\nu\mu}(r^2 f(x)) = L_{\nu\mu}(r^2)f(x) + r^2 L_{\nu\mu}(f(x)) = r^2 L_{\nu\mu}(f(x))$ , also  $L_{\nu\mu}(r^2 \mathcal{P}_{l-2}) \subseteq r^2 \mathcal{P}_{l-2}$ . Aus  $\Delta L_{\nu\mu}g = L_{\nu\mu}\Delta g = 0$  für  $g \in \mathcal{H}_l$  folgt  $L_{\nu\mu}(\mathcal{H}_l) \subseteq \mathcal{H}_l$ .  $\square$

Sei  $n \geq 2$ . Das Bild des Monoms  $(x_1)^l = x_1^l \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$  unter der harmonischen Projektion

$$\mathcal{P}_l(\mathbb{R}) = r^2 \cdot \mathcal{P}_{l-2}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{pr} \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$$

(die orthogonale Projektion des letzten Lemmas) ist das **zonale sphärische Polynom**

$$P_{l,0}(x) := pr(x_1^l).$$

Das Monom  $x_1^l$ , und damit auch  $P_{l,0}(x)$ , ist invariant unter orthogonalen Substitutionen, welche den Vektor  $(1, 0, \dots, 0)$  fest lassen.  $P_{l,0}(x)$  ist nicht trivial und wird von den  $L_{\nu\mu}$  mit  $\nu \neq 1, \mu \neq 1$  annulliert, und ist folglich (siehe Abschnitt 5.3) als Polynom

$$P_{l,0}(x) = \sum_{i=0}^l a_i \cdot x_1^i r^{l-i}$$

nur abhängig von den Variablen  $x_1$  und  $r^2$  mit  $P_{l,0}(-x) = (-1)^l P_{l,0}(x)$ .

**Lemma 5.22 (Rodrigues Formel).** Für  $r = 1$  und  $n \geq 2$  gilt für eine Konstante<sup>12</sup>  $const(l, n)$

$$\boxed{const(l, n) \cdot P_{l,0}(x) = (t^2 - 1)^{-\frac{n-3}{2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^l (t^2 - 1)^{l+\frac{n-3}{2}} \Big|_{t=x_1}}.$$

**Beweis.** Nach Satz 4.18 ist der Lösungsraum der Gleichungen

$$(t^2 - 1)f''(t) + (n - 1)tf'(t) - l(l + n - 2)f(t) = 0$$

und  $f(-t) = (-1)^l f(t)$  eindimensional (Anfangsbedingungen im Punkt Null!). Die Funktion  $f(t) = \sum_{i=0}^l a_i t^i$  erfüllt diese Bedingungen<sup>13</sup> und die rechte Seite im Lemma ebenfalls (letzteres ist sehr diffizil).  $\square$

**Lemma 5.23.** Der Operator  $L^2$  ist auf  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  ein Vielfaches der Identität

$$\boxed{L^2 = -l(l + n - 2) \cdot id_{\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)}}.$$

**Beweis.** Der Raum der Polynome  $P \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$ , in denen die letzte Variable  $x_n$  höchstens linear vorkommt, bildet ein Komplement  $V \cong \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^{n-1}) \oplus x_n \cdot \mathcal{P}_{l-1}(\mathbb{R}^{n-1})$  von  $W = r^2 \cdot \mathcal{P}_{l-2}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$ . [ $V \cap W$  ist Null und  $\dim(V) = \binom{n+l-2}{l} + \binom{n+l-3}{l-1} = \binom{n+l-1}{l} - \binom{n+l-3}{l-2} = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l)$ .] Also  $\mathcal{H}_l = pr(V)$  nach Lemma 5.21. Aber jedes Monom in  $V$  lässt sich linear kombinieren durch Polynome, die durch sukzessives Anwenden von Operatoren  $L_{\nu\mu}$  auf das Monom  $P(x) = (x_1)^l$  entstehen (Übungsaufgabe). Wendet man daher sukzessive die Operatoren  $L_{\nu\mu}$  auf die Funktion  $P_{l,0}$  an, erhält man ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{H}_l$ .

Für  $1 < \alpha < \beta$  gilt  $L_{\alpha\beta}x_1^l = 0$ . Wegen  $L_{1\alpha}^2(x_1^l) = (x_1\partial_\alpha - x_\alpha\partial_1)(-x_\alpha l x_1^{l-1}) = -lx_1^l + x_\alpha^2 l(l-1)x_1^{l-2}$  liefert Summation über  $\alpha \geq 2$  daher  $L^2(x_1^l) = -l(n-1)x_1^l - l(l-1)x_1^l + l(l-1)r^2 x_1^{l-2} = -l(l+n-2)x_1^l + l(l-1)r^2 x_1^{l-2}$ . Da  $L^2$  mit der harmonischen Projektion vertauscht, folgt aus  $pr(l(l-1)r^2 x_1^{l-2}) = 0$  dann  $L^2(P_{l,0}) = -l(l+n-2)P_{l,0}$  für  $P_{l,0} = pr(x_1^l)$ . Da  $\mathcal{H}_l$  aus  $P_{l,0}$  durch sukzessives Anwenden der  $L_{\nu\mu}$  erzeugt wird, die Operatoren  $L_{\nu\mu}$  aber mit  $L^2$  vertauschen, folgt die Behauptung.  $\square$

## 5.10 Drehimpuls Operatoren

Im dreidimensionalen Fall  $n = 3$  benutzen wir die Abkürzungen  $L_1 := L_{32} = z\partial_y - y\partial_z$ ,  $L_2 := L_{13} = x\partial_z - z\partial_x$  und  $L_3 := L_{21} = y\partial_x - x\partial_y$ . Dann gilt

$$[L_1, L_2] = L_3 \quad , \quad [L_3, L_1] = L_2 \quad , \quad [L_2, L_3] = L_1 .$$

Die Operatoren  $L_1, L_2, L_3$  vertauschen mit dem Differentialoperator  $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$  und es gilt  $L^2 = -l(l+1)$  auf  $\mathcal{H}_l$  wegen Lemma 5.23.

<sup>12</sup>Es gilt  $const(l, n) = l! \binom{2l+n-3}{l}$ .

<sup>13</sup>Wir schreiben  $t$  oder  $x$  anstatt  $x_1$ . Dann ist  $\Delta(x^i r^{l-i}) = r^{l-i} \partial_x^2(x^i) + 2\partial_x(x^i) \partial_x(r^{l-i}) + x^i \Delta(r^{l-i})$ . Die Summe von  $x^i \Delta(r^{l-i}) = (l-i)(n-2+l-i)x^i r^{l-i-2}$  und  $2\partial_x(x^i) \partial_x(r^{l-i}) = 2i(l-i)x^i r^{l-i-2}$  ist  $-(i^2 + (n-2)i - l(l+n-2)) \cdot x^i r^{l-i-2}$ . Also annulliert  $\partial_t^2 - (t\partial_t)^2 - (n-2) \cdot t\partial_t + l(l+n-2)$  das Polynom  $f(t)$ .

Aus  $L_1 x^l = 0$  und Lemma 5.21 folgt  $L_1 P_{l,0} = 0$ . Die zonale Eigenfunktion  $P_{l,0}$  von  $L_1$  liefert neue Eigenfunktionen  $P_{l,k}$  von  $L_1$ . Setze dazu  $L_{\pm} = L_2 \mp i \cdot L_3$  für  $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ . Sei  $P_{l,k} := (L_+)^k P_{l,0}$  für  $k > 0$  bzw.  $P_{l,-k} = \overline{P_{l,k}}$  das konjugiert komplexe. Für Eigenvektoren  $L_1 v = m i \cdot v$  gilt wegen  $[L_1, L_{\pm}] = \pm i L_{\pm}$  dann  $L_1(L_{\pm} v) = L_{\pm}(L_1 v) \pm i L_{\pm} v = (m \pm 1) i \cdot L_{\pm} v$ . Also hat  $L_{\pm} v$  den  $L_1$ -Eigenwert  $(m \pm 1) \cdot i$ , wenn  $L_{\pm} v$  nicht verschwindet. Dies zeigt

$$\boxed{L_1 P_{l,k} = k i \cdot P_{l,k}} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Wegen  $L^2 = (L_1)^2 + (L_2)^2 + (L_3)^2 = -(iL_1)^2 + (iL_1) + L_- L_+$  folgt aus  $L_+(P) = 0$  für einen Eigenvektor  $P \in \mathcal{H}_l$  von  $L_1$  zum Eigenwert  $k i$  dann  $L^2(P) = -k(k+1) \cdot P$ . Andererseits ist  $L^2$  gleich  $-l(l+1) \cdot id$  auf  $\mathcal{H}_l$ . Aus  $P_{l,k} \neq 0$  und  $P_{l,k+1} = L_+ P_{l,k} = 0$  für  $k \geq 0$  folgt daher  $l(l+1) = k(k+1)$ , und damit  $k = l$ . Also sind die Funktionen  $P_{l,k}$  für  $k = -l, \dots, 0, \dots, l$  von Null verschieden.

**Korollar 5.24.** Die  $2l + 1$  linear unabhängigen **Kugelflächenfunktionen**  $P_{l,k}$  (für  $k = -l, \dots, -1, 0, 1, \dots, l$ ) definieren wegen  $\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^3)) = 2l + 1$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis des Vektorraums  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^3)$  der  $\mathbb{C}$ -wertigen harmonischen Polynome, bestehend aus Eigenvektoren von  $L_1$  und  $L^2$ .

In der Physik sind  $L_1, L_2, L_3$  (bis auf Normierung) die **Drehimpuls Operatoren**. In der Quantenmechanik treten sie in anderer Form auf und  $l = 0, 1, 2, \dots$  ist der **Spin**. In der Elektrodynamik spielen die Funktionen  $P_{l,k}$  eine Rolle bei Radialentwicklungen von Monopolen ( $l = 0$ ), Dipolen ( $l = 1$ ), ... etc. Die Einschränkungen der  $P_{l,k}(x, y, z)$  auf die Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^3$  heissen **Kugelflächenfunktionen** vom Grad  $l$ . Man faßt diese oft auf als homogene Funktionen  $Y(x, y, z) = P(x, y, z)/r^l$  vom Grad Null (für  $P \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^3)$ ). Sie treten bei der **Radialentwicklung** von elektrostatischen Potentialen  $u(x, y, z)$  auf Kugelschalen (siehe Abschnitt 10.5) auf

$$\boxed{u(x, y, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l (a_{lk} r^l + b_{lk} r^{-l-1}) \cdot Y_{l,k}(x, y, z)}.$$

Hierbei sind  $a_{lk}, b_{lk} \in \mathbb{C}$  geeignete Konstanten. Die Polynome  $r^l Y_{l,k} = P_{l,k}$  und ihre **Kelvin Transformierten**  $r^{-l-1} Y_{l,k} = (P_{l,k})^*$  sind harmonisch. Die Funktionen  $r^{-l-1} Y_{l,k} = (P_{l,k})^*$  erhält man auch durch partielles Ableiten der homogenen harmonischen Funktion  $\frac{1}{r}$ . Diese sind singularär bei 0 und klingen im Unendlichen ab im Gegensatz zu den Polynomen  $P_{l,k}$ . Dies lässt sich (ebenso wie Korollar 5.24) auf Dimensionen  $n \geq 3$  verallgemeinern (siehe Kapitel 10).

## 5.11 Taylor Koeffizienten

Sei  $x_0 = 0$  und  $U$  eine offene Kugel um  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  sowie  $f \in C^r(U)$ . Für  $l \leq r$  ist dann der  $l$ -te **Taylor Koeffizient**  $T_l(f)(x)$  von  $f$  im Punkt  $x_0 = 0$  definiert durch (für ‘kleine’  $t \in \mathbb{R}$  bei festem  $x \in \mathbb{R}^n$ )

$$T_l(f)(x) := \frac{\partial_t^l}{l!} f(tx)_{t=0}.$$

Die so definierte Funktion ist ein homogenes Polynom in  $x$  vom Grad  $l$ , dessen Koeffizienten bis auf universelle Konstanten<sup>14</sup> partielle Ableitungen von  $f$  im Punkt  $x_0$  sind. Dies zeigt man

<sup>14</sup>Durch Reduktion auf  $f(x) = \prod_i x_i^{m_i}$  folgt dann  $T_l(f)(x) = \sum_{m_1+\dots+m_n=l} (\frac{\partial^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\partial^{m_n}}{m_n!} f)(0) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{m_i}$ .

leicht mit Hilfe der Kettenregel und Induktion nach  $l$ .

**Beispiel 1.** Ist  $f(x)$  ein homogenes Polynom vom Grad  $m$ , d.h. gilt  $f(tx) = t^m f(x)$ , dann ist  $T_l(f)(x) = 0$  für  $l \neq m$  und  $T_l(f)(x) = f(x)$  für  $l = m$ .

**Beispiel 2.** Aus Beispiel 1 folgt für die Funktion  $g(x) = f(x) - \sum_{l=0}^r T_l(f)(x)$  sofort  $T_l(g)(x) = 0$  für  $l = 0, \dots, r$  für beliebiges  $f \in C^r(U)$ .

**Beispiel 3.** Ist  $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)$  eine Potenzreihe mit homogenen Polynomen  $P_l(x)$  vom Grad  $l$  und Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist  $f(tx) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$  für  $|t| < 1$ , und aus Lemma 4.39 folgt  $T_l(f)(x) = P_l(x)$ .

**Beispiel 4.** Ist  $f(x)$  eine harmonische Funktion, dann sind die  $T_l(f)(x)$  harmonische Polynome, denn es gilt  $\Delta T_l(f)(x) = \Delta \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(tx)_{t=0} = \frac{\partial^m}{\partial t^m} t^2 (\Delta f)(tx)_{t=0} = 0$ . (Analog zeigt man: Ist  $f(z)$  holomorph, dann sind alle  $T_l(f)(z)$  holomorph).

**Lemma 5.25.** Für  $f \in C^r(U)$  gibt es eine stetige Funktion  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $H(0) = 0$  und

$$f(x) = \sum_{l=0}^r T_l(f)(x) + \|x\|^r \cdot H(x).$$

**Beweis.** Induktion nach  $r$ . Der Fall  $r = 0$  ist klar. Für  $f \in C^r(U)$ ,  $r \geq 1$  gilt  $f(x) - f(0) = f(tx)|_0^1 = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dx = \sum_{\nu=1}^n x_{\nu} f_{\nu}(x)$  mit  $f_{\nu} = \int_0^1 (\partial_{\nu} f)(tx) dt$  in  $C^{r-1}(U)$  (Satz 4.32). Verwendet man für die  $f_{\nu}$  die Induktionsannahme genügt somit: Für  $\prod_{i=1}^r (x_i)^{r_i} \tilde{H}(x) = \|x\|^r H(x)$ ,  $x \neq 0$  und  $\sum_{i=1}^n r_i = r$  gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{H}(x) = 0$ .  $\square$

## 5.12 Orthogonale Gruppen

Für eine reelle symmetrische invertierbare  $n \times n$ -Matrix  $S$  bilden die Matrizen  $X \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  mit der Eigenschaft<sup>15</sup> ( ${}^T X$  bezeichne die transponierte Matrix von  $X$ )

$${}^T X = -SXS^{-1}$$

die **orthogonale Lie Algebra**  $so(S)$ . Die zugehörige **orthogonale Gruppe**  $O(S, \mathbb{R})$  besteht aus allen reellen  $r \times r$ -Matrizen  $M$  mit der Eigenschaft

$${}^T MSM = S.$$

Beachte  $M, N \in O(S, \mathbb{R}) \Rightarrow M \circ N \in O(S, \mathbb{R})$  und  $M^{-1} \in O(S, \mathbb{R})$ . Für  $M$  in  $O(S, \mathbb{R})$  gilt  $\det(M)^2 = 1$  und die Matrizen  $M \in O(S, \mathbb{R})$  mit der Eigenschaft  $\det(M) = 1$  definieren eine Untergruppe  $SO(S, \mathbb{R})$ , die **spezielle orthogonale Gruppe** zur **quadratischen Form**  $q_S(x) = {}^T x S x$ . Eine Matrix  $M \in Gl(n, \mathbb{R})$  liegt genau dann in  $O(S, \mathbb{R})$ , wenn gilt

$$q_S(M(x)) = q_S(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, .$$

<sup>15</sup>Beachte  ${}^T [X, Y] = {}^T (XY - YX) = {}^T Y^T X - {}^T X^T Y = (-SY S^{-1})(-SXS^{-1}) - (-SXS^{-1})(-SY S^{-1}) = -S(XY - YX)S^{-1} = -S[X, Y]S^{-1}$  für  $X, Y \in so(S)$ .

[Es gilt  $q_S(M(x)) = {}^T(Mx)S(Mx) = {}^T x({}^T M S M)x = {}^T x S x = q_S(x)$  für  $M \in O(S, \mathbb{R})$ . Wegen  $2{}^T y S x = q_S(x+y) - q_S(x) - q_S(y)$  folgt umgekehrt aus  $q_S(M(v)) = q_S(v)$  für alle  $v$  sofort  ${}^T y({}^T M S M)x = {}^T y S x$ . Wählt man für  $x, y$  die Standardbasisvektoren, ergibt sich  ${}^T M S M = S$ ]. Wie in Lemma 4.43 zeigt man für reelle Matrizen  $X \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

$$X \in so(S) \iff \exp(tX) \in O(S, \mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sei  $S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  mit  $\lambda_\nu \in \{\pm 1\}$ . Wir schreiben dann  $x^\nu := \lambda_\nu x_\nu$  und  $\partial^\nu := \lambda_\nu^{-1} \partial_\nu$ . Die quadratische Form  $q(x) = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu x_\nu^2$  schreibt sich dadurch kurz  $q(x) = \sum_{\nu=1}^n x_\nu x^\nu$ .

Ist  $S$  die Einheitsmatrix  $S = E$ , schreibt man  $so(n)$  anstatt  $so(E)$ , und  $so(n)$  besteht dann aus den antisymmetrischen  $n \times n$ -Matrizen. Eine Basis des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $so(n)$  bilden die Matrizen  $E_{\nu\mu}$  für  $1 \leq \nu < \mu \leq n$ , die den Eintrag  $+1$  bei  $(\nu, \mu)$  und den Eintrag  $-1$  bei  $(\mu, \nu)$  haben und sonst nur Nulleinträge. Man zeigt leicht  $[E_{\alpha\beta}, E_{\beta\gamma}] = E_{\alpha\gamma}$ . Also kann  $so(n)$  mit der Lie Algebra der **Drehfelder**  $L_{\nu\mu} = x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu$  (siehe Abschnitt 5.3) identifiziert werden

$$so(n) \cong \bigoplus_{\nu < \mu} \mathbb{R} \cdot L_{\nu\mu},$$

da die  $L_{\nu\mu}$  dieselben Kommutator-Relationen erfüllen wie die  $E_{\nu\mu}$ . Im allgemeinen wird  $so(S)$  von den Operatoren  $L_\nu^\mu = x_\nu \partial^\mu - x_\mu \partial^\nu$  erzeugt. Wichtige Spezialfälle sind die Gruppen  $O(r, s)$  und die Lie Algebren  $so(r, s) := so(S)$  für  $S = \text{diag}(+1, \dots, +1, -1, \dots, -1)$  mit  $r$  mal  $+1$  und  $s = n - r$  mal  $-1$  als Eintrag. Im Fall  $r = 3, s = 1$  erhält man die **Lorentzgruppe** und ihre Lie Algebra  $so(3, 1)$ . Die affin linearen Abbildungen  $f = f(M, b)$  der Gestalt

$$f(x) = M \cdot x + b, \quad M \in O(3, 1), \quad b \in \mathbb{R}^4$$

$$f(M_1, b_1) \circ f(M_2, b_2) = f(M_1 M_2, M_1(b_2) + b_1)$$

bilden eine Gruppe, die **Poincaregruppe**. Die Liealgebra der Poincaregruppe ist die direkte Summe von  $so(3, 1)$  und der Liegruppe der Translationen  $\bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{R} \cdot \partial_i$

$$so(3, 1) \oplus \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{R} \cdot \partial_i.$$

## 5.13 Fourier-Graßmann Transformation

Sei  $\mathcal{S}_n$  der 'Polynomring' in  $n$  antikommutierenden Variablen  $\theta_1, \dots, \theta_n$ . Elemente  $f(\theta) \in \mathcal{S}_n$  schreiben sich wegen  $\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i$  (somit  $\theta_i^2 = 0$ ) auf eindeutige Weise in der Form

$$f(\theta) = \sum_I \theta^I \cdot c_I, \quad \theta^I := \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_r}$$

für  $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$  mit  $i_1 < \dots < i_r$  und Koeffizienten  $c_I$  in einem Körper  $K \subset \mathbb{C}$ . Es gibt eine eindeutig bestimmte  $K$ -lineare Involution des Ringes  $\mathcal{S}_n$  mit den Eigenschaften

$$(f \cdot g)^* = g^* \cdot f^* \quad \text{mit} \quad (\theta_i)^* = \theta_i.$$

## 5 Ausgewählte Themen I

Man zeigt dann leicht durch Umordnen  $(\theta^I)^* = \varepsilon_r \cdot \theta^I$  für  $\varepsilon_r := (-1)^{r(r-1)/2}$  und  $r = |I|$ .

**Berezin Integral.** Jedes  $f(\theta) \in \mathcal{S}_n$  ist ein Produkt  $f(\theta) = f_n(\theta_n) \cdots f_1(\theta_1)$  mit  $f_i(\theta_i) = a_i + \theta_i b_i$  und Konstanten  $a_i, b_i$  in  $K$ . Wir erklären formal

$$\int f(\theta) d\theta := \int (\cdots (\int f(\theta) d\theta_1) \cdots) d\theta_n := \prod_{i=1}^n b_i,$$

etwa  $\int \theta_1 \cdots \theta_n d\theta = \varepsilon_n$ . Für  $f(\theta) = q(\theta_2, \dots, \theta_n) + r(\theta_2, \dots, \theta_n)\theta_1$  gilt  $\int f(\theta) d\theta_1 = r(\theta_2, \dots, \theta_n)$ .

**Koordinatenwechsel.** Für  $U \in Gl(n, K)$  und  $f(\theta) \in \mathcal{S}_n$  ist  $(U^* f)(\theta) = f(U\theta)$  der Pullback in  $\mathcal{S}_n$ ; d.h. man ersetzt jede Variable  $\theta_\nu$  durch  $\sum_{\mu=1}^n U_{\nu\mu} \theta_\mu$ . Der Pullback vertauscht mit der Involution von  $\mathcal{S}_n$ , d.h. es gilt  $U^*(f^*) = (U^* f)^*$ . Die Leibnizformel 4.12 liefert folgende ‘Substitutionsregel’ für das Berezin Integral.

**Lemma 5.26.** *Es gilt  $\int f(U\theta) d\theta = \det(U) \cdot \int f(\theta) d\theta$ .*

Achtung: Der Vorfaktor ist nicht  $\det(U)^{-1}$  wie man zuerst glauben würde.

**Hodge \*-Operator.** Sei  $*\theta^I = \varepsilon_I \cdot \theta^{I^c}$  mit  $\varepsilon_I \in \{\pm 1\}$  definiert durch  $\theta^I \cdot *\theta^I = \theta_1 \cdots \theta_n$ . Hierbei bezeichne  $I^c$  die Komplementärmenge von  $I$  in  $\{1, \dots, n\}$ . Ist  $q_L(x) = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \cdot x_\nu^2$  eine quadratische Form<sup>16</sup> mit  $\lambda_\nu \neq 0$  für alle  $\nu$ , dann definiert man allgemeiner  $*_L \theta^I = \pm \theta^{I^c}$  mittels  $\theta^I \cdot *_L \theta^I = \sqrt{\prod_{\nu=1}^n |\lambda_\nu|} (\prod_{\nu \in I} \lambda_\nu)^{-1} \cdot \theta_1 \cdots \theta_n$ . Setze  $\varepsilon_L := \prod_{\nu=1}^n (\lambda_\nu / |\lambda_\nu|)$ .

**Fourier Transformation.** Für weitere (auch mit den  $\theta_i$ ) antikommutierende Variable  $\eta_1, \dots, \eta_n$  und  $\eta \cdot \theta = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \eta_\nu \theta_\nu$  ist  $\exp(\eta \cdot \theta) = \sum_{m=0}^n (\eta \cdot \theta)^m / m!$  wohldefiniert und kommutiert mit allen  $f \in \mathcal{S}_n$ . Man erklärt die Fourier Transformierte<sup>17</sup>  $\mathcal{F}_L f$  von  $f$  durch

$$(\mathcal{F}_L f)(\eta) = \left| \prod_{\nu=1}^n \lambda_\nu \right|^{-1/2} \int f(\theta) \cdot e^{\eta \cdot \theta} d\theta.$$

Wir ersetzen danach oft  $\eta_i$  durch  $\theta_i$ , und erhalten auf diese Weise eine Abbildung  $\mathcal{F}_L : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$ . *Beispiel*  $n = 1$ . Für  $f(\theta) = a_1 + b_1 \theta_1$  ist  $\mathcal{F} f(\theta) = b_1 + a_1 \theta_1$ .

**Lemma 5.27.** *Es gilt  $\mathcal{F}_L(f^*) = \varepsilon_L \cdot *_L f$  für den Hodge \*-Operator  $f \mapsto *_L f$ .*

**Beweis.** OBdA  $\lambda_\nu = 1$  für  $\nu = 1, \dots, n$ . Für  $f(\theta) = \theta^I$  mit  $|I| = r$  ist  $\mathcal{F}(f^*) = \varepsilon_r \mathcal{F}(\theta^I)$  gleich  $\varepsilon_r \int \frac{(\eta \cdot \theta)^{n-r}}{(n-r)!} \cdot \theta^I d\theta = \varepsilon_r \int (\eta_{j_1} \theta_{j_1}) \cdots (\eta_{j_{n-r}} \theta_{j_{n-r}}) \cdot \theta^I d\theta$  für  $j_1 < \cdots < j_{n-r}$  und  $I^c = \{j_1, \dots, j_{n-r}\}$ . Dies gibt  $\varepsilon_r \varepsilon_{n-r} \int \eta^{I^c} \theta^{I^c} \theta^I d\theta = \varepsilon_r \varepsilon_{n-r} (-1)^{r(n-r)} \varepsilon_I \varepsilon_n \eta^{I^c} = \varepsilon_I \eta^{I^c} = *_L f$  wie behauptet, wegen der trivialen binomischen Formel  $\varepsilon_r \varepsilon_{n-r} \varepsilon_n (-1)^{r(n-r)} = 1$ .  $\square$

**Lemma 5.28.**  *$q_L$ -orthogonale Koordinatenwechsel  $U$  vertauschen mit dem Hodge Operator  $*_L$  bis auf das Vorzeichen  $\det(U)$ , d.h. für  $U \in O(S, K)$  und  $S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  gilt*

$$\mathcal{F}_L(U^* f) = \det(U) \cdot U^*(\mathcal{F}_L f).$$

<sup>16</sup>Diese definiert eine verallgemeinerte Metrik mit  $g^{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu} \cdot \lambda_\nu$  für  $S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Für  $U \in O(S, K)$  gilt  $(U^* \eta \cdot U^* \theta) = \sum_{\nu, \mu} U_{\nu n} \eta_\nu \lambda_\nu U_{\mu m} \theta_\mu = (\eta \cdot \theta)$  für  $(\eta \cdot \theta) = \sum_{\nu} \eta_\nu \lambda_\nu \theta_\nu$ .

<sup>17</sup>Wir schreiben  $\mathcal{F}$  im ‘Euklidischen’ Fall  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$ , also  $(\mathcal{F} f)(\eta) = \int f(\theta) \cdot e^{\eta \cdot \theta} d\theta$ .

**Beweis.** Es gilt  $(\mathcal{F}_L(U^*f))(\eta) = c_L \int f(U\theta) \exp(\eta \cdot \theta) d\theta = c_L \int f(U\theta) \exp(U\eta \cdot U\theta) d\theta$ . Die Substitutionsregel liefert dann  $\det(U)c_L \int f(\theta) \exp(U\eta \cdot \theta) d\theta = \det(U) \cdot (\mathcal{F}_L f)(U\eta)$ .  $\square$

**Bemerkung.**  $**\eta^I = (-1)^{r(n-r)} \varepsilon_I^2 \eta^I$  für  $r = |I|$  sowie  $\varepsilon_I^2 = 1$  und Lemma 5.27 implizieren  $\mathcal{F}^* \mathcal{F}^* = (-1)^{r(n-r)} \cdot id$  auf Elementen vom Grad  $r$ . Auf solchen Elementen ist  $\mathcal{F}^* \mathcal{F}^*$  gleich  $\varepsilon_{n-r} \varepsilon_r \mathcal{F}^2$ , da  $\mathcal{F}$  homogene Elemente vom Grad  $r$  in homogene Elemente vom Grad  $n - r$  abbildet. Es folgt  $\mathcal{F}^2 = \varepsilon_{n-r} \varepsilon_r (-1)^{r(n-r)} \cdot id$  und damit  $\boxed{\mathcal{F}^2 = \varepsilon_n \cdot id}$ . Wir erhalten analog

**Satz 5.29.**  $\boxed{f = \varepsilon_L \varepsilon_n \cdot \mathcal{F}_L(g)}$  für  $\boxed{g = \mathcal{F}_L(f)}$ .

## 5.14 Laplace Operatoren

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Formen  $\omega = \sum_I \omega_I(x) \cdot dx_I$  in  $A^r(U)$  können als  $C^\infty$ -Funktionen  $\omega : U \rightarrow \mathcal{S}_n$  der Gestalt  $\sum_I \omega_I(x) \cdot \theta^I$  mit Werten in  $\mathcal{S}_n$  (siehe Abschnitt 5.13) aufgefasst werden. Die Cartan Ableitung  $d : A^r(U) \rightarrow A^{r+1}(U)$  ist dann  $d = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\nu} \theta_\nu$ . Für gegebenes  $q_L(x) = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \cdot x_\nu^2$  definiert die Fourier Transformation  $\mathcal{F}_L : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  die assoziierte **Koableitung**

$$\boxed{\delta_L = (\mathcal{F}_L)^{-1} \circ d \circ \mathcal{F}_L}.$$

Offensichtlich ist  $\delta_L \circ \delta_L = 0$ , und in der Sprache der Differentialformen gilt für alle  $r$

$$\delta_L : A^r(U) \rightarrow A^{r-1}(U)$$

wegen  $\mathcal{F}_L : A^{n-r+1}(U) \rightarrow A^{r-1}(U)$  sowie  $\mathcal{F}_L : A^r(U) \rightarrow A^{n-r}(U)$  nach Lemma 5.27. Für  $D_L := d + \delta_L$  beachte  $D_L^2 : A^r(U) \rightarrow A^r(U)$ , d.h.  $D_L^2$  erhält den Raum der  $r$ -Formen, wegen

$$\boxed{D_L^2 = (d + \delta_L)^2 = d \circ \delta_L + \delta_L \circ d}.$$

**Lemma 5.30.** Man hat  $D_L^2 \left( \sum_I \omega_I(x) \cdot dx_I \right) = \sum_I \Delta_L(\omega_I(x)) \cdot dx_I$ , d.h. es gilt

$$\boxed{D_L^2 = \Delta_L}$$

für den klassischen Laplace Operator  $\Delta_L = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}$ .

**Beweis.**  $D_L^2$  ist  $\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu} (\theta_\nu \circ (\mathcal{F}_L)^{-1} \circ \theta_\mu \circ \mathcal{F}_L + (\mathcal{F}_L)^{-1} \circ \theta_\nu \circ \mathcal{F}_L \circ \theta_\mu)$ . Wegen  $(\mathcal{F}_L)^{-1} \circ \theta_\nu \circ \mathcal{F}_L = \lambda_\nu^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta_\nu}$  reduziert<sup>18</sup> sich die Aussage wegen der Symmetrie der Hessematrix auf die Antikommutator-Identität  $\theta_\nu \circ \frac{\partial}{\partial \theta_\mu} + \frac{\partial}{\partial \theta_\mu} \circ \theta_\nu = \delta_{\nu\mu}$  (Fußnote IV.18).  $\square$

Der **Hodge-Operator**  $d^* := (-1)^r \cdot (*_L)^{-1} \circ d \circ (*_L)$  auf  $A^r(U)$ , mit  $*_L$  wie in Abschnitt 5.13, definiert die **deRham Operatoren**  $d^*d + dd^*$ , und es gilt<sup>19</sup> auf  $A^r(U)$

$$\boxed{d^*d + dd^* = -D_L^2}.$$

<sup>18</sup>für Details dazu siehe auch Abschnitt 11.5.

<sup>19</sup> $d^*d + dd^* = -D_L^2$  folgt aus  $d^*d + dd^* = d \circ (-1)^r \cdot (*_L)^{-1} d(*_L) + (-1)^{r+1} \cdot (*_L)^{-1} d(*_L) \circ d$  wegen Lemma 5.27 und  $(-1)^r \varepsilon_r \varepsilon_{r-1} \varepsilon_{n-r} = (-1)^{r+1} \varepsilon_{r+1} \varepsilon_r = -1$ .

## 5.15 Maxwell Gleichungen

Der **Minkowski Raum**  $(\mathbb{R}^4, q_L)$  ist der  $\mathbb{R}^4$  versehen mit der quadratischen **Lorentz Form**

$$q_L(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2;$$

hierbei sei die Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$  und  $(x, y, z, t) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Die zugehörige orthogonale Gruppe  $O(3, 1)$  ist die **Lorentzgruppe**. Der zugehörige Laplace Operator  $\Delta_L$  ist der **D'Alembert Operator**

$$\square = -\partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 + \partial_4^2.$$

Für die Lorentz Form  $q_L(x) = \sum_{\nu=1}^4 \lambda_\nu x_\nu^2$  ist dann  $*_L dx_I = \pm dx_{I^c}$  und das Vorzeichen ist definiert durch  $dx_I \wedge *_L dx_I = (\prod_{\nu \in I} \lambda_\nu)^{-1} \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

*Notation:*  $dx_{13} = -dx_{31} = -dx_3 \wedge dx_1$  oder  $dx_{134} = -dx_{314}$ , etc. Es gilt  $dx_{12} \wedge dx_{34} = dx_{31} \wedge dx_{24} = dx_{23} \wedge dx_{14} = dx_{1234}$  sowie  $dx_1 \wedge dx_{234} = dx_2 \wedge dx_{314} = dx_3 \wedge dx_{124} = dx_{1234}$ , aber beachte  $dx_4 \wedge dx_{123} = -dx_{1234}$ .

Eine Ladungsverteilung im Raum  $\mathbb{R}^3$  ist eine 3-Form  $\rho(x_1, x_2, x_3) \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ . Man muß diese Ladungsdichte erst über ein gewisses Volumen, etwa das eines Quaders  $Q \subset \mathbb{R}^3$  mitteln, um eine Zahl zu bekommen. D.h. die reelle Zahl

$$(\text{Ladung in } Q) = \int_Q \rho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

ist die gesamte Ladung, welche in  $Q$  enthalten ist (diese hängt ab von der Orientierung!!!)

Ähnlich verhält es sich mit der Strom/Ladungsdichte  $J$  in der Minkowski Raum-Zeit. Diese **Strom/Ladungsdichte** ist wiederum eine **3-Form** mit  $j_4 =: -\rho(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , aber nun im  $\mathbb{R}^4$ ; sie ist daher von der Gestalt

$$J = j_1 \cdot dx_{234} + j_2 \cdot dx_{314} + j_3 \cdot dx_{124} - \rho \cdot dx_{123}.$$

Die Hodge-duale Einsform  $j = *_L J = -j_1 dx_1 - j_2 dx_2 - j_3 dx_3 + \rho dx_4$  nennt man den **Strom** (und der Einfachheit werde angenommen<sup>20</sup> die Permeabilität  $\mu$  sei 1). Die **Ladungserhaltung** zeigt  $\int_{\partial Q} J = 0$  für alle 4-dimensionalen Raum-Zeit Würfel  $Q$ . Aus Satz 4.35 folgt daher die **erste Maxwell Gleichung**  $dJ = (\partial_1 j_1 + \partial_2 j_2 + \partial_3 j_3 + \partial_4 \rho) \cdot dx_{1234} = 0$ , d.h.

$$dJ = 0.$$

Seien idealisiert alle Ströme  $j_i$  unendlich oft differenzierbar, d.h.  $J \in A^3(\mathbb{R}^4)$ , so folgt daraus wegen dem Poincare Lemma (Satz 4.30) die Existenz einer 2-Form  $\omega \in A^2(\mathbb{R}^4)$  mit

$$d\omega = J.$$

<sup>20</sup>Im Vakuum ist  $\mu$  eine Konstante und kann dann in den Maxwell Gleichungen im Prinzip ignoriert werden.

Man schreibt  $\omega = -E_1 \cdot dx_{23} - E_2 \cdot dx_{31} - E_3 \cdot dx_{12} + B_1 \cdot dx_{14} + B_2 \cdot dx_{24} + B_3 \cdot dx_{34}$ . Das Hodge Dual  $F = - *_L \omega$  oder  $\omega = *_L F$  definiert die sogenannte **Faraday 2-Form**  $F$

$$F = B_1 \cdot dx_{23} + B_2 \cdot dx_{31} + B_3 \cdot dx_{12} + E_1 \cdot dx_{14} + E_2 \cdot dx_{24} + E_3 \cdot dx_{34} .$$

$(E_1, E_2, E_3)$  und  $(B_1, B_2, B_3)$  definieren das **elektrische** respektive **magnetische Feld**. Die **zweite Maxwell Gleichung** lautet dann  $dF = 0$ . Wegen des Poincare Lemmas gilt deshalb

$$F = dA$$

für eine **1-Form**  $A = \sum_i A_i dx_i$ , das sogenannte **Vektorpotential**  $A$ . Das Vektorpotential  $A$  ist durch die Gleichung  $F = dA$  nur bestimmt bis auf eine exakte Form  $d\varphi$ ,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ . Man kann also  $A$  beliebig durch  $A + d\varphi$  ersetzen (**Eichfreiheit**, Satz 4.30).

Der  $*_L$ -Operator ist nach Lemma 5.27 und 5.28 invariant unter linearen Transformationen der Symmetriegruppe  $SO(q_L)$ , nimmt bei Spiegelungen aber ein Vorzeichen auf. Der Hodge Operator  $d^* = *_L \circ d \circ *_L = (-1)^2 (*_L)^{-1} \circ d \circ *_L$  auf 2-Formen ist dagegen voll invariant unter der **Lorentzgruppe**  $O(q_L)$ . Daher sind die **Maxwell Gleichungen**

$$dF = 0 \quad , \quad d^*F = j$$

ebenfalls invariant unter der vollen Lorentzgruppe. Die **kombinierten Maxwell Gleichungen**

$$DF = j$$

für  $D = d + d^*$  führen wegen  $d^2 = (d^*)^2 = 0$  bei geeigneter Eichung<sup>21</sup> des Vektorpotentials auf die Bestimmung von  $A$  aus der sich dann ergebenden Gleichung  $D^2 A = j$

$$D^2 A = (d^*d + dd^*) A = d^*d A = j ,$$

also wegen Abschnitt 5.14 bei gegebenem  $j$  auf die vier Differentialgleichungen

$$\square A_i = j_i \quad , \quad (i = 1, \dots, 4)$$

vom D'Alembertschen Typ. Im elektrostatischen Fall reduzieren sich diese auf  $-\Delta u = \rho$  bei Benutzung der *Physiker Notation*  $u := -A_4$ . Die D'Alembert Differentialgleichungen sind in der Regel lösbar, etwa unter der vereinfachenden Annahme daß  $j$  eine 1-Form mit kompaktem Träger im  $\mathbb{R}^4$  ist, d.h. im Fall  $j_1, \dots, j_4 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^4)$ . Siehe hierzu Korollar 7.10. Die hierbei gemachte vereinfachende Kompaktheits-Annahme, die in physikalischen Anwendungen natürlich nicht notwendig erfüllt ist, kann aber abgeschwächt werden.

**Bemerkung.** Für die **Lorenz Eichung** muss man zu  $A$  ein  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$  finden können mit der Eigenschaft  $d^*(A + d\varphi) = 0$ . Dies führt auf die Gleichung  $d^*d\varphi = -d^*A$  und wegen Lemma 5.30 somit erneut auf die D'Alembert Gleichung, jetzt in der Form

$$\square \varphi = -d^*A$$

wegen  $\square \varphi = -D^2 \varphi = -(d^*d + dd^*)\varphi = -d^*d\varphi$ ; beachte nämlich  $d^*\varphi = 0$  aus Gradgründen. Etwa unter den oben genannten Kompaktheits-Bedingungen ist diese Gleichung für  $\varphi$  lösbar.

<sup>21</sup>im Falle der **Lorenz-Eichung**  $d^*A = 0$  der Form  $A$ .

## 5.16 Partitionen der Eins

Sei  $f(x)$  eine reellwertige  $r$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion auf dem Intervall  $[0, \infty)$  mit der Eigenschaft

$$f^{(\nu)}(0) = 0 \quad , \quad \forall \nu = 0, 1, \dots, r-1.$$

Wir nehmen an  $f(x) \geq 0$  sowie  $f(x) > 0$  für  $x > 0$ .

**Beispiele.**  $f(x) = x^r$  für  $r < \infty$  und  $f(x) = \exp(-\frac{1}{x})$  für  $r = \infty$ . Sei später obdA  $r = \infty$ .

Wir setzen für  $x < 0$  die Funktion  $f(x)$  durch Null zu einer Funktion auf ganz  $\mathbb{R}$  fort und nennen diese Fortsetzung in  $C^{r-1}(\mathbb{R})$  wieder  $f(x)$ .

Für ein beliebiges  $x_0 > 0$  ist dann  $g(x) = f(x)f(x_0 - x)$  in  $C^{r-1}(\mathbb{R})$ . Es gilt  $g(x) > 0$  genau dann wenn  $x \in (0, x_0)$ , und  $g(x)$  ist Null sonst.

Wegen dem Hauptsatz ist  $h(x) = \int_0^x g(t)dt$  dann in  $C^r(\mathbb{R})$ . Es gilt  $h(x) = 0$  für  $x \leq 0$ ,  $0 < h(x) < \text{const}$  für  $0 < x < x_0$  sowie  $h(x) = \text{const}$  für  $x \geq x_0$ . Hierbei ist  $\text{const} = \int_0^{x_0} g(t)dt$  und obdA  $\text{const} = 1$  bei geeigneter Normierung von  $f$ .

Die Funktion  $\psi(x) = h(x+a)h(a-x)$  für  $a > x_0$  ist wieder in  $C^r(\mathbb{R})$ . Es gilt  $\psi(x) = 0$  genau dann wenn  $x \notin (-a, a)$ , und  $\psi(x) = 1$  genau dann wenn  $x \in [-a+x_0, a-x_0]$ , und es gilt  $0 < \psi(x) < 1$  sonst. Daraus folgt für  $r = \infty$  bei geeigneter Wahl von  $a$  und  $x_0$  sofort

**Lemma 5.31.** Die Funktionen in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  trennen Punkte in  $\mathbb{R}^n$ .

**Beweis.** In der Tat hat die  $C_c^\infty$ -Funktion

$$\varphi(x) = \varphi_{\xi,a}(x) = \psi(d_{\mathbb{R}^n}(x, \xi))$$

ihren Träger in einer Kugel  $K_a(\xi)$  vom Radius  $a$  um den Punkt  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Sie 'trennt' daher  $\xi$  von jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$ , der weiter als  $a$  von  $\xi$  entfernt ist.  $\square$

Sei nun  $M$  eine beliebige kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und sei  $M = \bigcup_{\xi \in I} M \cap K_r(\xi)$  eine endliche Überdeckung von  $M$  durch offene Kugeln um endlich viele Punkte  $\xi \in M$  (siehe Satz 11.4). Die Radien  $r = a/2 > 0$  mögen hierbei von den Punkten  $\xi$  abhängen:  $r = r(\xi)$ . Sei  $N$  die offene Menge

$$N = \bigcup_{\xi \in I} K_{2r}(\xi).$$

Es gilt  $M \subset N$ . Für eine gegebene offene Menge im  $\mathbb{R}^n$ , welche  $M$  enthält, kann obdA durch geeignete Wahl der Radien  $r = r(\xi)$  angenommen werden, daß  $N$  in dieser offenen Menge liegt. Für  $x \in N$  ist dann

$$\varphi_\xi(x) = \frac{\varphi_{\xi,a(\xi)}(x)}{\sum_{\xi \in I} \varphi_{\xi,a(\xi)}(x)}$$

eine wohldefinierte  $C^\infty$ -Funktion und es gilt

$$\sum_{\xi \in I} \varphi_\xi(x) = 1 \quad , \quad \forall x \in \tilde{N}$$

auf der offenen Teilmenge  $\tilde{N} = \bigcup_{\xi \in I} K_r(\xi)$  von  $N$ , welche  $M$  enthält. Man nennt die so konstruierte Funktionenschar  $\varphi_\xi$  (für  $\xi \in I$ ) dann eine **Partition der Eins** auf  $\tilde{N}$  (oder  $M$ ), welche der gegebenen Überdeckung von  $M$  zugeordnet ist.

**Bemerkung.** Für  $n \in \mathbb{N}$  und Polynome  $P(t)$  ist die Funktion  $f(t) = t^{-n}P(t)\exp(-\frac{1}{t})$  differenzierbar im Bereich  $U = (0, \infty]$  mit der Ableitung  $f'(t) = t^{-n-2}Q(t)\exp(-\frac{1}{t})$  für ein Polynom  $Q(t)$ . Setzt man  $f(0) = 0$ , gilt  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-n-1}P(t)\exp(-\frac{1}{t}) = 0$  für jede Folge in  $U$ , die gegen Null konvergiert<sup>22</sup>. Somit ist  $f$  differenzierbar im Punkt Null mit Ableitung  $f'(0) = 0$ . Dies zeigt rekursiv, daß  $f(t) = \exp(-1/t)$  unendlich oft differenzierbar ist auf  $[0, \infty)$ , und alle höheren Ableitungen von  $f$  im Punkt Null verschwinden.

---

<sup>22</sup>Man reduziert auf die Aussage  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^m \exp(-t) = 0$ . Wegen  $t^m \exp(-t) = (mx \exp(-x))^m$  für  $x = t/m$  genügt  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  für  $g(x) = x \exp(-x)$ . Wegen  $g'(x) = (1-x)\exp(-x) \leq 0$  für  $x \in [1, \infty)$  und dem Mittelwertsatz fällt  $g(x)$  monoton in  $[1, \infty)$ . Nach dem Prinzip der monotonen Konvergenz existiert daher der Limes  $\xi = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ . Für  $y = 2x$  folgt  $\xi = \lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x)2 \exp(-x)) = \xi \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \exp(-x) = 0$ .



# 6 Lebesgue Integration

## 6.1 Übersicht

Für einen Funktionenverband  $B(X)$  auf einer Menge  $X$  und ein abstraktes Integral  $I$  auf  $B(X)$  wurde in Satz 3.20 gezeigt, daß sich  $I$  eindeutig zu abstrakten Integralen  $I^\pm$  der Halbverbände der monotonen Hüllen  $B^\pm(X) \supset B(X)$  fortsetzen lässt. Eine beliebige Funktion

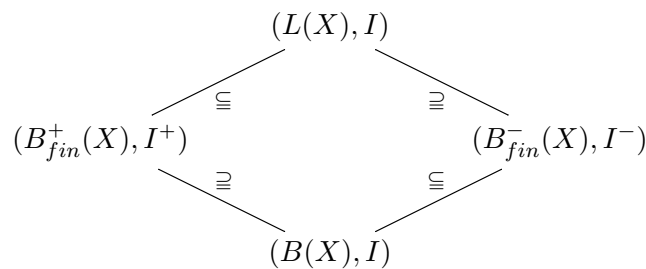
$$f : X \rightarrow \hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

heißt dann **integrierbar** bezüglich  $(B(X), I)$ , wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  geeignete Funktionen  $h \in B^-(X)$  und  $g \in B^+(X)$  gibt mit  $h \leq f \leq g$  und  $I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon$ . Für integrierbare Funktionen kann das Lebesgue Integral  $I(f) \in \mathbb{R}$  definiert werden. Dieses stimmt auf  $B(X)$  mit dem gegebenen Integral  $I$  überein. Sei  $\hat{L}(X)$  die Menge der integrierbaren Funktionen.

Wir zeigen für das Standardintegral, daß die Teilmenge der Punkte  $x \in X$ , wo eine integrierbare Funktion die Werte  $\pm\infty$  annimmt, eine Nullmenge ist, und dass man integrierbare Funktionen auf Nullmengen beliebig abändern kann ohne das Lebesgue Integral zu verändern.

Die  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktionen  $f$  in  $B^\pm(X)$  mit endlichem Integral  $I^\pm(f) \neq \pm\infty$  bilden einen Halbverband  $B_{fin}^\pm(X)$  in  $B^\pm(X)$ .

Die  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktionen in  $\hat{L}(X)$  bilden einen Verband  $L(X)$  und das Lebesgue Integral definiert ein abstraktes Integral auf  $L(X)$ . Es ist das eindeutig bestimmte abstrakte Integral auf  $L(X)$ , das auf  $B(X) \subset L(X)$  mit dem gegebenen  $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$  übereinstimmt.



Eine Funktion ist Lebesgue integrierbar genau dann wenn sie außerhalb von einer Nullmenge mit einer Funktion in  $L(X)$  übereinstimmt. Eine erneute Anwendung des Lebesgue Prozeßes auf  $(L(X), I)$  liefert dann keine neuen integrierbaren Funktionen mehr.

## 6.2 Das Lebesgue Integral

Wir fixieren eine Menge  $X$ , einen Verband von Funktionen  $B = B(X)$  auf  $X$  und ein abstraktes Integral  $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$  und schreiben  $B^+ := B^+(X)$  und  $B^- := B^-(X)$  für die monotonen Hüllen von  $B(X)$ . Beachte  $B^\mp = -B^\pm$ .  $I$  kann zu abstrakten Integralen  $I^+ : B^+(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  und  $I^- : B^-(X) \rightarrow \mathbb{R}^-$  fortgesetzt werden (Satz 3.20), und aus den Definitionen folgt für  $h \in B^-(X)$

$$\boxed{I^-(h) = -I^+(-h)}.$$

[Beweis: Für  $h \in B^-(X)$  ist  $I^-(h) = \liminf_n I(h_n)$  für  $h_n \searrow h$  und  $h_n \in B(X)$ . Es gilt  $I^+(-h) = \limsup_n I(-h_n) = -\liminf_n I(h_n) = -I^-(h)$  und  $-h_n \nearrow -h \in B^+(X)$ ].

**Lemma 6.1.** Für einen Verband  $B(X)$  und  $B^-(X) \ni h \leq g \in B^+(X)$  gilt  $I^-(h) \leq I^+(g)$ .

**Beweis.** Es gilt  $-h \in -B^-(X) = B^+(X)$ , also  $g + (-h) \in B^+(X) + B^+(X) = B^+(X)$ . Wegen der Annahme  $g + (-h) \geq 0$  folgt aus Additivität und Monotonie  $I^+(g) + I^+(-h) = I^+(g + (-h)) \geq 0$ . Wie oben gezeigt gilt  $-I^-(h) = I^+(-h)$ , und damit dann  $I^+(g) - I^-(h) = I^+(g) + I^+(-h) \geq 0$ . Es folgt  $I^+(g) \geq I^-(h)$ .  $\square$

**Definition 6.2 (Integrierbarkeit).** Eine beliebige Funktion

$$\boxed{f : X \rightarrow \hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}}$$

heißt **Lebesgue-integrierbar** bezüglich  $(B, I)$  oder nur kurz **integrierbar**, wenn folgendes gilt: Für alle reellen Zahlen  $\varepsilon > 0$  existieren<sup>1</sup> Funktionen  $h \in B^-$  und  $g \in B^+$  mit den Eigenschaften  $h \leq f \leq g$  und<sup>2</sup>

$$\boxed{I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon}.$$

Für eine beliebige Funktion  $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  definieren wir

$$I^b(f) := \sup\{I^-(h) \mid h \in B^- \text{ mit } h \leq f\}, \quad I^\sharp(f) := \inf\{I^+(g) \mid g \in B^+ \text{ mit } f \leq g\}$$

Ist eine der beiden Mengen leer, setzt man  $I^b(f) := -\infty$  resp.  $I^\sharp(f) := \infty$ . Es gilt

$$\boxed{I^b(f) \leq I^\sharp(f)}.$$

[Wegen  $I^-(h) \leq I^+(g)$  für  $h \leq f \leq g$  ist  $\sup_{h \in B^-, h \leq f} I^-(h) =: I^b(f) \leq I^+(g)$  (Lemma 6.1). Aus  $I^b(f) \leq I^+(g)$  folgt  $I^b(f) \leq I^\sharp(f) := \inf_{g \in B^+, f \leq g} I^+(g)$ .]

<sup>1</sup>Man sieht dann a posteriori auch, dass es reicht wenn für alle  $\varepsilon > 0$  Lebesgue integrierbare Funktionen  $h$  und  $g$  existieren mit  $h \leq f \leq g$  und  $I(g) - I(h) < \varepsilon$ . [Denn für  $g^+ \in B^+$  mit  $g \leq g^+$ ,  $I(g) \leq I^+(g^+)$  sowie  $I^+(g^+) - I(g) < \varepsilon/2$  und analog  $h^- \leq h$ ,  $h^- \in B^-$  mit  $I^-(h^-) \leq I(h)$  und  $I(h) - I^-(h^-) < \varepsilon/2$  gilt  $h^- \leq f \leq g^+$  sowie  $I^+(g^+) - I^-(h^-) < \varepsilon + I(g) - I(h) < 2\varepsilon$ .]

<sup>2</sup>Nach Lemma 6.1 gilt ausserdem  $0 \leq I^+(g) - I^-(h)$ .

**Lemma 6.3 (Lebesgue Integral).** Ist  $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  bezüglich  $(B, I)$  Lebesgue-integrierbar, dann gilt  $I^b(f) = I^\sharp(f)$  und der so definierte Wert liegt in  $\mathbb{R}$ , d.h. ist verschieden von  $\pm\infty$ .

**Definition 6.4.** Die in Lemma 6.3 definierte reelle Zahl wird das **Lebesgue Integral**  $I(f)$  der bezüglich  $(B, I)$  integrierbaren Funktion  $f$  genannt

$$I(f) := I^b(f) = I^\sharp(f).$$

**Beweis.** Wegen

$$0 \leq I^\sharp(f) - I^b(f) \leq I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon$$

für alle  $\varepsilon > 0$  folgt  $I^b(f) = I^\sharp(f)$  und diese Zahl ist in  $\mathbb{R}$  [Aus  $I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon$  folgt  $I^+(g) < \infty$  sowie  $I^-(h) > -\infty$  wegen  $I^+(g) \in \mathbb{R}^+$ ,  $I^-(h) \in \mathbb{R}^-$ . Nach Lemma 6.1 ist damit  $\{I^-(h) | B^- \ni h \leq f \leq g\}$  nach oben durch  $I^+(g) < \infty$  beschränkt, und das Supremum  $I^b(f)$  liegt somit in  $\mathbb{R}$ . Ditto für  $I^\sharp(f)$ .]  $\square$

**Lemma 6.5.**  $f \in B^+$  (resp.  $B^-$ ) ist Lebesgue integrierbar bezüglich  $(B, I)$  genau dann, wenn  $I^+(f) \neq \infty$  (resp.  $I^-(f) \neq -\infty$ ) gilt. In diesem Fall ist  $I^b(f) = I^\sharp(f)$  gleich  $I^+(f)$  (resp.  $I^-(f)$ ). Insbesondere sind Funktionen aus  $B \subseteq B^+$  Lebesgue integrierbar, und das Lebesgue Integral stimmt auf  $B$  mit dem ursprünglich gegebenen Integral  $I : B \rightarrow \mathbb{R}$  überein.

**Beweis.** Aus  $B^+ \ni f \leq g \in B^+$  folgt  $I^+(f) \leq I^+(g)$ . Das Infimum aller Werte  $I^+(g)$ , für  $g \in B^+$  und  $f \leq g$ , wird daher bei  $g = f \in B^+$  angenommen, d.h.  $I^\sharp(f) = I^+(f) < +\infty$ . Da  $I^b(f) \leq I^\sharp(f)$  ja immer gilt, verbleibt zum Beweis von  $I^b(f) = I^\sharp(f) = I^+(f) < \infty$  nur  $I^+(f) \leq I^b(f)$  zu zeigen für  $f \in B^+$ . Wähle dazu Funktionen  $f_n \in B$  mit  $f_n \nearrow f$ . Nach Definition von  $I^+(f)$  gilt  $I^-(f_n) = I(f_n) \nearrow I^+(f)$ . Es folgt

$$I^\sharp(f) = I^+(f) := \sup_n I(f_n) = \sup_n I^-(f_n) \leq \sup_{h \in B^-, h \leq f} I^-(h) =: I^b(f).$$

$\square$

**Beispiel 6.6.** Für kein  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $f(x) = |x|^\alpha$  Lebesgue integrierbar für das Standardintegral  $I$  auf  $B(X) = CT(\mathbb{R})$  [anderenfalls wäre wegen  $B^- \ni h_n(x) = \chi_{[1/n, n]}(x) \cdot f(x) \leq f(x)$  dann  $\lim_n I^-(h_n) \leq I^\sharp(f) < +\infty$  im Widerspruch zu  $I^-(h_n) = \int_{1/n}^n x^\alpha dx = \frac{n^{\alpha+1} - (1/n)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$  (der Einfachheit halber  $\alpha \neq -1$ ) mit  $\sup_n I^-(h_n) = +\infty$ .]

Aber dasselbe Argument zeigt mit Hilfe von Lemma 6.5 die *Integrierbarkeit* von  $|x|^\alpha$  auf jeder kompakten Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  im Fall  $\alpha > -1$ . Für  $h_n(x) := \chi_{A \setminus (-1/n, +1/n)}(x) \cdot |x|^\alpha$  gilt nämlich  $h_n(x) \in B(X) = CT(\mathbb{R})$  und  $h_n(x) \nearrow |x|^\alpha$  (mit  $0^\alpha := 0$ ).

## 6.3 Der Verband $L(X)$

**Satz 6.7.** Die  $\mathbb{R}$ -wertigen (!) bezüglich  $(B, I)$  Lebesgue integrierbaren Funktionen

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

bilden einen **Verband**  $L(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist Lebesgue-integrierbar}\}$ , welcher  $B$  umfasst.

## 6 Lebesgue Integration

Dies folgt aus

**Satz 6.8 (Permanenzeigenschaften).** Die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist unter reeller Skalarmultiplikation, Addition<sup>3</sup> und den Bildungen  $\min, \max$  abgeschlossen.

**Beweis.** *Schritt 1.* Für  $f_1, f_2$  gilt  $I^\sharp(f_1 + f_2) \leq I^\sharp(f_1) + I^\sharp(f_2)$  und  $I^\sharp(\lambda f) \leq \lambda I^\sharp(f)$ , für  $\lambda > 0$ . Entsprechendes gilt für  $I^\flat$  mit den umgekehrten Ungleichungen [wegen  $I^\sharp(-f) = -I^\flat(f)$  und  $I^\flat(-f) = -I^\sharp(f)$ ]. Daraus folgt  $I^\flat(f_1) + I^\flat(f_2) \leq I^\flat(f_1 + f_2) \leq I^\sharp(f_1 + f_2) \leq I^\sharp(f_1) + I^\sharp(f_2)$ . Sind  $f_1, f_2$  Lebesgue integrierbar, zeigt  $I^\flat(f_i) = I^\sharp(f_i)$  daher

$$\boxed{I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)}$$

und ditto  $I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f)$  für alle Lebesgue integrierbaren Funktionen  $f$  und  $\lambda \geq 0$ .

*Schritt 2.* Aus  $h \leq f \leq g$  und  $h \in B^-, g \in B^+$  sowie  $I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon$  folgt sofort  $-g \leq -f \leq -h$  mit  $-g \in B^-, -h \in B^+$  und  $I^+(-h) - I^-(-g) = I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon$ . Man zeigt dann analog  $I^\sharp(-f) = -I^\flat(f)$  und  $I^\flat(-f) = -I^\sharp(f)$ , also  $I(-f) = -I(f)$ . Dies zeigt die Verbandseigenschaft  $f \in L(X) \Rightarrow -f \in L(X)$  und  $I(-f) = -I(f)$ . Zusammen mit Schritt 1 folgt daher für alle Lebesgue integrierbaren Funktionen  $f$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f)}.$$

*Schritt 3.* Wegen  $\min(f, \tilde{f}) = -\max(-f, -\tilde{f})$  genügt es, dass für integrierbares  $f$  und  $\tilde{f}$  die Funktion  $\max(f, \tilde{f})$  integrierbar ist. Wähle dazu  $h \leq f \leq g$  resp.  $\tilde{h} \leq \tilde{f} \leq \tilde{g}$  mit  $I^+(g) - I^-(h) = I^+(g - h) < \varepsilon$  resp.  $I^+(\tilde{g}) - I^-(\tilde{h}) = I^+(\tilde{g} - \tilde{h}) < \varepsilon$ . Dann gilt automatisch  $I^+(\tilde{g}) < \infty$  und  $I^+(g) < \infty$  sowie  $B^- \ni \max(h, \tilde{h}) \leq \max(f, \tilde{f}) \leq \max(g, \tilde{g}) \in B^+$ . Weiterhin gilt

$$I^+(\max(g, \tilde{g})) - I^-(\max(h, \tilde{h})) = I^+(\max(g, \tilde{g}) - \max(h, \tilde{h})) \leq I^+(g - h) + I^+(\tilde{g} - \tilde{h}) < 2\varepsilon$$

unter Benutzung von  $g - h \in B^+$  und  $\tilde{g} - \tilde{h} \in B^+$  und<sup>4</sup>  $\max(g, \tilde{g}) - \max(h, \tilde{h}) \leq (g - h) + (\tilde{g} - \tilde{h})$ . Also ist  $\max(f, \tilde{f})$  integrierbar.  $\square$

**Lemma 6.9.** Auf dem Verband  $L(X) = L(X, B, I)$  definiert das Lebesgue Integral  $I$  ein abstraktes Integral.

**Beweis.** Wie bereits gezeigt ist  $I$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Für die Monotonie genügt es  $I(f) \geq 0$  zu zeigen, für integrierbare Funktionen  $f \geq 0$ . Beachte  $I(f) = I^\sharp(f) = \inf I^+(g)$  für  $g \geq f \geq 0$  mit  $g \in B^+$ . Wegen der Monotonie von  $I^+$  gilt  $I^+(g) \geq I^+(0) = 0$  für  $g \geq 0$  in  $B^+$ . Daraus folgt  $I(f) = \liminf \{I^+(g)\} \geq 0$ , also die Monotonie des Lebesgue Integrals  $I$ . Die Halbstetigkeit: Für  $f_n \nearrow f$  und  $f_n, f \in L(X)$  existiert  $g \in B^+$  mit  $f_n \leq f \leq g$  und  $I(g) < \infty$ . Also gilt  $I(f_n) \leq I(g)$  und damit  $\sup I(f_n) \leq I(g) < \infty$ . Aus dem nächsten Satz 6.10 (Beppo Levi) folgt  $I(f) = \sup I(f_n)$  und damit die Halbstetigkeit des Lebesgue Integrals.  $\square$

<sup>3</sup>Hierbei müssen wir annehmen, dass beide Funktionen gleichzeitig Werte entweder in  $\mathbb{R}^+$  oder  $\mathbb{R}^-$  haben.

<sup>4</sup>Ist obdA  $g(x) \geq \tilde{g}(x)$ , dann ist  $\max(g, \tilde{g}) - \max(h, \tilde{h}) \leq g - h \leq (g - h) + (\tilde{g} - \tilde{h})$  im Punkt  $x$ .

## 6.4 Vertauschungssätze

**Satz 6.10 (Beppo Levi).** Für eine monotone Folge  $f_n \nearrow f$  von integrierbaren Funktionen  $f_n$  definiert  $I(f_n)$  eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen. Gilt

$$\boxed{\kappa := \sup_n I(f_n) < \infty},$$

dann ist die punktweise Grenzfunktion  $f = \sup_n f_n$  integrierbar und es gilt

$$\boxed{I(f) = I(\sup_n f_n) = \sup_n I(f_n) = \kappa}.$$

**Beweis.** Fixiere  $\varepsilon > 0$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gibt es  $h_n \in B^-$  sowie  $g_n \in B^+$  mit  $h_n \leq f_n \leq g_n$  so daß gilt

$$I^+(g_n) - I^-(h_n) = I^+(g_n - h_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Beachte, dann  $I^+(g_n) < \infty$ .

*Untere Abschätzung.* Aus  $h_n \in B^-$  und  $h_n \leq f$  folgt  $\sup_n I(h_n) \leq I^b(f)$ . Wegen  $I(f_n - h_n) \leq I(g_n - h_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$  gilt  $I(f_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \leq I(h_n)$ . Im Limes  $n \rightarrow \infty$  folgt

$$\kappa \leq I^b(f) \quad , \quad \kappa := \sup_n I(f_n).$$

*Obere Abschätzung.* Beachte  $\tilde{g}_n := \max_{i=1}^n g_i \in B^+$  sowie  $f_n \leq \tilde{g}_n$ . Die Folge  $\tilde{g}_n$  konvergiert monoton gegen eine Grenzfunktion  $\tilde{g}_n \nearrow \tilde{g}$ , welche nach Lemma 3.16 in  $(B^+)^+ = B^+$  liegt. Die Abschätzung  $\tilde{g}_n - f_n \leq \max_{i=1}^n (g_i - h_i) \leq \sum_{i=1}^n (g_i - h_i)$  liefert  $I^+(\tilde{g}_n) < I(f_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^i} < I(f_n) + \varepsilon$ . Im Limes  $n \rightarrow \infty$  gibt dies  $I^+(\tilde{g}) \leq \kappa + \varepsilon$ . Wegen  $f \leq \tilde{g} \in B^+$  gilt  $I^\sharp(f) \leq I^+(\tilde{g})$ . Daraus folgt

$$\kappa \leq I^b(f) \leq I^\sharp(f) \leq I^+(\tilde{g}) \leq \kappa + \varepsilon.$$

Da dies für alle  $\varepsilon > 0$  richtig ist, zeigt dies wie behauptet  $I^\sharp(f) = I^b(f) = \kappa < \infty$ .  $\square$

**Bemerkung:** Eine analoge Aussage gilt für monoton fallende Folgen von integrierbaren Funktionen  $f_n$  im Fall  $\inf_n I(f_n) > -\infty$ .

**Bemerkung.** Der Satz von Beppo Levi zeigt, daß die monotonen Hüllen  $L_{fin}^\pm(X)$  von  $(L(X), I)$  mit  $L(X)$  übereinstimmen. Aus Fußnote 1 und Beppo Levi folgt, daß eine Iteration des Lebesgueprozesses, angewendet auf  $(L(X), I)$ , keine neuen integrierbaren Funktionen liefert.

**Satz 6.11 (Satz von Lebesgue).** Sei  $f_n \rightarrow f$  eine punktweise konvergente Folge integrierbarer Funktionen  $f_n$  auf  $X$ , so dass eine von  $n$  unabhängige integrierbare Funktion  $F$  existiert mit  $|f_n| \leq F$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $f$  integrierbar und es gilt

$$\boxed{I(\lim_n f_n) = \lim_n I(f_n)}.$$

Man nennt diesen Satz auch **Satz von der dominierten Konvergenz**, da die Funktionen  $f_n$  von der fixierten integrierbaren Funktion  $F$  dominiert werden.

## 6 Lebesgue Integration

**Beweis.** *Schritt 1.* Es gilt

$$\varphi_n(x) := \inf_{i \geq n} (f_i(x)) \nearrow f(x).$$

Für festes  $n$  gilt

$$\psi_m(x) := \inf_{m \geq i \geq n} (f_i(x)) \searrow \varphi_n(x).$$

Beachte  $\psi_m \in L(X)$ . Wegen  $-F \leq \psi_m$  gilt  $-\infty < I(\psi_m) \leq \lim_m I(\psi_m)$ , und somit ist die Grenzfunktion  $\varphi_n$  integrierbar nach Beppo Levi. Wegen  $\varphi_n \leq F$  gilt  $\lim_n I(\varphi_n) \leq I(F) < \infty$ , und somit ist  $f$  (erneut nach Beppo Levi) integrierbar mit  $I(\varphi_n) \rightarrow I(f)$ .

*Schritt 2.* Analog definiert man  $\tilde{\varphi}_n(x) = \sup_{i \geq n} (f_i(x)) \searrow f(x)$  und zeigt die Konvergenz  $I(\tilde{\varphi}_n(x)) \rightarrow I(f)$ . Nach Definition gilt

$$\varphi_n \leq f_n \leq \tilde{\varphi}_n.$$

Daraus folgt dann wie behauptet die Konvergenz  $I(f_n) \rightarrow I(f)$ . □

## 6.5 Anwendungen

Sei  $Y = \mathbb{R}^n$  oder  $Y = \mathbb{Z}$  oder ein Produkt  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m$  etc.

**Satz 6.12.** Sei  $Z$  ein metrischer Raum und  $f : Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in der Variable  $z \in Z$  für jedes feste  $y \in Y$ . Gilt  $|f(y, z)| \leq F(y)$  für ein  $F \in L(Y)$  und alle  $z \in Z$ , und ist  $f(y, z)$  in  $L(Y)$  für festes  $z \in Z$ , dann ist  $g(z) := \int_Y f(y, z) dy$  definiert und stetig in der Variable  $z$ .

**Beweis.** Für jede Folge  $z_n \rightarrow z$  ist  $f_n(y) := f(y, z_n) \in L(Y)$ . Wegen  $|f_n(y)| \leq F(y)$  folgt aus dem Satz 6.11 von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y f_n(y) dy = \int_Y \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) dy.$$

Also  $\lim_n \int_Y f(z_n, y) dy = \int_Y f(z, y) dy$ . □

Analog beweist man den bereits im Abschnitt 4.13 formulierten **Vertauschungssatz 4.32**: Für jede Folge  $x_n \rightarrow \xi$  ( $x_n \neq \xi$ ) gibt es  $\theta_{y,n} \in [a, b]$  zwischen  $\xi$  und  $x_n$  mit

$$f(x_n, y) - f(\xi, y) = (x_n - \xi) \cdot \partial_x f(\theta_{y,n}, y) =: (x_n - \xi) \cdot f_n(y)$$

(Mittelwertsatz). Nach Annahme ist die linke Seite in  $L(Y)$ . Also  $f_n(y) \in L(Y)$ , und nach der Definition der Ableitung  $\lim_n f_n(y) = f'(\xi, y)$ . Wegen  $|f_n(y)| = |\partial_x f(\theta_{y,n}, y)| \leq F(y)$  folgt dann  $\int_Y f_n(y) dy \rightarrow \int_Y \partial_x f(\xi, y) dy$  aus dem Satz von der dominierten Konvergenz 6.11 (siehe nächstes Kapitel Lebesgue Integration). Nach Definition von  $f_n(y)$  ist der Limes der  $\int_Y f_n(y) dy$  aber  $\lim_n (g(x_n) - g(\xi)) / (x_n - \xi) = g'(\xi)$ . □

**Korollar 6.13 (Fubini).** Für das Produkt  $X = Y \times Z$  zweier nicht entarteter beschränkter Quader  $Y, Z$  wie in Beispiel 2.25 definiert daher  $I(f) := \int_Z f(y, z) dz$  eine lineare Abbildung

$$I : B = C(X) \rightarrow \tilde{B} = C(Y).$$

Es gilt  $\int_X f dy dz = \int_Y I(f) dy$  (da dies richtig ist für Treppenfunktionen  $f$  und da  $I, \int_Y$  und  $\int_X$   $\mathbb{R}$ -linear, monoton und halbstetig sind).

Eine reelle Folge  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert eine sogenannte **absolut konvergente Reihe**  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ , wenn  $f$  in  $L(\mathbb{N})$  liegt. In der Tat: Da  $L(\mathbb{N})$  ein Verband ist, ist mit  $f$  auch die Folge  $|f(n)|$  der Absolutbeträge in  $L(\mathbb{N})$ , und aus Satz 6.11 folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |f(n)| < \infty.$$

Die Umkehrung gilt auch: Aus  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |f(n)| < \infty$  folgt  $|f(n)| \in L(\mathbb{N})$  nach dem Satz von Beppo Levi oder Lemma 6.5, sowie die absolute Konvergenz im Sinne von  $f \in L(\mathbb{N})$  wegen des Satzes 6.11 von der dominierten Konvergenz (mit der Majorante  $F = |f|$ ).

**Satz 6.14 (Umordnungssatz).** Ist eine Folge  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  in  $L(\mathbb{N})$  (d.h. die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  ist absolut konvergent), dann gilt für jede Bijektion  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(\sigma(i)).$$

**Beweis.** Sei  $F(x) = |f(x)|$ . Da  $f_n(x) := f(x) \chi_{[0,1,\dots,n]}(\sigma^{-1}(x))$  punktweise gegen  $f(x)$  konvergiert, konvergiert  $I(f_n) = \sum_{i=0}^n f(\sigma(i))$  gegen  $I(f)$  nach Satz 6.11.  $\square$

## 6.6 Nullmengen

Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heisst **integrierbar** (bezüglich  $(B(X), I)$ ), wenn ihre charakteristische Funktion  $\chi_Y(x)$  integrierbar ist. Man nennt die reelle Zahl  $\text{vol}(Y) = I(\chi_Y) \geq 0$  das **Volumen** von  $Y$ . Sind  $Y_1, Y_2$  integrierbar, dann nach Satz 6.7 auch  $Y_1 \cap Y_2$  und  $Y_1 \cup Y_2$  und es gilt

$$\boxed{\text{vol}(Y_1) + \text{vol}(Y_2) = \text{vol}(Y_1 \cup Y_2) + \text{vol}(Y_1 \cap Y_2)}.$$

Dies folgt aus  $\chi_{Y_1} + \chi_{Y_2} = \chi_{Y_1 \cup Y_2} + \chi_{Y_1 \cap Y_2}$  und  $\max(\chi_{Y_1}, \chi_{Y_2}) = \chi_{Y_1 \cup Y_2}$  sowie analog  $\min(\chi_{Y_1}, \chi_{Y_2}) = \chi_{Y_1 \cap Y_2}$ . Insbesondere gilt  $\text{vol}(Y_1 \cup Y_2) \leq \text{vol}(Y_1) + \text{vol}(Y_2)$ .

Eine **Nullmenge** ist eine integrierbare Menge vom Volumen Null.

Für eine Nullmenge  $Y$  gilt  $I(n \cdot \chi_Y) = 0$  für alle natürlichen Zahlen  $n$ . Im Limes  $n \rightarrow \infty$  folgt daher wegen Beppo Levi: Die Funktion, die  $+\infty$  auf  $Y$  ist, und Null sonst, ist integrierbar mit Integral Null. Ditto für  $-\infty$  anstelle von  $+\infty$ . Aus  $-\infty \cdot \chi_Y \leq f \leq +\infty \cdot \chi_Y$  folgt daher  $f \in \hat{L}(X)$  und  $I(f) = 0$ . Somit gilt:

## 6 Lebesgue Integration

Jede Funktion  $f$  mit Werten in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$  und Träger in einer Nullmenge ist integrierbar mit Integral Null. Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

**Lemma 6.15 ( $\varepsilon$ -Kriterium für Nullmengen).**  $Y \subseteq X$  ist eine Nullmenge, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  eine abzählbare Überdeckung von  $Y$  durch endlich messbare Mengen  $U_i$  existiert mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(U_i) < \varepsilon.$$

**Beweis.** Mittels Beppo Levi zeigt man:  $U := \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  ist endlich messbar mit  $\text{vol}(U) < \varepsilon$ . Für  $\varepsilon = 1/n$  sei  $U(n)$  diese Vereinigung. Dann bilden die Durchschnitte  $Z_n := \bigcap_{i=1}^n U(n)$  eine absteigende Kette endlich messbarer Mengen mit  $\text{vol}(Z_n) < \frac{1}{n}$ . Daher ist  $Z = \bigcap_{i=1}^{\infty} Z_n$  eine Nullmenge (Beppo Levi). Aus  $Y \subseteq Z$  folgt die Behauptung.  $\square$

Ein Spezialfall:

Eine abzählbare Vereinigung  $Y$  von Nullmengen  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  ist eine Nullmenge.

**Lemma 6.16.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$  integrierbar. Dann ist die Menge der Unendlichkeitsstellen  $f^{-1}(\{\pm\infty\})$  eine Nullmenge in  $X$ .

**Beweis.** Es genügt, daß  $\Sigma = f^{-1}(+\infty)$  eine Nullmenge ist [Ersetze  $f$  durch  $-f$ ]. OBdA gilt  $f \geq 0$  [Ersetze  $f$  durch  $\max(0, f)$ ]. OBdA  $f \in B^+(X)$  mit  $I(f) \in \mathbb{R}$  [Benutze die Definition der Integrierbarkeit]. Für  $\varphi(x) \geq 0$  in  $B(X)$  und reelles  $c > 0$  gilt  $\Sigma \subset \Sigma(c) = \{x \in X \mid f(x) - c\varphi(x) > 0\}$ . Aus  $h := 0 \leq \chi_{\Sigma} \cdot \varphi \leq c^{-1}f \cdot \chi_{\Sigma(c)} \leq c^{-1}f =: g$  und  $I(g) - I(h) \leq I(f)/c$  folgt  $\chi_{\Sigma} \cdot \varphi \in L(X)$  mit  $I(\chi_{\Sigma} \cdot \varphi) = 0$  (für  $c \rightarrow \infty$ ). Also ist  $\Sigma_n = \Sigma \cap \{x \in X \mid \varphi(x) \geq 1/n\}$  wegen  $B^-(X) \ni 0 \leq \chi_{\Sigma_n} \leq n(\chi_{\Sigma} \cdot \varphi) \in B^+(X)$  eine Nullmenge für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Vereinigung  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n = \{x \in \Sigma \mid \varphi(x) > 0\}$  ist also eine Nullmenge. Wegen  $f \in B^+(X)$  gilt  $\varphi_n \nearrow f$  für gewisse  $\varphi_n \in B(X)$  (und oBdA  $\varphi_n \geq 0$ ). Es folgt  $\Sigma \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid \varphi_n(x) > 0\}$ . Also ist  $\Sigma$  enthalten in der abzählbaren Vereinigung der Nullmengen  $\{x \in \Sigma \mid \varphi_n(x) > 0\}$ . Somit ist  $\Sigma$  selbst eine Nullmenge.  $\square$

## 6.7 Messbare Funktionen

Sei  $L(X) = L(X, B, I)$  der Verband der reellwertigen Lebesgue integrierbaren Funktionen. Wir gehen in diesem Abschnitt über zu den  $\mathbb{C}$ -wertigen Räumen  $L(X, \mathbb{C})$  und  $C_c(X, \mathbb{C})$ . Damit sei gemeint, dass sowohl Real- als auch Imaginärteil im entsprechenden Raum liegen. Setze  $I(u + iv) := I(u) + iI(v)$  für komplexes  $f = u + iv$  aus  $L(X, \mathbb{C})$ . Wir machen jetzt folgende

**Annahme:**  $B(X) \supset C_c(X, \mathbb{C})$ .

Unter dieser Annahme machen wir folgende

**Definition 6.17.** Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  heisst **messbar**, wenn eine Folge  $f_n \in C_c(X, \mathbb{C})$  existiert, welche **punktweise fast überall** (d.h. **ausserhalb einer Nullmenge**) gegen die Grenzfunktion  $f$  konvergiert

$$f_n \rightarrow f \quad (\text{f\"u}).$$

**Satz 6.18.** Es gilt

1. Die messbaren reellwertigen Funktionen bilden einen Verband  $M(X)$ .
2.  $M(X, \mathbb{C})$  ist eine  $\mathbb{C}$ -Algebra.
3.  $f \in M(X, \mathbb{C}) \implies \bar{f}$  und  $|f| \in M(X, \mathbb{C})$ .
4. Aus  $f_n \rightarrow f$  fast überall und  $f_n \in M(X, \mathbb{C})$  folgt  $f \in M(X, \mathbb{C})$ .
5.  $M(X)$  ist abgeschlossen unter abzählbarer (Supremums-)Infimumsbildung.
6. Ist  $|f| \leq g$  fast überall und  $f \in M(X, \mathbb{C})$  sowie  $g \in L(X)$ , dann gilt  $f \in L(X, \mathbb{C})$ .

**Beweis.** 1., 2. und 3. folgt sofort aus den Permanenzsätzen der Konvergenz und der entsprechenden Eigenschaft von  $C_c(X)$ . 4. folgt ähnlich mittels des Diagonalfolgentricks und der Tatsache, daß abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind. 5. folgt dann unmittelbar aus 4. und der Abgeschlossenheit 1. unter endlichen Suprema (Infima).

Zur letzten Aussage. OBdA ist  $f$  reellwertig. Für  $f = f_+ + f_-$  genügt es  $f_{\pm}$  zu betrachten. Das heisst oBdA  $f \geq 0$ . Wähle  $f_n \rightarrow f$  (fÜ) mit  $f_n \in C_c(X)$ . Ersetzt man  $f_n$  durch  $\max(0, f_n)$ , gilt oBdA  $0 \leq f_n$ . Dann gilt  $\min(f_n, g) \rightarrow \min(f, g) = f$  (fÜ). Wegen  $|\min(f_n, g)| \leq g$  ist  $g$  eine Majorante. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt daher  $f \in L(X)$ , denn  $g$  und alle  $f_n$  und damit auch alle  $\min(f_n, g)$  sind in  $L(X)$  wegen der Verbandseigenschaft von  $L(X)$ .  $\square$

**Beispiel.** Die charakteristischen Funktionen  $\chi_A$  von kompakten Teilmengen  $A \subset \mathbb{R}^n$  sind messbare Funktionen in  $M(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  (siehe Beispiel 2.25).

**Definition 6.19.** Sei  $\mathcal{L}^1(X)$  der Raum der messbaren und integrierbaren Funktionen auf  $X$ . Der Raum  $L^1(X)$  ist der Quotient  $\mathcal{L}^1(X)/(\text{Nullfunktionen})$  von  $\mathcal{L}^1(X)$  nach dem Unterraum der Nullfunktionen, d.h. nach dem Raum der Funktionen die auf  $X$  (fÜ) verschwinden.

**Definition 6.20.**  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  ist der Raum aller messbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ , für die  $\chi_A \cdot f$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  liegt für alle kompakten Teilmengen  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

**Beispiel 6.21.** Aus Satz 6.18(2)(6) folgt für  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$  sofort  $f \cdot \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Wegen der Substitutionsformel<sup>5</sup> gilt für die Funktion  $f(x) = r^\alpha$

$$\boxed{r^\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \iff \alpha > -n}.$$

<sup>5</sup>In Polarkoordinaten<sup>6</sup> ist das Integral  $\text{vol}(S^{n-1}) \int_{r=0}^R r^\alpha r^{n-1} dr$  genau dann endlich, wenn  $\alpha + n - 1 > -1$ .



# 7 Verallgemeinerte Funktionen

## 7.1 Basics

Für offene Teilmengen  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  nennen wir  $C_c^\infty(M)$  den Raum<sup>1</sup> der **Testfunktionen** auf  $M$ . Eine **verallgemeinerte Funktion**<sup>2</sup> auf  $M$  ist eine  $\mathbb{R}$ -Linearform

$$F : C_c^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sei  $\mathcal{F}_{gen}(M)$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der verallgemeinerten Funktionen auf  $M$ .

**Beispiele.** a) *Abstrakte Integrale*  $I : C_c(M) \rightarrow \mathbb{R}$  (siehe Abschnitt 3.8) definieren wegen  $C_c^\infty(M) \subset C_c(M)$  verallgemeinerte Funktionen auf  $M$ . b) Funktionen  $f \in C(M)$  oder auch<sup>3</sup> Funktionen in  $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  definieren verallgemeinerte Funktionen  $F = F_{f \cdot dx} \in \mathcal{F}_{gen}(M)$  vermöge

$$F_{f \cdot dx}(\varphi) := \int_M f(x)\varphi(x)dx, \quad f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n).$$

Man nennt  $F = F_{f \cdot dx}$  **glatt** im Fall  $f \in C^\infty(M)$ .

**Lokalität.** Für offenes  $U \subseteq M$  gilt  $C_c^\infty(U) \subseteq C_c^\infty(M)$ , und dies definiert die Restriktionen  $res_U^M : \mathcal{F}_{gen}(M) \rightarrow \mathcal{F}_{gen}(U)$ . Für Überdeckungen  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  durch offene Mengen  $U_i$  gilt

$$res_{U_i}^M(F) = 0, \quad \forall i \in I \implies F = 0.$$

[Wähle eine  $C^\infty$ -Partition der Eins  $\sum_i \psi_i = 1$  zu dieser Überdeckung. Dann ist  $F(\varphi) = F(\sum_i \varphi \psi_i) = \sum_i F(\varphi \psi_i) = 0$ , da nur endlich viele  $\varphi \psi_i$  von Null verschieden sind.]

Seien  $F_U \in \mathcal{F}_{gen}(U)$  gegeben für alle  $U = U_i, i \in I$  der Überdeckung  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Dann gilt

$$res_{U \cap V}^U(F_U) = res_{U \cap V}^V(F_V), \quad \forall U, V \in I \implies \exists F \in \mathcal{F}_{gen}(M) \text{ mit } res_U^M(F) = F_U, \forall U \in I.$$

<sup>1</sup> $C_c^\infty(M)$  ist der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf  $M$  mit kompaktem Träger.

<sup>2</sup>diese Bezeichnung ist weit verbreitet; besser wäre die Bezeichnung verallgemeinerte Dichte! Eine  $\mathbb{R}$ -Linearform auf den Formen  $A_c^i(M)$  mit kompaktem Träger (Testformen) sind analog  $(n-i)$ -Ströme  $\mathcal{D}^{n-1}(M)$  auf  $M$ .

<sup>3</sup>Funktionen in  $L_{loc}^1(M)$  sind Funktionen, welche für alle Kompakta  $K \subset M$  bezüglich des Standard Lebesgue Integrals von  $\mathbb{R}^n$  in  $L^1(K)$  liegen.

## 7 Verallgemeinerte Funktionen

[Setze  $F(\varphi) := \sum_{i=1}^{\infty} F_{U_i}(\varphi \cdot \psi_i)$  für eine  $C^\infty$ -Partition der Eins  $\sum_i \psi_i = 1$  mit  $\text{supp}(\psi_i) \subset U_i \in I$ . Offensichtlich ist  $F$  eine verallgemeinerte Funktion auf  $M$  mit  $\text{res}_U^M(F) = F_U$ ].

Der **Träger**  $\text{supp}(F)$ ,  $F \in \mathcal{F}_{gen}(M)$  ist das Komplement der offenen Menge  $U$  aller  $x \in M$ , für die es eine offene Kugel  $V \subseteq M$  um  $x$  gibt mit der Eigenschaft  $F(\varphi) = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(V)$ . Nach Definition ist  $\text{supp}(F)$  abgeschlossen in  $M$ , und es gilt  $F(\varphi) = 0$  für alle  $\varphi \in C_c^\infty(U)$  (wegen Lokalität).

**Multiplikation.** Für  $F \in \mathcal{F}_{gen}(M)$  und  $f \in C^\infty(M)$  ist  $f \cdot F(\varphi) := F(f \cdot \varphi)$  in  $\mathcal{F}_{gen}(M)$ . Für  $f \in C^\infty(M)$  gilt offensichtlich  $f \cdot F_{g \cdot dx} = F_{(fg) \cdot dx}$ . Hat  $F$  Träger in  $A$ , dann auch  $f \cdot F$ .

**Ableitungen.** Die Ableitung  $\partial_i F$  einer verallgemeinerten Funktion  $F \in \mathcal{F}_{gen}(M)$  ist

$$\partial_i F(\varphi) := -F(\partial_i \varphi).$$

Hat  $F$  Träger in  $A$ , dann auch  $\partial_i F$ . Beachte  $\partial_i F_{f \cdot dx} = F_{(\partial_i f) \cdot dx}$  für glattes  $F = F_{f \cdot dx}$  [benutze partielle Integration] sowie  $\partial_i(f \cdot F) = (\partial_i f) \cdot F + f \cdot (\partial_i F)$ .

**Direkte Bilder.** Eine stetige Abbildung  $g : M \rightarrow N$  heisst **eigentlich**, wenn Urbilder von kompakten Mengen wieder kompakt sind. Sei  $I$  ein abstraktes Integral auf  $C_c(M)$  und  $g$  stetig und **eigentlich**. Dann definiert  $(g_* I)(\varphi) := I(g^*(\varphi))$  eine verallgemeinerte Funktion  $F = g_* I$  auf  $N$  wegen  $g^*(C_c(N)) \subseteq C_c(M)$ . Ist  $g$  **eigentlich** und sogar **eine  $C^\infty$ -Abbildung** zwischen offenen Teilmengen  $M$  und  $N$  von Euklidischen Räumen, dann gilt  $g^*(\varphi) = \varphi(g(x)) \in C_c^\infty(M)$  für  $\varphi \in C_c^\infty(N)$ . Jede verallgemeinerte Funktion  $F$  auf  $M$  definiert in diesem Fall somit eine verallgemeinerte Funktion  $g_* F$  auf  $N$  vermöge  $g_* F(\varphi) := F(g^*(\varphi))$ .

**Lemma 7.1.** Für eigentliche glatte Abbildungen  $g$  gilt  $g_*(\partial_i F) = \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \cdot \partial_j(g_* F)$ .

**Beweis.** Es gilt  $g_*(\partial_i F)(\varphi) = \partial_i F(\varphi(g(x))) = -F(\partial_i \varphi(g(x)))$  und die Kettenregel (Lemma 4.7) gibt  $-F(\sum_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \cdot (\partial_j \varphi)(g(x))) = -\sum_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \cdot (g_* F)(\partial_j \varphi) = \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \cdot \partial_j(g_* F)(\varphi)$ .  $\square$

## 7.2 Distributionen

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\xi \in M$ . Wir definieren  $d_\xi(F) \in \hat{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  für eine verallgemeinerte Funktion  $F \in \mathcal{F}_{gen}(M)$ , und nennen  $F$  eine **Distribution** auf  $M$ , wenn für jede kompakte Teilmenge  $K \subset M$  gilt

$$\inf_{\xi \in K} (d_\xi(F)) > -\infty.$$

**Skalierungsgrad.** Für  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  schreiben wir  $\text{ord}_\xi(F) \geq \alpha$ , wenn für  $t \in (0, 1)$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\alpha} \cdot F(\psi(x) \varphi(\frac{x - \xi}{t})) = 0, \quad \forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n).$$

Beachte.  $\psi(x)\varphi(\frac{x-\xi}{t}) \in C_c(\mathbb{R}^n)$  hat Träger in  $\xi + t \cdot \text{supp}(\varphi)$ , und dieser ist für  $\xi \in M$  und kleine  $t$  in  $M$  enthalten. Im Limes  $t \rightarrow 0$  wird dieser Träger immer kleiner. Setze

$$d_\xi(F) = \sup\{\alpha \mid \text{ord}_\xi(F) \geq \alpha\}.$$

Offensichtlich bilden die Distributionen einen  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum  $\mathcal{F}(M)$  von  $\mathcal{F}_{\text{gen}}(M)$ .

**Lemma 7.2.** Jedes abstrakte Integral  $I$  auf  $C_c(M)$  definiert eine Distribution auf  $M$ ; eine Funktion  $f \in L^1_{\text{loc}}(M)$  definiert eine Distribution  $F_{f \cdot dx}$  auf  $M$ . Ist  $F$  eine Distribution auf  $M$ , dann auch  $\partial_i F$  sowie  $g \cdot F$  für  $g \in C^\infty(M)$ .

**Beweis.** Für abstrakte Integrale  $F$  und  $\psi \in C^\infty(M)$ ,  $\varphi \in C_c^\infty(M)$  gilt für alle  $\alpha < 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\alpha} F(\psi(x)\varphi(\frac{x-\xi}{t})) = 0$$

wegen der Boxungleichung (Abschnitt 3.1), aus der  $|F(\psi(x)\varphi(\frac{x-\xi}{t}))| \leq C$  mit einer von  $t$  unabhängigen Konstante  $C$  folgt. Dies zeigt  $d_\xi(F) \geq 0$  für jedes abstrakte Integral  $F$ . Sei nun  $F = F_{f \cdot dx}$  und  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Für  $f \geq 0$  definiert  $F$  ein abstraktes Integral und wir sind fertig. Allgemein gilt  $f = f_+ - f_-$  mit  $f_\pm \geq 0$  in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Aus  $F = F_{f_+ \cdot dx} - F_{f_- \cdot dx}$  folgt die Behauptung. Für Distributionen<sup>4</sup> in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  folgt  $\text{ord}_\xi(F) \geq 0$  und damit  $d_\xi(F) \geq 0$ .

Ist  $\text{ord}_\xi(F) > \alpha$ , dann ist  $\text{ord}_\xi(G) > \alpha + 1$  für  $G = (x_\nu - \xi_\nu) \cdot F$  bzw.  $\text{ord}_\xi(G) > \alpha - 1$  für  $G = \partial_\nu F$ . Schliesslich gilt  $\text{ord}_\xi(G) > \alpha$  für  $G = \psi \cdot F$ .  $\square$

Für  $\xi \in M$  definieren wir die **Dirac Distribution**  $F = \delta_\xi$  durch

$$\varphi \mapsto \varphi(\xi).$$

Die Dirac Distributionen definieren abstrakte Integrale auf  $C_c(M)$ ; siehe Definition 3.18. Der Träger der Dirac Distribution  $F = \delta_\xi \in \mathcal{F}(M)$  ist  $\text{supp}(F) = \{\xi\}$ , und es gilt  $d_\xi(F) = 0$ .

**Lemma 7.3.** Aus  $\text{supp}(F) = \{\xi\}$  und  $d_\xi(F) > 0$  für  $F \in \mathcal{F}(M)$  folgt  $F = 0$ .

**Beweis.** OBdA  $\xi = 0$ . Für  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  wähle  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\varphi(x) = 1$  für alle  $x \in \text{supp}(\psi)$ . Dann gilt  $\psi = \psi\varphi$  und  $F(\psi) = F(\psi\varphi)$ . Andererseits ist  $F(\psi\varphi) = F(\psi(x)\varphi(\frac{x}{t}))$  für alle  $t \in (0, 1)$ , denn  $\psi(x)\varphi(x) - \psi(x)\varphi(\frac{x}{t})$  hat Träger in  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$  und  $\text{res}_U^{\mathbb{R}^n}(F) = 0$ . Aus  $d_\xi(F) > 0$  folgt daher  $F(\psi) = F(\psi(x)\varphi(\frac{x}{t})) = \lim_{t \rightarrow 0} F(\psi(x)\varphi(\frac{x}{t})) = 0$ .  $\square$

**Korollar 7.4.** Distributionen mit Träger in  $\{\xi\}$  sind endliche  $\mathbb{R}$ -Linearkombinationen von Ableitungen der Dirac Distribution  $\delta_\xi$ .

**Beweis.** Sei obdA  $\xi = 0$ . Aus Lemma 7.3 folgt für  $\ell + d_\xi(F) > 0$  die Aussage (\*):  $P \cdot F = 0$  für alle Monome  $P \in \mathcal{P}_\ell(\mathbb{R}^n)$ . Sei  $K \subset M$  kompakt und enthalte eine offene Kugel um  $\xi$ . Wähle  $\psi \in C_c^\infty(M)$  konstant 1 auf  $K$ . Für  $\varphi \in C_K^\infty(M)$  gilt dann  $\varphi(x) = \varphi(0) \cdot \psi + \sum_{\nu=1}^n x_\nu \cdot \varphi_\nu(x)$

<sup>4</sup>Es gilt sogar  $\text{ord}_\xi(F) \geq \alpha$  für  $\alpha < n$  für  $F = F_{f \cdot dx}$  im Fall einer stetigen Funktion  $f$  und damit  $d_\xi(F) \geq n$ . Dies folgt sofort aus der Substitutionsformel (Lemma 3.9, Satz 4.27).

## 7 Verallgemeinerte Funktionen

für gewisse  $\varphi_\nu \in C_c(\mathbb{R}^n)$  [siehe Lemma 5.25; multipliziere noch mit der Funktion  $\psi \in C_c(M)$ .] Iterativ folgt  $\varphi(x) = Q(x) \cdot \psi(x) + \sum_P P(x) \cdot \varphi_P(x)$  für ein Polynom  $Q$  vom Grad  $\leq \ell - 1$ , homogene Polynome  $P$  vom Grad  $\ell$  und gewisse  $\varphi_P \in C_c^\infty(M)$ . Beachte  $F(\varphi) = F(Q \cdot \psi)$  wegen (\*). Der Raum der Distributionen mit der Verschwindungsbedingung (\*) hat daher höchstens die Dimension  $d = \sum_{i=0}^{\ell-1} \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}_i(\mathbb{R}^n))$ . Der Unterraum aller partiellen Ableitungen von  $\delta_0$  bis zum Grad  $\ell - 1$  hat auch die Dimension  $d$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Homogenität.** Sei  $M = \mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und  $g_t : M \rightarrow M$  die Abbildung  $g_t(x) = t^{-1}x$ . Man sagt  $F$  ist *homogen vom Grad*  $\text{grad}(F) = \alpha \in \mathbb{R}$ , wenn  $g_{t*}F = t^\alpha \cdot F$  gilt für alle  $t > 0$  in  $\mathbb{R}$ . Offensichtlich ist dann  $d_0(F) \geq \text{grad}(F)$ . Beispiel: Ist  $F$  homogen vom Grad  $\alpha$ , dann ist  $\partial_i F$  homogen vom Grad  $\alpha - 1$ . Die Distribution  $F_{r^\alpha \cdot dx}$  ist homogen vom Grad  $n + \alpha$  wegen Lemma 3.9. Die Dirac Distribution  $\delta_0$  ist homogen vom Grad  $\alpha = 0$ .

### 7.3 Faltung

Seien  $g, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Besitzt eine der Funktionen  $f, g$  kompakten Träger auf  $\mathbb{R}^n$ , so ist die **Faltung** der Funktionen  $g * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  definiert

$$(g * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} g(x - y)f(y)dy .$$

Die Substitution  $y \mapsto x - y$  zeigt  $f * g = g * f$ . Analog zeigt man  $(f * g) * h = f * (g * h)$ , falls mindestens zwei der drei Funktionen  $f, g, h$  kompakten Träger besitzen. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgert man leicht  $\partial_i(g * f) = (\partial_i g) * f = g * (\partial_i f)$ .

Für  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $F \in \mathcal{F}_{gen}(\mathbb{R}^n)$  ist die Faltung  $F * f$  erklärt als *Funktion* auf  $\mathbb{R}^n$  (nota bene *nicht* als verallgemeinerte Funktion !) durch

$$(F * f)(y) := F(h) \quad , \quad h(x) := f(y - x) .$$

Insbesondere gilt dann  $F_{g \cdot dx} * f = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(y - x)dx$ , also  $F_{g \cdot dx} * f = g * f$ .

**Beispiel.** Für die Dirac Distribution  $F = \delta_0$  gilt  $\delta_0 * f = f$ .

**Lemma 7.5.** Für abstrakte Integrale  $F$  auf  $C_c(\mathbb{R}^n)$  und  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt  $F * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  sowie

$$\partial_i(F * f) = F * (\partial_i f) .$$

Hat  $F$  ausserdem kompakten Träger, dann ist  $F * f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis.** Jede Distribution  $F$  ist eine Summe  $F = \sum_{i=0}^{\infty} F_i$  von Distributionen  $F_i = \psi_i \cdot F$  mit  $K_i = \text{supp}(F_i) \subseteq \{x \mid i \leq \|x\| \leq i + 2\}$  [benutze Partition der Eins  $\sum_i \psi = 1$ ] und  $(F * f) = \sum_i (F_i * f)(y)$  sowie  $(F_i * f)(y) = 0$  für fast alle  $i$ , falls  $y$  in einem fixierten Kompaktum  $A$  liegt. Die Glattheit von  $F * f(y)$  ist eine lokale Aussage. Man kann daher  $y \in A$  annehmen für ein geeignetes Kompaktum  $A$ , welches den Träger von  $f$  enthält. Der Träger von

$(F_i * f)(y)$  ist im Kompaktum  $K_i + A$  enthalten. Daher ist jetzt oBdA  $F = F_i$ , d.h. der Träger von  $F$  ist oBdA kompakt. Dann existiert  $K$  kompakt mit einer offenen Teilmenge  $M \subset K$ , so daß  $M$  die kompakte Menge  $A + \text{supp}(F)$  enthält. Da  $F$  ein abstraktes Integral ist, gilt dann

$$|F(\varphi)| \leq \text{const}_1 \cdot \|\varphi\|_{C(K)} \quad , \quad \text{und oBdA } \varphi \in C_c^\infty(M) .$$

Ist  $F * f$  differenzierbar mit  $\partial_i(F * f) = F * (\partial_i f)$ , folgt daraus bereits rekursiv  $F * f \in C^\infty(M)$ . Zum Beweis setze  $t_a(f)(x) := f(x + a)$ . Wegen<sup>5</sup>

$$\|f(y + a - x) - f(y - x) - a \cdot df(y - x)\|_{C(K)} \leq c_2(K, f) \cdot \|a\|_{Eukl}^2$$

gilt  $|(F * f)(y + a) - (F * f)(y) - F * (a \cdot df)| = |F(t_a(h) - h - a \cdot dh)| \leq c_1 \cdot \|t_a(h) - h - a \cdot dh\|_{C(K)} \leq c_1 c_2(K, f) \cdot \|a\|_{Eukl}^2$  für  $h(x) = f(x - y)$ . Der Limes  $\|a\| \rightarrow 0$  existiert. Also ist  $(F * f)(y)$  diffenzierbar mit den partiellen Ableitungen  $\partial_i(F * f) = F * (\partial_i f)$ .  $\square$

$(\partial_i F) * f = F(-\frac{\partial}{\partial x_i} h)$  für  $h(x) = f(y - x)$  und  $-\frac{\partial}{\partial x_i} h(x) = -\frac{\partial}{\partial x_i} f(y - x) = (\partial/\partial y_i f)(y - x) = g(y - x)$  für  $g := \partial_i f$  zeigen  $(\partial_i F) * f = F * g = F * (\partial_i f)$ .

**Korollar 7.6.** Für ein abstraktes Integral  $F$  auf  $C_c(\mathbb{R}^n)$  und für  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\boxed{\partial_i(F * f) = F * (\partial_i f) = (\partial_i F) * f} ,$$

also  $D(F * f) = D(F) * f$  für Differentialoperatoren  $D$  mit konstanten Koeffizienten. Daher ist für  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  im Fall  $DF = \delta_0$  die Funktion

$$u = F * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

eine Lösung der Differentialgleichung  $D(u(x)) = g(x)$ .

**Beweis.** Es gilt  $D(u) = D(F * g) = D(F) * g = \delta_0 * g = g$ .  $\square$

In den beiden nächsten Abschnitten wenden wir Korollar 7.6 an im Fall der zwei wichtigen Beispiele  $D = \Delta$  (**Laplace Operator**) und  $D = \square$  (**D'Alembert Operator**). Wir konstruieren in beiden Fällen Distributionen  $F$  (genauer gesagt sogar abstrakte Integrale) mit der Eigenschaft

$$\boxed{D(F) = \delta_0} ,$$

sogenannte **Fundamentallösungen**  $F$  der durch  $D$  definierten Differentialgleichung.

<sup>5</sup>OBD A  $x = 0$ . Beachte dann  $f(y + ta) - f(y) - ta \cdot df(y) = {}^T a \text{Hess}_\xi(f) a$  für ein  $\xi = y + \theta a \in M$ , was man leicht auf den eindimensionalen Fall zurückführt. Den eindimensionalen Fall zeigt man durch zweimaliges Anwenden des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

## 7.4 Coulomb Distribution

Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{r^{n-2}}$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  liegt in  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  (Beispiel 6.21). Somit definiert  $G = F_{r^{2-n}dx}$  eine homogene Distribution auf  $\mathbb{R}^n$  vom Grad  $n + (2 - n) = 2$ . Die Laplace Ableitung  $F = \Delta G$  hat daher Grad Null und aus  $\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = 0$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  (Abschnitt 5.8) folgt  $\text{supp}(F) = \{0\}$ . Wegen  $d_0(F) \geq \text{grad}(F) = 0$  zeigt dies  $\Delta G = a_0 \cdot \delta_0$ , wie im Beweis von Korollar 7.4. Es folgt

**Lemma 7.7.** Für  $n \geq 1$  und  $a_0 = (n - 2) \cdot \text{vol}(S^{n-1})$  gilt

$$\boxed{-\Delta F_{r^{2-n}dx} = a_0 \cdot \delta_0}$$

**Beweis.** Wir wissen  $a_0 \cdot \varphi(0) = \int r^{2-n}(-\Delta \varphi(x))dx$  für alle  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ . Durch einen Limeschluß gilt dies auch<sup>6</sup> für  $\varphi(x) = \exp(-r^2)$  mit  $\Delta \varphi = (4r^2 - 2n)\varphi$ . In Polarkoordinaten (Lemma 9.8) gibt dies  $a_0 = \text{vol}(S^{n-1}) \int_{r>0} (2n - 4r^2)e^{-r^2} r dr = (n - 2)\text{vol}(S^{n-1})$ .  $\square$

## 7.5 Wellengleichung

Betrachte auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  den D'Alembert Operator (mit  $t = x_{n+1}$ )

$$\square = -\partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 - \dots - \partial_n^2 + \partial_{n+1}^2, \quad (n \geq 2).$$

Wir definieren auf  $C_c(\mathbb{R}^{n+1})$  abstrakte Integrale  $I_{\pm}$  (d.h. monotone  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen) als Komposition  $I_{\pm} = a \circ b_{\pm}$  von zwei monotonen  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen  $a$  resp.  $b = b_{\pm}$

$$C_c(\mathbb{R}^{n+1}) \xrightarrow{b_{\pm}} C_c(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{a} \mathbb{R},$$

für  $b_{\pm} : \varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_n, \pm r)$  mit  $r = +\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , sowie  $a : \psi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x_1, \dots, x_n)}{(n-1)\text{vol}(S^{n-1})r^{n-2}} dx_1 \cdots dx_n$ . Als abstrakte Integrale sind die  $I_{\pm}$  Distributionen auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  (nach Lemma 7.2), und in symbolischer Notation gegeben durch

$$\boxed{I_{\pm} = \frac{\delta(t \mp r)}{(n-1)\text{vol}(S^{n-1})r^{n-2}}}.$$

**Lemma 7.8 (Avancierte/Retardierte Potentiale).** Für  $n = 3$  gilt

$$\boxed{\square I_{\pm} = \frac{1}{2} \cdot \delta_0}.$$

Der Beweis ist analog zu dem von Lemma 7.7. Die Distributionen  $I_{\pm}$  sind homogen vom Grad 2, also ist  $\square I_{\pm}$  homogen vom Grad Null. Der Beweis zerfällt wieder in zwei Schritte:

<sup>6</sup>Sei  $\psi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  mit  $0 \leq \psi(x) \leq 1$  konstant 1 für alle Punkte  $x$  mit  $\|x\| \leq 1$ . Dann konvergiert  $\varphi_m(x) = \psi(x/m) \exp(-r^2)$  gegen  $\exp(-r^2)$ . Es gilt  $\int r^{2-n}(\Delta \exp(-r^2))dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int r^{2-n}(\Delta \varphi_m(x))dx$  und  $\int r^{2-n}(\Delta \varphi_m(x))dx = a_0$  wegen  $\varphi_m(0) = 1$  und  $\varphi_m \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ . Beachte dabei  $|\int r^{2-n} \Delta((1 - \varphi(x/m)) \exp(-r^2))dx| \leq \sum_{|i| \leq 2} m^2 |\int_{|x| \geq m} b_i(x) \exp(-r^2)dx|$  für beschränkte stetige Funktionen  $b_i(x)$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Benutze nun  $\lim_{m \rightarrow \infty} m^2 \int_{|x| \geq m} \exp(-r^2)dx = 0$ .

1.  $\square I_{\pm}$  hat Träger in  $\{0\}$ , und wie in Lemma 7.7 folgt daraus  $\square I_{\pm} = a_0 \cdot \delta_0$ .
2. Die Bestimmung der Konstante  $a_0$  mittels Polarkoordinaten.

**Beweis.** Die Abbildungen  $g = g^{\pm}$  für  $g^{\varepsilon}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, \varepsilon \cdot r)$  und  $\varepsilon = \pm 1$

$$g^{\pm} : U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow V = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

sind auf  $U$  glatt und *eigentlich*, und nach Definition ist  $H = H^{\pm}$ , definiert auf  $V = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  durch

$$H := \text{res}_N^{\mathbb{R}^{n+1}}(I_{\pm}) = (g^{\pm})_*(F) \quad \text{für} \quad F := \frac{F r^{2-n} dx}{(n-1)\text{vol}(S^{n-1})},$$

das direkte Bild unter  $g^{\pm}$  der auf  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  glatten Distribution  $F$ . Beachte  $\frac{\partial}{\partial x_i} g_j = 1$  für  $i = j = 1, \dots, n$ ; und  $\frac{\partial}{\partial x_i} g_{n+1} = \varepsilon \cdot \frac{x_i}{r}$  für  $1 \leq i \leq n$ , und ist Null sonst. Aus Lemma 7.1 folgt daher

$$\partial_i(g_*F) = g_*(\partial_i F) - \varepsilon \cdot \frac{x_i}{r} \partial_t(g_*F) \quad , \quad i = 1, \dots, n,$$

*Folgerung.* Eine kleine Nebenrechnung<sup>7</sup> zeigt dann auf  $V = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\square H = \varepsilon \cdot \frac{(3-n)\partial_t g_*(r^{1-n})}{(n-1)\text{vol}(S^{n-1})} \quad , \quad \varepsilon = \pm 1$$

Für  $n = 3$  verschwindet  $\square H$  auf  $V$ , d.h.  $\square I_{\pm}$  hat Träger im Punkt 0. Dies zeigt Schritt 1. Die Konstante  $a_0$  bestimmt man, indem man  $a_0 \cdot \delta_0 = \square \left( \frac{\delta(t \mp r)}{(n-1)\text{vol}(S^{n-1})r^{n-2}} \right)$  für die Funktion  $\varphi(x, t) = \exp(-r^2 - t^2)$  auswertet. Man benutzt dazu einen Limeschluss wie im Beweis von Lemma 7.7 und erhält  $a_0 = 1/2$ .  $\square$

Bei der Addition von  $I_+$  und  $I_-$  heben sich, auf Grund der Vorzeichen  $\varepsilon = \pm 1$ , die beiden im obigen Beweis auftretenden Terme  $\pm \square H$  weg. Es folgt daher ganz allgemein

**Lemma 7.9.** Für alle  $n \geq 2$  gilt  $\square(I_+ + I_-) = \delta_0$ .

**Korollar 7.10.** Für Funktionen  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  resp.  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  sind die Gleichungen

$$\boxed{-\Delta u = \rho \quad \text{resp.} \quad \square u = g}$$

lösbar durch Funktionen  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

<sup>7</sup>Für  $H = g_*F$  folgt  $\square H = \partial_t^2 H - \sum_{i=1}^n \partial_i(g_*(\partial_i F) - \varepsilon \frac{x_i}{r} \partial_t H)$ . Bis auf  $\partial_t^2 H$  ist dies die Summe von  $-g_*(\Delta F) + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r} \partial_t g_*(\partial_i F)$  und  $\varepsilon \sum_{i=1}^n \partial_i(\frac{x_i}{r} \partial_t H) = \varepsilon \sum_{i=1}^n \partial_i(\frac{x_i}{r}) \partial_t H + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r} \partial_t \partial_i H$ . Nun gilt  $\varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r} \partial_t \partial_i H = \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r} \partial_t g_*(\partial_i F) - \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n (\frac{x_i^2}{r^2}) \partial_t^2 H$ . Nach Lemma 7.7 ist  $\Delta F = 0$  auf  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Zusammenfassen aller Terme gibt auf  $V = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\square H = \varepsilon \cdot \partial_t g_* \left( 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r} \cdot \partial_i F + \sum_{i=1}^n (\partial_i(\frac{x_i}{r})) \cdot F \right).$$

Der Term in Klammern ist  $2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r} \partial_i(r^{2-n}) + \sum_{i=1}^n (\partial_i(\frac{x_i}{r})) r^{2-n} = (3-n)r^{1-n}$ .



# 8 Hilberträume

## 8.1 Vorbemerkung

In der **Quantentheorie** betrachtet man (in der Regel unendlich dimensionale)  $\mathbb{C}$ -Vektorräume  $V$ , welche mit einer positiv definiten Hermiteschen Bilinearform versehen und vollständig sind: Das heisst, auf  $V$  existiert eine  $\mathbb{R}$ -bilineare Form

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

mit  $\langle \lambda v, \mu w \rangle = \bar{\lambda} \mu \langle v, w \rangle$  für  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  und  $v, w \in V$  sowie

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle},$$

so daß weiterhin  $\langle v, v \rangle$  reell und  $> 0$  ist für alle  $v \neq 0$ . Es wird außerdem angenommen, daß  $V$  vollständig ist bezüglich der Metrik  $d(v, w) = \|v - w\|$  auf  $V$ , welche durch  $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$  definiert wird. Einen solchen Vektorraum  $V$  nennt man einen **Hilbertraum**.

Physikalisch betrachtet definiert  $V$  einen sogenannten **Zustandsraum**: Zustände sind dabei die komplexen Geraden  $\mathbb{C} \cdot v$  (komplex lineare Unterräume der Dimension 1 in  $V$ ) mit  $v \neq 0$ . Da sich der Beweis der Schwarz Ungleichung überträgt, erfüllt die reelle Zahl

$$W(v, w) = \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|v\|^2 \|w\|^2}$$

die Ungleichung

$$0 \leq W(v, w) \leq 1.$$

Diese Zahl hängt nur von den Zuständen  $\mathbb{C}v$  und  $\mathbb{C}w$  ab. Physikalisch wird  $W(v, w)$  gedeutet als Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Zustand  $\mathbb{C}v$  den Zustand  $\mathbb{C}w$  enthält (oder in ihn übergeht). Eine Bijektion der Menge aller Zustände, welche alle Übergangswahrscheinlichkeiten erhält, nennt man einen Automorphismus des Zustandsraumes. Jede **unitäre** lineare Abbildung  $L : V \rightarrow V$  liefert einen solchen Automorphismus, wobei  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen  $L$  unitär genannt werden wenn  $\langle L(v), L(w) \rangle = \langle v, w \rangle$  für alle Vektoren  $v, w$  aus  $V$  gilt.

Von besonderer **mathematischer Bedeutung** sind **anti-hermitesche**  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen  $X : V \rightarrow V$ , also Abbildungen<sup>1</sup> mit der Eigenschaft  $\langle X(v), w \rangle = -\langle v, X(w) \rangle$ , denn sie

<sup>1</sup>Ist  $V$  endlich dimensional, so daß  $U_t = \exp(tX)$  definiert ist, dann ist  $U_t$  unitär nach Lemma 4.43.

definieren eine **Lie Algebra**: Sind  $X$  und  $Y$  anti-hermitesch, dann ist auch  $[X, Y] := XY - YX$  anti-hermitesch. Ein antihermitescher Operator  $X$  kann physikalisch wie folgt mit **Messungen** in Verbindung gebracht werden. Ist  $X$  anti-hermitesch, dann ist  $\frac{X}{2\pi i}$  ein **hermitescher** Operator

$$X \text{ anti-hermitesch} \iff \frac{X}{2\pi i} \text{ hermitesch,}$$

und hermitesche Operatoren haben reelle Eigenwerte. Die **hermiteschen** Operatoren  $\frac{X}{2\pi i}$  bilden keine Liealgebra, aber ihre Eigenwerte haben **physikalische Bedeutung**, in konkreten Fällen etwa als Impuls, Ort, Energie etc. (jeweils abhängig vom Operator  $X$ ). Zustände  $\mathbb{C}v$ , die Eigenräume des Operators  $\frac{X}{2\pi i}$  zum Eigenwert  $\lambda$  definieren, haben den wohldefinierten Messwert  $\lambda$  (Impuls, Ort, Energie resp.). Beliebige Zustände  $\mathbb{C}v$  haben keinen wohldefinierten Messwert. Nur der statistische **Erwartungswert** der Messung ist dann definiert als die automatisch (!) reelle Zahl

$$E(X, v) := \frac{\langle \frac{X}{2\pi i} v, v \rangle}{\|v\|^2}.$$

Die **Standardabweichung**  $\sigma(X, v)$  vom Erwartungswert  $E(X, v)$  der Messung ist dann

$$\sigma(X, v) := \frac{\|\frac{\tilde{X}}{2\pi i} v\|}{\|v\|} = \frac{\|\frac{X}{2\pi i} v - E(X, v)v\|}{\|v\|}$$

für den normalisierten Operator

$$\tilde{X} := X - 2\pi i E(X, v) \cdot id_V.$$

Beachte  $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y]$ . Ein System von antihermiteschen Operatoren  $X_\nu$  (Messungen) für  $\nu = 1, \dots, n$  heisst kohärent, wenn alle Operatoren  $X_\nu$  und damit auch alle normalisierten Operatoren  $\tilde{X}_\nu$  miteinander kommutieren.

Die **Heisenberg Unschärferelation**. Seien  $X$  und  $Y$  zwei 'Messungen' zu Operatoren  $X$  und  $Y$ , die nicht miteinander kommutieren sondern die Heisenberg Kommutatorrelation<sup>2</sup> erfüllen

$$[X, Y] = 2\pi i \cdot h \cdot id_V$$

für eine Konstante  $h$  (das **Wirkungsquantum**). Sei  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  (bei richtiger Normierung ist  $h = 1$ ). Dann gilt für jeden Zustand  $\mathbb{C}v$  (obdA mit  $\|v\| = 1$ ) die Unschärferelation

$$\sigma(X, v) \cdot \sigma(Y, v) \geq \frac{1}{2} \hbar.$$

**Beweis.** Durch Übergang zu den normalisierten Operatoren kann man obdA annehmen  $X = \tilde{X}$  und  $Y = \tilde{Y}$ . Es folgt  $2\pi h = |\langle 2\pi i h v, v \rangle| = |\langle (XY - YX)v, v \rangle| = |-\langle Y(v), X(v) \rangle + \langle X(v), Y(v) \rangle| \leq \|Y(v)\| \|X(v)\| + \|X(v)\| \|Y(v)\| = 2\|X(v)\| \|Y(v)\| = 2(2\pi)^2 \sigma(X, v) \sigma(Y, v).$

□

<sup>2</sup>Für dieses berühmte Beispiel siehe Heisenberg, Physikalische Prinzipien der Quantentheorie, Seite 14

$$X(f) = h \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

$$Y(f) = 2\pi i x \cdot f(x),$$

wobei  $\frac{X}{2\pi i}$  und  $\frac{Y}{2\pi i}$  zu Impuls  $p$  resp. Ort  $q$  korrespondieren und  $\frac{[X, Y]}{2\pi i}$  zur Poissonklammer  $\{p, q\} = 1$  in Planckkoordinaten, d.h. für  $h = 1$  (nicht  $\hbar = 1$ ). Siehe auch Abschnitt 8.9.

## 8.2 $L^2$ -Räume

Für komplexwertige Funktionen  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  gelten die trivialen Abschätzungen

1.  $|\bar{f} \cdot g| \leq \max(|f|, |g|)^2 = \max(|f|^2, |g|^2)$
2.  $|f + g|^2 \leq (|f| + |g|)^2 \leq 4 \cdot \max(|f|, |g|)^2 = 4 \cdot \max(|f|^2, |g|^2)$ .

Wir nehmen an,  $X$  sei ein metrischer Raum und  $C_c(X, \mathbb{C}) \subset L(X, \mathbb{C})$  für ein abstraktes Integral  $I$  auf  $B(X)$ , und definieren  $\mathcal{L}^2(X, I) = \mathcal{L}^2$  als Teilraum der *messbaren Funktionen*  $M(X, \mathbb{C})$

$$\mathcal{L}^2(X, I) = \left\{ f \in M(X, \mathbb{C}) \mid |f|^2 \in L(X) \right\}.$$

**Lemma 8.1.**  $\mathcal{L}^2$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

**Beweis.**  $M(X, \mathbb{C})$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Daher folgt die Behauptung aus der zweiten obigen Abschätzung mit Hilfe der Eigenschaften 6.18.6 und 6.18.2.  $\square$

Analog zeigt dieses Argument mit Hilfe der ersten trivialen Abschätzung die Aussage:  $\bar{f}g \in L(X)$  für  $f, g \in \mathcal{L}^2$ . Somit definiert

$$\langle f, g \rangle = I(\bar{f} \cdot g)$$

für  $f, g \in \mathcal{L}^2$  eine positiv semidefinite hermitesche Bilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathbb{C}.$$

Wie in Satz 1.7 folgt daraus das nächste Lemma für

$$\|f\| := +\sqrt{\langle f, f \rangle}$$

**Lemma 8.2.**  $\|f\| = 0 \iff$  Träger von  $f$  ist eine Nullmenge.

**Beweis.**  $\Leftarrow$  klar.  $\Rightarrow$ : Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\text{vol}\{x \in X \mid |f|^2 \geq 1/n\} = 0$  wegen der Abschätzung  $\frac{1}{n} \cdot \text{vol}(\cdot) \leq \|f\|^2$  und  $\|f\| = 0$ . Nach Beppo Levi folgt im Limes  $\text{vol}\{x \in X \mid |f| > 0\} = 0$ .  $\square$

Die Nullfunktionen (Funktionen in  $\mathcal{L}^2$ , die ausserhalb einer Nullmenge verschwinden) bilden einen  $\mathbb{C}$ -linearen Untervektorraum von  $\mathcal{L}^2$ . Der Quotientenraum sei  $L^2 = \mathcal{L}^2 / \{\text{Nullfunktionen}\}$ . Die Werte  $\|f\| = \|f\|_{L^2}$  und  $\langle f, g \rangle$  hängen offensichtlich nur von der Äquivalenzklasse von  $f$  und  $g$  in  $L^2$  ab. Aus dem letzten Lemma und dem nächsten Paragraphen folgt daher

**Korollar 8.3.**  $(L^2(X, I), \|\cdot\|_{L^2})$  ist ein Hilbertraum.

**Lemma 8.4.** Es gilt die Schwarzungleichung und die Dreiecksungleichung. Gleichheit wird nur für proportionale Vektoren angenommen.

### 8.3 Satz von Fischer-Riesz

**Satz 8.5.**  $(L^2(X, I), \|\cdot\|_{L^2})$  ist vollständig und damit ein Hilbertraum.

**Beweis.** Alle nun auftretenden Funktionen  $f_n, f, g_n, g$  sind messbar, somit diskutieren wir nur die Integrierbarkeit. Wir müssen zeigen, dass jede Cauchyfolge  $f_n$  in  $L^2(X)$  konvergiert.  
*Präparation.* Durch Übergang zu einer Teilfolge gilt oBdA

$$\|f_n - f_m\|_{L^2} \leq 2^{-\min(n,m)}.$$

*Majorantenfolge.* Wir betrachten die monotone Folge von Hilfsfunktionen  $g_n \in L^2(X)$

$$g_1 = 0, \quad g_n := |f_1| + |f_1 - f_2| + \cdots + |f_n - f_{n-1}| \quad \text{für } n \geq 2$$

und ihren Limes  $g_n \nearrow g$  (mit Werten in  $\mathbb{R}^+$ ). Wir zeigen nun die Beschränktheit von  $I(|g_n|^2)$  und damit  $g \in \mathcal{L}^2$  (wegen Beppo Levi) mit Hilfe der Dreiecksungleichung und unserer Präparation:

$$I(|g_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \|g_n\|_{L^2} \leq \|f_1\|_{L^2} + \sum_{n \geq 2} \|f_n - f_{n-1}\|_{L^2} \leq \|f_1\|_{L^2} + 1 < \infty.$$

*Punktweise Konvergenz.* Wegen  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  punktweise f.ü. (im Komplement der Unendlichkeitsstellen der  $g_n, g$ , die nach Lemma 6.16 eine Nullmenge bilden) ist  $g_n(x) \in \mathbb{R}$  für festes  $x \in X$  eine reelle Cauchyfolge f.ü. Dasselbe gilt für  $f_n(x)$  wegen

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{n+1}^m |f_k(x) - f_{k-1}(x)| = g_m(x) - g_n(x) \quad , \quad m > n.$$

Es existiert daher eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_n \rightarrow f$  punktweise f.ü.

*Majorante.* Aus  $|f_n| \leq |f_1| + \sum_{k=2}^n |f_k - f_{k-1}| \leq g_n \leq g$  für alle  $n \geq 2$  folgt  $|f_n|^2 \leq g^2$  und damit  $|f|^2 \leq g^2$  sowie dann  $|f - f_n|^2 \leq (2g)^2$ . Aus  $M(X) \ni |f - f_n|^2 \leq (2g)^2 \in L(X)$  folgt  $|f - f_n|^2 \in L(X)$  nach Satz 6.18.6. Wegen  $|f_n - f|^2 \rightarrow 0$  punktweise f.ü. und  $L(X) \ni |f - f_n|^2 \leq (2g)^2 \in L(X)$  folgt aus dem Satz 6.11 von der dominierten Konvergenz

$$\lim_n I(|f - f_n|^2) = I(\lim_n |f - f_n|^2) = 0.$$

Dies zeigt  $\lim_n \|f - f_n\|_{L^2} = 0$  und damit unsere Behauptung. □

Wir nehmen für den Rest des Abschnittes an:  $B(X) \cong C_c(X)$ , und für jede Funktion  $h \in B(X)$  und jedes  $\varepsilon > 0$  existiere ein  $g \in C_c(X)$  mit  $I(|h - g|) < \varepsilon$ . (In der Tat gilt in den uns interessierenden Fällen sogar immer  $B(X) = C_c(X)$ .) Unter diesen Annahmen gilt

**Lemma 8.6.**  $C_c(X, \mathbb{C})$  liegt dicht in  $(L^2(X, I), \|\cdot\|_{L^2})$ .

**Beweis.** *Schritt 1.* Nach Beppo Levi gilt  $\lim_n(\min(n, f)) \rightarrow f$  in  $L^2(X)$ . Man kann also  $f$  oBdA durch  $\tilde{f} = \min(n, f)$  ersetzen. Somit ist oBdA  $f$  durch eine Konstante  $C$  nach oben beschränkt, und dann analog auch durch  $-C$  nach unten. Sei also oBdA  $|f| \leq C$ .

*Schritt 2.* Für  $\varepsilon > 0$  existieren nach Definition  $h \in B^-(X)$  und  $h_n \in B(X) = C_c(X)$  mit  $h_n \searrow h$  und  $I(|f - h|) \leq I(|g - h|) < \varepsilon$  so dass für  $n \gg 0$  gilt  $I(|h - h_n|) < \varepsilon$  und damit  $I(|f - h_n|) < 2\varepsilon$ . Dies bleibt richtig, wenn man  $h, h_n$  nach oben und unten bei  $\pm C$  abschneidet. Sei also oBdA  $|h_n| \leq C$  und damit  $I(|f - h_n|) \leq 2C$ . Es folgt

$$\|f - h_n\|_{L^2}^2 = I(|f - h_n|^2) \leq (2C) \cdot I(|f - h_n|) < (2C)2\varepsilon .$$

□

## 8.4 Der Folgenraum $L^2(\mathbb{Z})$

Die Teilmenge  $\mathbb{Z}$  der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  versehen mit der Einschränkung der Euklidischen Metrik hat folgende Eigenschaften: 1) Jede Funktion  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig, und 2) Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{Z}$  ist genau dann kompakt, wenn sie endlich ist. Somit gilt

$$C_c(X, \mathbb{C}) = \{a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid a(n) = 0 \text{ für fast alle } n\} .$$

Offensichtlich definiert daher auf  $C_c(\mathbb{Z})$  die normale (endliche !) Summe

$$I(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)$$

eine  $\mathbb{R}$ -lineare monotone Abbildung  $C_c(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Wegen Satz 3.17 ist damit  $I$  sogar halbstetig, d.h. ein abstraktes Integral auf  $C_c(X)$ . Der Raum der bezüglich  $C_c(\mathbb{Z}), I$  messbaren Funktionen  $M(X, \mathbb{C})$  ist dann der Raum aller Folgen  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , der Raum  $L(X, \mathbb{C})$  ist der Unterraum aller *absolut konvergenten* Folgen. Weiterhin ist die leere Menge die einzige Nullmenge. Daher gilt

$$L^2(X, I) = \{a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a(n)|^2 < \infty\}$$

sowie

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{a(n)} \cdot b(n) .$$

Für  $\nu \in \mathbb{Z}$  definieren wir die Funktionen  $f_\nu \in C_c(\mathbb{Z})$  durch

$$f_\nu(n) = \delta_{\nu n} \quad (\text{Kronecker-Delta}) .$$

Diese haben die Eigenschaften

- $\langle f_\nu, f_\mu \rangle = \delta_{\nu\mu}$  (**Orthogonalität**).
- Für alle  $f \in L^2(\mathbb{Z})$  und für alle  $\varepsilon > 0$  existiert eine endliche  $\mathbb{C}$ -Linearkombination  $g \in C_c(X, \mathbb{C})$  der  $f_\nu$  mit  $\|f - g\|_{L^2} < \varepsilon$  ( **$L^2$ -Dichtigkeit**).

## 8.5 Orthonormalbasen

Wir erinnern: Ein **Hilbertraum**  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist vollständig als metrischer Raum, wobei die Metrik  $d(v, w) = \|v - w\|$  durch das positiv definite hermitesche Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben ist

$$\boxed{\|v\|^2 = \langle v, v \rangle}.$$

**Definition 8.7.** Eine (abzählbare) **Hilbertraum-Basis**<sup>3</sup>  $v_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) eines Hilbertraumes  $H$  ist eine Folge von Vektoren  $v_n \in H$  mit der Eigenschaft

- **Orthonormalität:**  $\langle v_\nu, v_\mu \rangle = \delta_{\nu\mu}$  (Kronecker Delta)
- **$L^2$ -Dichtigkeit:** Für alle  $f \in H$  und für alle  $\varepsilon > 0$  existiert eine endliche  $\mathbb{C}$ -lineare Kombination  $g$  der  $v_\nu$  so dass gilt  $\|f - g\| < \varepsilon$ .

Die erste Eigenschaft impliziert die lineare Unabhängigkeit der Vektoren  $v_\nu$ : Verschwindet  $g = \sum_n a(n)v_n$  (endliche Summe), dann folgt  $a(m) = \langle g, v_m \rangle = 0$  für alle  $m$ .

**Satz 8.8.** Ist  $v_\nu$  eine abzählbare Hilbertraum-Basis eines Hilbertraumes  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , dann induziert  $L^2(\mathbb{Z}) \ni a \mapsto \sum_n a(n) \cdot v_n$  einen isometrischen Isomorphismus von Hilberträumen

$$\boxed{i : L^2(\mathbb{Z}) \cong H} \quad , \quad \boxed{\langle a, b \rangle_{L^2(\mathbb{Z})} = \langle i(a), i(b) \rangle}.$$

Die Umkehrabbildung ordnet einem Vektor  $v \in H$  die Folge  $a(n) = \langle v_n, v \rangle$  in  $L^2(\mathbb{Z})$  zu.

**Beweis.** Wegen der linearen Unabhängigkeit der  $v_n$  ist die Abbildung  $i$  auf dem Teilraum  $C_c(\mathbb{Z}) \subseteq L^2(\mathbb{Z})$  wohldefiniert (fast alle  $a(n)$  sind Null) und es gilt wegen der Orthonormalität

$$\|i(a)\|^2 = \left\langle \sum_n a(n) \cdot v_n, \sum_m a(m) \cdot v_m \right\rangle = \sum_n |a(n)|^2 = \|a\|_{L^2(\mathbb{Z})}^2.$$

$C_c(\mathbb{Z})$  liegt dicht in  $L^2(\mathbb{Z})$ . Wegen der Isometrieeigenschaft lässt sich daher die Abbildung  $i$  durch Limesbildung auf ganz  $L^2(\mathbb{Z})$  wohldefiniert fortsetzen: Für  $a \in L^2(\mathbb{Z})$  wähle  $a_n \rightarrow a$  im  $L^2$ -Sinn mit  $a_n \in C_c(\mathbb{Z})$ . Dann ist  $i(a_n)$  eine Cauchyfolge in  $H$  wegen  $\|i(a_n) - i(a_m)\| = \|i(a_n - a_m)\| = \|a_n - a_m\|$ . Ihr Grenzwert sei  $i(a)$ .

Man sieht aus der Definition sofort, dass  $i$  linear ist [ $i(a+b) := \lim_n i(a_n+b_n) = \lim_n i(a_n) + \lim_n i(b_n) = i(a) + i(b)$  für  $L^2$ -konvergente Folgen  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ .] Es gilt  $\|i(a)\| = \lim_n \|i(a_n)\| = \lim_n \|a_n\| = \|a\|$ . Somit ist  $i$  injektiv:  $i(a) = 0 \implies \|a\| = \|i(a)\| = 0 \implies a = 0$ . Ausserdem folgt, daß das Bild  $B := i(L^2(\mathbb{Z}))$  abgeschlossen in  $H$  ist. [Sei  $B \ni v_n \rightarrow v$  eine konvergente Folge und sei  $v_n = i(w_n)$ . Dann definiert  $w_n$  wegen  $\|v_n - v_m\| = \|i(w_n) - i(w_m)\| = \|i(w_n - w_m)\| = \|w_n - w_m\|$  eine Cauchy Folge, welche wegen der Vollständigkeit konvergiert:  $w_n \rightarrow w$ . Es folgt dann sofort mittels des Diagonalfolgentricks  $i(w) = v$ .]

<sup>3</sup>Es handelt sich hierbei nicht um eine Basis im Sinne der Linearen Algebra.

Wegen der Dichtigkeits-Annahme enthält das Bild  $B$  einen dichten Teilraum. Für  $f \in H$  existiert also ein  $g \in B$  mit  $\|f - g\| < \varepsilon$ . Somit gibt es eine Folge von  $g_n \in B$  welche gegen  $f$  konvergiert. Da  $B$  abgeschlossen ist, folgt  $f \in B$ . Daher ist  $i$  surjektiv.  $\square$

**Korollar 8.9.** Ist  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  eine (abzählbare) Hilbertraum-Basis eines Hilbertraumes  $V$ , dann gilt für jedes  $v \in V$  (die Summe ist definiert im Sinne der Hilbertraum-Konvergenz)

$$v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle v_n, v \rangle \cdot v_n .$$

*Bemerkung.* Physiker schreiben dies symbolisch oft in der Form  $|v\rangle = \sum_{n \in I} |v_n\rangle \cdot \langle v_n|v\rangle$ .

## 8.6 Fourier Reihen

Mittels der Parametrisierung  $t \mapsto \exp(2\pi it)$  entsprechen Funktionen  $g$  auf dem Einheitskreis  $X = S^1$  periodischen Funktionen  $f(t) = g(\exp(2\pi it))$  auf  $\mathbb{R}$  mit der Periode 1 und umgekehrt. Der Raum  $C_c(X, \mathbb{C}) = C(X, \mathbb{C})$  kann dabei mit dem Raum der **periodischen** stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Periode  $f(t+1) = f(t)$  identifiziert werden. Das Integral

$$I(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

definiert ein Daniell-Integral auf  $C_c(X)$ . Sei  $I$  das zugehörige Lebesgue Integral. In diesem Sinne gilt

$$L^2(S^1, I) \cong L^2([0, 1], \mathbb{C}) \cong L^2_{\text{periodisch}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) .$$

**Satz 8.10.** Die Funktionen  $\chi_n(t) = \exp(2\pi int)$  definieren eine Hilbertraum-Basis von  $L^2(S^1, I)$ . Das heisst: Jede Funktion  $f \in L^2(S^1)$  schreibt sich als  $L^2$ -Limes

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) \exp(2\pi int)$$

mit den **Fourierkoeffizienten**

$$a(n) = \int_0^1 f(t) \exp(-2\pi int) dt$$

und es gilt die **Plancherel Formel**

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a(n)|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt = \|f\|_{L^2}^2 < \infty .$$

Die Fourierreihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) \exp(2\pi int)$  konvergiert **punktweise** gegen  $f(t)$  für alle Funktionen  $f \in C^2([0, 1], \mathbb{C})$  mit der Eigenschaft  $f(0) = f(1)$  und  $f'(0) = f'(1)$ .

**Beweis.** Nach 8.5 genügt es zu zeigen, dass die Funktionen  $\chi_n(t) = \exp(2\pi int)$  für  $n \in \mathbb{Z}$  eine Hilbertraumbasis von  $L^2(S^1, I)$  bilden. Die Plancherel Formel folgt dann aus der Existenz des isometrischen Isomorphismus  $i : L^2(\mathbb{Z}) \cong L^2(S^1, I)$  nach Satz 8.8.

## 8 Hilberträume

*Orthonormalität.*

$$\langle \chi_n, \chi_m \rangle = \int_0^1 \exp(2\pi ikt) dt$$

für  $k = m - n$ . Für  $k = 0$  ist das Integral 1, und für  $k \neq 0$  gleich  $(2\pi ik)^{-1} \exp(2\pi ikt)|_0^1 = 0$ .

*Dichtigkeit.* Der von endlichen Linearkombinationen  $g(t)$  der Funktionen  $\chi_n(t)$  aufgespannte  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum definiert wegen  $\chi_n(t) \cdot \chi_m(t) = \chi_{n+m}(t)$  eine  $\mathbb{C}$ -Algebra  $A$  in  $C(X, \mathbb{C})$ . Offensichtlich trennt die Funktion  $\chi_1(t) = \exp(2\pi it)$  die Punkte von  $S^1$  im Sinne von Abschnitt 8.7. Also gibt es für jede Funktion  $f \in C(X, \mathbb{C})$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $g \in A$  mit

$$\|f - g\|_{L^2}^2 \leq \text{vol}(S^1) \cdot \sup_{t \in S^1} |f(t) - g(t)|^2 < \varepsilon$$

wegen des Satzes von Stone-Weierstraß (nächster Paragraph). Andererseits liegt  $C(X, \mathbb{C})$  dicht in  $L^2(X, \mathbb{C})$  nach Abschnitt 8.6, und damit liegt auch  $A$  dicht in  $L^2(X, \mathbb{C})$ .

*Punktweise Konvergenz.* Beachte  $|\exp(2\pi int)| = 1$  für  $t \in [0, 1]$ . Wegen  $f \in C^2([0, 1], \mathbb{C})$  und  $f(0) = f(1)$  sowie  $f'(0) = f'(1)$  folgt durch zweimalige partielle Integration

$$a(n) = \int_0^1 f(t) \exp(-2\pi int) dt = \frac{1}{-4\pi^2 n^2} \int_0^1 f''(t) \exp(-2\pi int) dt.$$

Also  $|a(n)| \leq \frac{C}{n^2}$  für eine Konstante  $C$ , da die stetige Funktion  $f''(t)$  auf dem Kompaktum  $[0, 1]$  beschränkt ist. Wegen  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} < +\infty$  konvergiert  $g(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi int)$  absolut und gleichmäßig auf  $[0, 1]$ , definiert also nach Satz 2.24 eine stetige Funktion auf  $[0, 1]$ . Aus Schritt 1 (Übergang zu einer Teilreihe!) und dann Schritt 2 und 3 im Beweis des Satzes von Fischer-Riesz folgt, daß die Fourier Reihe punktweise (fü.) gegen  $f(x)$  konvergiert. Daher sind  $f(x)$  und  $g(x)$  fast überall gleich. Da beide Funktionen stetig sind, folgt aus dem nächsten Lemma  $f(x) = g(x)$ .  $\square$

**Lemma 8.11.** *Ist  $h$  stetig auf  $[0, 1]$  und gilt  $\|h\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |h(t)|^2 dt = 0$ , dann ist  $h = 0$ .*

**Beweis.** Wäre  $h(t_0) \neq 0$ , gäbe es wegen der Stetigkeit ein  $\delta > 0$  mit  $|h(t)| > \frac{1}{2}|h(t_0)|$  für  $|t - t_0| < \delta$ . Ein Widerspruch wegen  $I(|h|^2) \geq \frac{1}{4}|h(t_0)|^2 \cdot I(\chi_{[-\delta+t_0, t_0+\delta]}) > 0$ .  $\square$

**Warnung.** Für  $f(x) = x - \frac{1}{2}$  und  $a_\nu = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) \exp(-2\pi i\nu t) dt$  gilt  $a_0 = 0$ , und mittels partieller Integration zeigt man  $a_\nu = (t - \frac{1}{2}) \frac{\exp(-2\pi i\nu t)}{-2\pi i\nu} \Big|_0^1 = \frac{-1}{2\pi i\nu}$ . Es folgt für  $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\sin(2\pi\nu x)}{\pi\nu} \longrightarrow f(x) = x - \frac{1}{2}$$

im  $L^2$ -Sinn wegen  $f \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$ . Beachte  $f(0) \neq f(1)$ . Tatsächlich konvergiert die Reihe aber *nicht* punktweise. Im Punkt  $x = 0$  ist der Fourier-Limes Null, aber es gilt  $f(0) = -1/2$ .

## 8.7 Stone-Weierstraß

Zur Erinnerung: Ein **Verband**  $B$  auf  $X$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum von Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $f(x) \in B \implies |f(x)| \in B$ . Wegen  $\max/\min(f, 0) = \frac{1}{2}(f \pm |f|)$  sowie  $\max/\min(f, g) = g + \max/\min(f - g, 0)$  ist  $B$  unter der Bildung endlicher Minima und Maxima abgeschlossen.

**Beispiel.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $K \subseteq X$  eine Teilmenge. Ist  $B$  ein Verband auf  $X$ , dann bilden die Funktionen  $B_K \subseteq B$  mit Träger in  $K$  wieder einen Verband.

Sei  $K \subseteq X$ , und  $B$  ein Verband auf  $X$  mit folgender Eigenschaft der **Punktetrennung** (\*):

- Für je zwei Punkte  $x \neq y$  in  $K$  und reelle Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  gibt es eine Funktion  $f_{x,y} \in B_K$  mit der Eigenschaft  $f_{x,y}(x) = a$  und  $f_{x,y}(y) = b$ , so daß  $f_{x,y}$  stetig ist in einer Umgebung von  $x$  und  $y$ .

Ist  $B$  in  $C(X)$  enthalten, ist natürlich  $f_{x,y}$  automatisch stetig auf ganz  $X$ .

**Satz 8.12.** Sei  $K$  kompakt in  $X$ ,  $B$  ein Verband auf  $X$  mit der Eigenschaft (\*) und sei  $g$  eine stetige Funktion auf  $X$  mit Träger in  $K$ . Dann existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  eine beschränkte Funktion  $f \in B_K$  mit  $\|g - f\| < \varepsilon$ . Ist  $g \geq 0$ , kann  $f \geq 0$  gewählt werden.

Zum Beweis dieses Satzes benutzen wir die folgende nichttriviale Aussage (siehe Satz 11.4) von Heine-Borel: Für folgenkompakte metrische Räume  $X$  gilt: Sei  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine Überdeckung durch offene Teilmengen  $U_i$  von  $X$ , dann existiert eine endliche Teilmenge  $J \subset I$  mit der Eigenschaft  $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ .

**Beweis.** Für  $x \neq y \in K$  existiert ein  $f_{x,y} \in B_K$  mit  $f_{x,y}(x) = g(x)$  und  $f_{x,y}(y) = g(y)$ . Für festes  $x$  existiert zu jedem  $y$  eine offene Umgebung  $V(y)$  mit  $\sup_{y' \in V(y)} |f_{x,y}(y') - g(y')| < \varepsilon$ , da  $g$  und  $f_{x,y}$  bei  $y$  stetig sind. Endlich viele  $V(y_1), \dots, V(y_m)$  der  $V(y)$  überdecken  $K$ . Das Infimum  $f_x := \inf(f_{x,y_1}, \dots, f_{x,y_m})$  ist in  $B_K$  (wegen der Verbandseigenschaft) und stetig in einer Umgebung von  $x$  mit

$$f_x(x) = g(x) \quad , \quad f_x(y) < g(y) + \varepsilon \quad (\forall y \in K) .$$

Für jedes  $x \in K$  gibt es analog eine offene Umgebung  $U(x)$  mit  $\sup_{x' \in U(x)} |g(x') - f_x(x')| < \varepsilon$ . Endlich viele  $U(x_1), \dots, U(x_n)$  überdecken  $K$ . Für  $f = \sup(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) \in B_K$  folgt

$$f(x) > g(x) - \varepsilon \quad , \quad f(y) < g(y) + \varepsilon \quad (\forall x, y \in K) ,$$

also  $d_\infty(f, g) < \varepsilon$ . Ersetze  $f$  durch  $\max(f, 0)$  im Fall  $g = \max(g, 0) \geq 0$ . □

**Satz 8.13 (Stone-Weierstraß).** Sei  $X$  folgenkompakt und  $A \subseteq C(X)$  eine  $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von  $C(X)$  mit 1. Existiert für jedes Paar  $x \neq y$  in  $X$  ein  $f \in A$  mit  $f(x) \neq f(y)$ , dann liegt  $A$  dicht in  $C(X)$ . (Im Fall  $A \subseteq C(X, \mathbb{C})$  fordert man noch  $f \in A \implies i \cdot f \in A$  und  $\bar{f} \in A$ ).

<sup>4</sup>siehe Abschnitt 2.7

**Beweis.** Der Abschluß  $\overline{A}$  von  $A$  in  $C(X)$  ist wieder eine Algebra und enthält  $A$ , ist also punktstetig. OBDa ist daher  $A$  abgeschlossen in  $C(X)$ . Wegen Satz 8.12 genügt es zu zeigen:  $A$  ist ein Verband, d.h.  $f \in A \implies |f| \in A$ . Also genügt es aus  $0 \leq h = f^2 \in A$  eine positive Wurzel  $\sqrt{h} \in A$  ziehen zu können. Im Fall  $0 < c_1 \leq h \leq c_2 < 1$  ist  $h = 1 - g$  mit  $\|g\|_\infty < 1$ , so daß nach Lemma 4.40 die Potenzreihe  $\sqrt{h} = 1 - \frac{1}{2}g - \frac{1}{8}g^2 + \dots$  in  $A \subseteq C(X)$  konvergiert. Ersetzt man also die beschränkte Funktion  $h$  durch  $c \cdot (h + d)$  für kleine positive Konstanten  $c, d$ , kann man daraus in  $A$  die Wurzel ziehen. Da  $c$  eine Wurzel besitzt, folgt  $\sqrt{h + d} \in A$ . Im Limes  $d \rightarrow 0$  folgt  $\sqrt{h} \in A$ .  $\square$

## 8.8 Fourier Transformation

Eine **Schwartz-Funktion**  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine unendlich oft differenzbare Funktion auf  $\mathbb{R}^N$ , so daß für jede Ableitung  $f^{(n)}(x)$  von  $f(x)$  und jedes Polynom  $P(x)$  eine von  $n$  und  $P(x)$  abhängige Konstante  $C = C(n, P(x))$  existiert mit

$$|P(x) \cdot f^{(n)}(x)| \leq C.$$

Sei  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  der Raum der Schwartz-Funktionen, und kurz  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Beispiel 8.14.** Die **Gauß-Funktionen**  $f(x) = \exp(-ax^2 - bx - c)$  für  $b, c \in \mathbb{C}$  und reellem Exponenten  $a > 0$  liegen in  $\mathcal{S}$ .

Der Raum der Schwartz-Funktionen  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum von  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . Für Schwartz-Funktionen  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  und  $y \in \mathbb{R}^N$  ist die **Fourier Transformierte**  $\mathcal{F}f$  erklärt durch

$$(\mathcal{F}f)(y) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \cdot \exp(2\pi i x \cdot y) dx.$$

Da  $f(x) \cdot \exp(2\pi i x \cdot y)$  stetig in  $x$  und damit messbar ist, existiert das Integral nach Satz 6.18.6 auf Grund der Existenz einer auf  $\mathbb{R}^N$  integrierbaren Majorante, denn  $|f(x) \cdot \exp(2\pi i x y)| = |f(x)| \leq g(x) := \min(c_0, \frac{c_1}{\|x\|^{N+1}})$  mit  $g \in L(\mathbb{R}^N)$ . [Setze  $c_0 = C(0, 1)$  und  $c_1 = C(0, r^{2(N+1)})$ .] Insbesondere ist daher  $(\mathcal{F}f)(y)$  eine durch  $const := \int_{\mathbb{R}^N} g(x) dx < +\infty$  beschränkte Funktion der Variable  $y$ . Es gilt  $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ . Der Einfachheit halber sei nun  $N = 1$ .

**Lemma 8.15.** 1.  $\mathcal{F}$  definiert eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .

2.  $\mathcal{F}$  bildet dabei  $x^n \cdot f(x)$ , für  $f \in \mathcal{S}$ , ab auf  $(\frac{\partial y}{\partial x})^n (\mathcal{F}f)(y)$ .

3.  $\mathcal{F}$  bildet  $(\frac{\partial x}{\partial y})^n f(x)$ , für  $f \in \mathcal{S}$ , ab auf  $(-y)^n \cdot (\mathcal{F}f)(y)$ .

4. Es gilt  $\mathcal{F}f = f$  für  $f(x) = \exp(-\pi x^2)$ .

**Beweis.** Wegen  $\mathcal{F}(x^n f(x))(y) = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) \exp(2\pi i x y) dx = \int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial y}{\partial x})^n f(x) \exp(2\pi i x y) dx$  folgt Aussage 2 aus Satz 4.32 [verifiziere die Voraussetzungen!]. Durch partielle Integration folgt Aussage 3. Daraus folgt  $|P(-y)(\frac{\partial y}{\partial x})^n \mathcal{F}f(y)| = |\mathcal{F}(P(\frac{\partial x}{\partial y})^n f(x))(y)| \leq const$ , und dies zeigt  $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$  für  $f \in \mathcal{S}$  und damit Aussage 1.

Aussage 4 ist am schwierigsten: Mit Hilfe des Hauptsatzes und Satz 4.32 zeigt man zuerst, daß  $c(y) = \exp(\pi y^2) \cdot \mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi(x-iy)^2) dx$  konstant als Funktion von  $y$  ist, denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}c(y) &= \frac{d}{dy} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x-iy)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy} e^{-\pi(x-iy)^2} dx = 2\pi i \int_{\mathbb{R}} (x-iy)e^{-\pi(x-iy)^2} dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} e^{-\pi(x-iy)^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} -ie^{-\pi(x-iy)^2} \Big|_{-n}^{+n} = 0. \end{aligned}$$

Aus der Substitutionsregel und dem Satz von Fubini folgt dann für  $c = c(0)$

$$c^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[\varepsilon, N]} \int_0^{2\pi} e^{-\pi r^2} r dr d\theta = \frac{-e^{-x}}{2\pi} \Big|_0^\infty \cdot 2\pi = 1.$$

Wegen  $c \geq 0$  gilt daher  $c = 1$ . Es folgt  $(\mathcal{F}f)(y) = \exp(-\pi y^2)$  sowie

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1}.$$

□

Die **Gauß-Funktionen**  $\exp(-ax^2 - bx - c)$  für  $b, c \in \mathbb{C}$  mit reellen **Exponenten**  $a > \pi$  spannen einen  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum  $\mathcal{G}$  von  $\mathcal{S}$  auf.

**Lemma 8.16.**  $\mathcal{G}$  (und damit  $\mathcal{S}$ ) liegt dicht in  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Beweis.** Wegen Satz 8.13, Lemma 5.31 sowie Lemma 8.6 liegt  $C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dicht<sup>5</sup> in  $L^2(\mathbb{R})$ . Es genügt daher Funktionen  $\tilde{f}(x) \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  durch Funktionen  $\tilde{g}_m \in \mathcal{G}$  in der  $L^2$ -Norm zu approximieren. Fixiere  $\tilde{f}(x) \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  und  $\varepsilon > 0$ ; fixiere dann ein  $t_0 = t_0(\tilde{f}) \geq 1$  und ein  $x_0$  mit  $|x_0| < \frac{1}{2}$  derart daß der Träger von  $f(x) = \tilde{f}(t_0 x)$  in  $[-x_0, x_0] \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  liegt. Wir benutzen dann: Approximationen von  $\tilde{f}(x)$  durch Funktionen  $\tilde{g}_m(x)$  in  $\mathcal{G}$  (d.h. mit **Exponenten**  $> \pi$ ) entsprechen Approximationen von  $f(x)$  durch Summen  $g_m(x) = \tilde{g}_m(t_0 x)$  von Gaußfunktionen mit **Exponenten**  $> t_0^2 \cdot \pi$  vermöge  $t_0^{1/2} \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\tilde{f} - \tilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ . Für

$$h(x) := e^{tx^2} \cdot f(x) \quad , \quad t \geq t_0^2 \cdot \pi$$

gilt  $\text{supp}(h) \subseteq [-x_0, x_0]$  und  $h(x) \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Wegen  $h^{(\nu)}(-1/2) = h^{(\nu)}(1/2) = 0$  für  $\nu = 0, 1$  konvergiert daher auf  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  die Fourierentwicklung  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{2\pi i n x} \rightarrow h(x)$  gleichmässig (Satz 8.10). Wegen  $\exp(-tx^2) \leq 1$  konvergiert auf  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  dann ebenfalls

$$g_m(x) = e^{-tx^2} \cdot p_m(x) = \sum_{|n| \leq m} a(n) e^{-tx^2 + 2\pi i n x} \rightarrow f(x) = e^{-tx^2} \cdot h(x)$$

gleichmässig gegen  $f(x)$ . Es folgt für  $m \geq m_0(\varepsilon, t_0, t)$

$$t_0 \int_{|x| \leq \frac{1}{2}} |f(x) - g_m(x)|^2 dx < \varepsilon^2/2.$$

<sup>5</sup>Allgemeinen liegen Produkte  $\prod_{i=1}^N f_i(x_i)$  von Gaußfunktionen  $f_i(x_i)$  dicht in  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . Man reduziert diese Aussage leicht auf den hier behandelten Fall  $N = 1$ , da nach Satz 8.12 der Verband aller Produkte  $\prod_{i=1}^N f_i(x_i)$  mit  $f_i \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dicht in  $C_c(\mathbb{R}^N)$  liegt.

## 8 Hilberträume

Im Bereich  $\frac{1}{2} \leq |x|$  ist  $f(x) = 0$ . Also lässt sich  $\int_{\frac{1}{2} \leq |x|} |f - g_m|^2 dx = \int_{\frac{1}{2} \leq |x|} |g_m(x)|^2 dx$  durch  $2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \exp(-2t(\frac{2\nu+1}{2})^2) \cdot \int_{-1/2}^{1/2} |p_m(x)|^2 dx$  abschätzen, da  $|p_m(x)|^2$  periodisch ist und  $e^{-2tx^2}$  monoton fallend ist. Wegen  $\int_{-1/2}^{1/2} |p_m(x)|^2 dx = \sum_{|n| \leq m} |a_n|^2 \leq \|h\|_{L^2([-1/2, 1/2])}^2 \leq C_1 e^{2tx_0^2}$  (Plancherelformel) und  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \exp(-t(\frac{2\nu+1}{2})^2) \leq \exp(-\frac{t}{2}) / (1 - \exp(-\frac{t}{2})) \leq C_2 \exp(-\frac{t}{2})$  für genügend große  $t$ , folgt daher aus  $x_0^2 < 1/4$  für  $t \geq \max(t_0(\varepsilon), t_0^2 \cdot \pi)$

$$t_0 \int_{\frac{1}{2} \leq |x|} |f(x) - g_m(x)|^2 dx \leq t_0 C_1 C_2 \cdot e^{2t(x_0^2 - \frac{1}{4})} < \varepsilon^2 / 2.$$

Zusammen mit der Abschätzung für  $|x| \leq \frac{1}{2}$  folgt für genügend großes  $t = t(\varepsilon)$

$$t_0^{1/2} \|f - g_m\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon \quad \text{für} \quad m \geq m_0(\varepsilon, t_0, t).$$

Die durch  $g_m(x) = \tilde{g}_m(t_0 x)$  definierten Funktionen  $\tilde{g}_m$  liegen dann nach Konstruktion in  $\mathcal{G}$  und approximieren  $\tilde{f}(x)$  in der  $L^2$ -Metrik:  $\|\tilde{f} - \tilde{g}_m\|_{L^2(\mathbb{R})} = t_0^{1/2} \|f - g_m\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon$ .  $\square$

**Lemma 8.17.** *Der von den  $\mathbb{C}$ -linear unabhängigen Funktionen  $x^n \cdot \exp(-\pi x^2)$  für natürliche  $n \in \mathbb{N}_0$  aufgespannte  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathcal{H}$  liegt dicht in  $L^2(\mathbb{R})$ .*

**Beweis.** Punktweise Konvergenz  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  bzw.  $f(x) - f_n(x) \rightarrow 0$  auf  $\mathbb{R}$  für  $f, f_n$  in  $L^2(\mathbb{R})$  zusammen mit  $|f - f_n|^2 \leq F$  für ein  $F \in L(\mathbb{R})$  impliziert nach Satz 6.11

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

*Schritt 1.*  $f_n(x) = Q_n(x) \cdot \exp(-\alpha x^2) := \exp(-\alpha x^2) P(x) \sum_{m=0}^{m=n} \frac{(-1)^m}{m!} (\rho x^2 + bx + c)^m$  konvergiert wegen Satz 4.42 punktweise auf  $\mathbb{R}$  gegen  $f(x) := P(x) \exp(-ax^2 - bx - c)$  für

$$a = \alpha + \rho.$$

Es gilt  $|f - f_n|^2 \leq |P(x)|^2 \exp(-2\alpha x^2) \exp(2(\rho x^2 + |b||x| + |c|)) = F(x)$ . Wegen  $a > \pi$  ist die Majorante  $F(x) := |P(x)|^2 \exp(-\lambda x^2 + 2|b||x| + 2|c|)$  mit  $\lambda = 2(a - 2\rho)$  in  $L(\mathbb{R})$  für alle  $0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}$ . Die Funktionen  $f_n(x) = Q_n(x) \cdot \exp(-\alpha x^2)$  approximieren in diesem Fall nach Satz 6.11 im  $L^2$ -Sinn die Funktion  $f(x) = P(x) \cdot \exp(-ax^2 - bx - c)$ , d.h.

$$\|f - f_n\|_{L^2}^2 < \varepsilon^2 \quad \text{für} \quad n \geq n_0(\varepsilon).$$

*Schritt 2.* Nach Lemma 8.16 liegt der Aufspann der Funktionen  $f(x) = P(x) \cdot e^{-ax^2 - bx - c}$  mit  $b, c \in \mathbb{C}$  und reellem Exponent  $a > \pi$  und Polynomen  $P(x)$  dicht in  $L^2(\mathbb{R})$ . Wendet man Schritt 1 sukzessive auf die approximierenden Funktionen  $f(x) = P(x) \cdot e^{-ax^2 - bx - c}$  an, kann man den Exponent  $a > \pi$  um  $\rho$  auf  $\alpha = a - \rho$  verkleinern; wähle  $0 \leq \rho \leq \min(\frac{\pi}{2}, a - \pi)$ . Nach endlich vielen Schritten folgt, daß alle Exponenten gleich  $\alpha = \pi$  gewählt werden können. Mit anderen Worten: Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein komplexes Polynom  $Q(x)$  mit

$$\|P(x) \cdot e^{-ax^2 - bx - c} - Q(x) \cdot e^{-\pi x^2}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Das heisst, die Funktionen  $Q(x) \cdot \exp(-\pi x^2)$  für Polynome  $Q(x)$  liegen dicht in  $L^2(X)$ .

*Schritt 3.* Die Funktionen  $x^n e^{-\pi x^2}$  sind  $\mathbb{C}$ -linear unabhängig, da Monome  $\mathbb{C}$ -linear unabhängig sind (Lemma 4.39), und bilden eine Basis des von den  $Q(x) \cdot \exp(-\pi x^2)$  für Polynome  $Q(X)$  aufgespannten Vektorraums.  $\square$

Fourier Transformation erhält die Teilräume  $V_N = \bigoplus_{n=0}^N \mathbb{C}x^n \cdot e^{-\pi x^2}$  wegen Lemma 8.15. Mittels Induktion nach  $n$  zeigt man durch orthogonale Projektion (**Gram-Schmidt**): Es gibt Polynome  $H_n(x)$  vom Grad  $n$  mit der Eigenschaft: 1) Die Funktionen  $f_n(x) = H_n(x)e^{-\pi x^2}$  bilden eine ON-Basis des Hilbertraums. 2) Die  $f_n(x)$  für  $n = 0, \dots, N$  definieren eine Basis von

$$V_N = \bigoplus_{n=0}^N \mathbb{C} \cdot x^n e^{-\pi x^2} .$$

Die dadurch eindeutig bestimmten Polynome  $H_n(x)$  mit positivem reellem höchstem Koeffizienten sind die sogenannten **Hermiteischen Polynome**. In der Tat gilt bis auf geeignete Normierungskonstanten  $c(n) \in \mathbb{R}$

$$H_n(x) := c(n) \cdot e^{2\pi x^2} \partial_x^n (e^{-2\pi x^2}) ,$$

denn  $\int_{\mathbb{R}} \overline{P(x)} \exp(-\pi x^2) \cdot H_n(x) \exp(-\pi x^2) dx = 0$  und  $\int_{\mathbb{R}} \overline{P(x)} c(n) (\partial_x^n \exp(-2\pi x^2)) dx = 0$  für alle Polynome  $P(x)$  vom Grad  $\leq n - 1$  (für letzteres benutze partielle Integration!). Also liegen  $e^{\pi x^2} \partial_x^n (e^{-2\pi x^2})$  und  $H_n(x)e^{-\pi x^2}$  in  $V_n$  und sind orthogonal zu dem Unterraum  $V_{n-1}$  von  $V_n$  der Kodimension 1, und damit proportional.

Aus der obigen expliziten Formel für  $H_n(x)$  folgt  $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ .

**Satz 8.18.** Die Funktionen  $f_n(x) = H_n(x) \exp(-\pi x^2) \in \mathcal{S}$  sind Eigenfunktionen der Fourier Transformation  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  zu den Eigenwerten  $i^n$  und definieren eine ON-Basis des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R})$ . Die Fourier Transformation lässt sich daher eindeutig fortsetzen zu einer **unitären  $\mathbb{C}$ -linearen Transformation des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R})$**

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \cong L^2(\mathbb{R}) \quad , \quad (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) = (f, g) .$$

**Beweis.**  $(\mathcal{F}f_n)(y) = c(n) \int_{\mathbb{R}} e^{\pi x^2 + 2\pi ixy} \partial_x^n e^{-2\pi x^2} dx = c(n) e^{\pi y^2} \int_{\mathbb{R}} e^{\pi(x+iy)^2} \partial_x^n e^{-2\pi x^2} dx$  ist wegen partieller Integration dasselbe wie  $c(n) e^{\pi y^2} (-1)^n i^{-n} (\partial_y)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi x^2} e^{\pi(x+iy)^2} dx$ , und wie  $i^n c(n) e^{\pi y^2} \partial_y^n e^{-\pi y^2} (\mathcal{F}f_0)(y) = i^n f_n(y)$ . Daher ist  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Isometrie. Diese kann man auf ganz  $L^2(\mathbb{R})$  fortsetzen: Für  $v \in L^2(\mathbb{R})$  existiert eine Folge  $v_n$  aus  $\mathcal{H}$ , welche gegen  $v$  konvergiert. Da  $v_n$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}$  ist, ist  $\mathcal{F}(v_n)$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{H}$ , denn  $\mathcal{F}$  ist auf  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}$  definiert und eine Isometrie! Setze  $\mathcal{F}(v) := \lim_n \mathcal{F}(v_n)$ . Man zeigt nun leicht, dass  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  wohldefiniert,  $\mathbb{C}$ -linear und eine Isometrie ist.  $\square$

**Korollar 8.19 (Fourier Inversion).** Für alle  $f$  in  $L^2(\mathbb{R})$  gilt

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x) .$$

Wir bemerken:  $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$  gilt für alle Basisfunktionen  $f(x) = H_n(x)e^{-\pi x^2}$  von  $\mathcal{H}$  und somit dann auch für beliebiges  $f \in L^2(\mathbb{R})$  (zumindestens fast überall auf  $X = \mathbb{R}$ ). Ist  $f$  und damit auch  $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x)$  in  $\mathcal{S}$ , stimmen daher  $f(-x)$  und  $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x)$  als stetige Funktionen in allen Punkten  $x \in \mathbb{R}$  überein. Es folgt

**Korollar 8.20 (Fourier Inversion).** Für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt

$$\boxed{f(x) = (\mathcal{F}g)(-x) = \int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-2\pi i y x} dy} \quad \text{für} \quad \boxed{g(y) = (\mathcal{F}f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi i y x} dx}.$$

Die Aussagen und Argumente übertragen sich verbatim auf den  $N$ -dimensionalen Fall.

## 8.9 Der harmonische Oszillator

Die von uns konstruierte ON-Basis des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R})$  ist definiert durch

$$f_n(x) = H_n(x)e^{-\pi x^2} = c(n) \cdot e^{\pi x^2} (e^{\pi x^2} \partial_x e^{-\pi x^2})^n (e^{-\pi x^2}) = c(n) \cdot A_+^n (e^{-\pi x^2}).$$

Hierbei ist  $A_+$  der Differentialoperator  $A_+ := e^{\pi x^2} \partial_x e^{-\pi x^2} = \partial_x - 2\pi x = X + iY$  mit den Abkürzungen  $X = \partial_x$  und  $Y = 2\pi i x$ . Ist analog  $A_- := X - iY$ , wird  $f_0(x) = e^{-\pi x^2}$  von  $A_-$  annulliert, wobei die Gleichung  $A_-(f(x)) = \partial_x f(x) - 2\pi x f(x) = 0$  die Funktion  $f_0(x)$  bis auf eine Normierungskonstante  $c$  eindeutig bestimmt (Satz 4.18).

$[A_+, A_-] = (X + iY)(X - iY) - (X - iY)(X + iY) = -2[X, iY] = 4\pi[\partial_x, x] = 4\pi$  zeigt, daß  $A_-(A_+^n) - (A_+)^n A_- = [A_-, A_+]A_+^{n-1} + A_+[A_-, A_+]A_+^{n-2} + \dots + A_+^{n-1}[A_-, A_+]$  gleich  $-4\pi n \cdot A_+^{n-1}$  ist, und  $A_+ A_- f_n(x) = c(n) A_+ A_- A_+^n(x) f_0(x) = -4\pi n c(n) A_+^n f_0(x) = -4\pi n \cdot f_n(x)$ . Also sind alle  $f_n(x)$  Eigenfunktionen des Operators  $A_+ A_-$

$$(A_+ A_-) f_n(x) = -4\pi n \cdot f_n(x).$$

**Lemma 8.21.** Für  $n = 0, 1, 2, \dots$  gilt  $\boxed{c(n)^2 = \frac{c(0)^2}{(4\pi)^n n!}}$ .

**Beweis.** Offensichtlich gilt  $A_+ f_n(x) = c_n \cdot f_{n+1}(x)$  für gewisse andere Konstanten  $c_n$  mit  $c_n^2 = \|c_n f_{n+1}\|^2 = \|A_+ f_n\|^2$ . Partielle Integration zeigt  $\|A_+ f_n\|^2 = -\langle f_n(x), A_- A_+ f_n(x) \rangle$ . Benutzt man  $A_- A_+ = -4\pi + A_+ A_-$ , folgt  $c_n^2 = -\langle f_n(x), -4\pi(n+1)f_n(x) \rangle = 4\pi(n+1)$ . Wegen  $c_n \cdot c(n) = c(n+1)$  ergibt sich dann die Behauptung durch Induktion nach  $n$ .  $\square$

Der Operator  $\frac{1}{2}(A_+ A_- + A_- A_+) = A_+ A_- - 2\pi$  entspricht bis auf den Faktor  $(2\pi i)^2$  dem Operator  $(\partial_x - 2\pi x)(\partial_x + 2\pi x) - 2\pi = \partial_x^2 + (2\pi i x)^2 = X^2 + Y^2$ . Es folgt<sup>6</sup>

$$\boxed{\frac{1}{2}(X^2 + Y^2) f_n(x) = -2\pi(n + \frac{1}{2}) \cdot f_n(x)}.$$

<sup>6</sup>Wir bemerken, der Operator  $\frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$  ist bis auf Normierungen der **Hamilton Operator** des quantenmechanischen harmonischen Oszillators. Zur Erinnerung  $\frac{X}{2\pi i} = h \cdot \frac{1}{2\pi i} \partial_x$  entspricht dem Impulsoperator  $p$  und  $\frac{Y}{2\pi i} = x$  dem Ortsoperator  $q$  (bei uns ist  $h = 1$ ).

# 9 Integration auf Mannigfaltigkeiten

## 9.1 Untermannigfaltigkeiten mit Rand

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\infty$ -Funktion mit den Eigenschaften

- $f(\xi) = 0 \implies df(\xi) \neq 0$
- $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$  sei kompakt.

Man nennt dann  $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$  den **Rand** von  $M$ , und  $M$  eine **kompakte Untermannigfaltigkeit** von  $\mathbb{R}^n$  mit Rand  $\partial M$ .

**Beispiel.** Für  $f(x) = -1 + \sum_{i=1}^n x_i^2$  ist  $M$  die abgeschlossene Einheitskugel  $E$  im  $\mathbb{R}^n$  und  $\partial M$  ist die Einheitskugel  $S$  der Dimension  $n - 1$  im  $\mathbb{R}^n$ .

*Lokale Beschreibung des Randes.* Für jeden Randpunkt  $\xi \in \partial M$  gilt  $\partial_\nu f(\xi) \neq 0$  für ein  $\nu = 1, \dots, n$  nach Annahme. Durch Umbenennen sei obdA  $\nu = 1$  (für gegebenes  $\xi$ ) und damit  $\partial_1 f(\xi) \neq 0$ . Aus Stetigkeitsgründen ist dann die Determinante der Jacobi Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f(x) & 0 \\ * & E \end{pmatrix}$$

der folgenden Abbildung [Beachte: Die Jacobimatrix ist eine Dreiecksmatrix und hat daher die Determinante  $\partial_1 f(x)$ ] von Null verschieden für alle  $x \in K_{2r}(\xi)$  nahe bei  $\xi$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f(x), x_2, \dots, x_n)$$

bei geeigneter Wahl von  $r = r(\xi) > 0$ . Für spätere Zwecke bezeichne

$$\boxed{\varepsilon_\xi = \text{sign}(\partial_1 f(\xi))}$$

das **Vorzeichen** dieser Determinante im Punkt  $\xi$ . Aus dem Satz von der Umkehrfunktion 4.25 folgt dann die Existenz einer lokalen  $C^\infty$ -Umkehrfunktion  $\psi$  der obigen Funktion. Diese lokale Umkehrfunktion hat dann notwendiger Weise die Gestalt

$$\psi(y) = \psi(y_1, \dots, y_n) = (g(y), y_2, \dots, y_n).$$

und  $\psi$  stiftet eine bijektive Abbildung zwischen den offenen Mengen

$$U := \psi^{-1}(K_{2r}(\xi)) \cong K_{2r}(\xi);$$

## 9 Integration auf Mannigfaltigkeiten

( $r$  hängt von  $\psi$  etc. ab). Somit definiert  $\psi$  Bijektionen

$$U \cap (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cong K_{2r}(\xi) \cap M,$$

$$V := U \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cong K_{2r}(\xi) \cap \partial M.$$

Die Gleichung  $y_1 = 0$  beschreibt daher in  $U = \psi^{-1}(K_{2r}(\xi))$  den Rand  $\partial M$  von  $M$ . Wegen  $x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$  (für die Abbildung  $\psi$  und ihr Inverses) ist daher

$$\lambda : \mathbb{R}^{n-1} \supset V \ni (y_2, \dots, y_n) \mapsto (g(0, y_2, \dots, y_n), y_2, \dots, y_n)$$

eine **lokale  $C^\infty$ -Parametrisierung** des Randes  $\partial M$  von  $M$  in der Nähe des Punktes  $\xi \in \partial M$ .

Für Punkte  $\xi \in M \setminus \partial M$  findet man ein  $r = r(\xi) > 0$  derart, daß gilt  $K_{2r}(\xi) \subseteq M \setminus \partial M$ . In der Tat ist  $M \setminus \partial M$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , denn das Komplement  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq 0\}$  ist eine abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Da  $M$  kompakt ist, überdecken bereits endliche viele der Kugeln  $K_r(\xi), \xi \in M$  die Menge  $M$  (Satz 11.4). Sei  $I$  die endliche Menge der zugehörigen Mittelpunkte  $\xi \in M$ .

## 9.2 Randintegrale

**Annahmen.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\infty$ -Funktion mit der Eigenschaften  $f(\xi) = 0 \implies df(\xi) \neq 0$ , und  $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$  sei kompakt. Sei  $U$  offen und  $\partial M \subseteq U$ .

Wir definieren nun für eine Differentialform  $\eta \in A^{n-1}(U)$  das Randintegral  $\int_{\partial M} \eta$ .

**Warnung.** Dies ist kein Integral im  $\mathbb{R}^n$ , denn dort ist  $\partial M$  eine Menge vom Maß Null! Wir machen hierfür folgende

Für endliche viele  $\xi \in I$  auf dem Rand  $\partial M$  überdecken die Kugeln  $K_r(\xi), r = r(\xi)$  die Randmenge  $\partial M$ . ObdA gilt  $K_r(\xi) \subset U$ . Für jedes  $\xi \in I$  haben wir eine **lokale Parametrisierung**  $\lambda_\xi$  durch eine offene Teilmenge  $V = V_\xi$  des  $\mathbb{R}^{n-1}$  gefunden

$$\lambda_\xi : \mathbb{R}^{n-1} \supseteq V_\xi \longrightarrow \partial M \cap K_{2r}(\xi) \subseteq K_{2r}(\xi) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Die Abbildung  $\lambda = \lambda_\xi$  ist vom Typ  $C^\infty$ . Sei  $\{\varphi_\xi \mid \xi \in I\}$  eine **zugeordnete Partition der Eins** auf der in Abschnitt 5.16 definierten offenen Teilmenge  $\tilde{N} = \bigcup_{\xi \in I} K_r(\xi) \subseteq U$  von  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 9.1.** Sei  $\eta \in A^{n-1}(\tilde{N})$  und damit  $\varphi_\xi(x) \cdot \eta \in A^{n-1}(V_\xi)$ . Dann setzen wir

$$\int_{\partial M} \eta := \sum_{\xi \in I} \varepsilon_\xi \cdot \int_{V_\xi} \lambda_\xi^*(\varphi_\xi(x) \cdot \eta) \quad \varepsilon_\xi \in \{\pm 1\}.$$

Obwohl dies auf den ersten Blick hochgradig von der Wahl der Stützpunkte  $\xi \in I$ , der Wahl der lokalen Parametrisierungen  $(V_\xi, \lambda_\xi)$  von  $\partial M$  und der Wahl einer Partition der Eins  $\varphi_\xi$  abzuhängen scheint, gilt erstaunlicherweise

**Lemma 9.2.** *Das in Definition 9.1 definierte Randintegral ist unabhängig von allen hierbei getroffenen Wahlen  $\lambda_\xi, \varphi_\xi, V_\xi, I$ .*

**Beweis.** Zur Unabhängigkeit von der Wahl der Partition der Eins, der Stützpunkte  $\xi \in I$  und der Radien  $r = r(\xi)$ : Für eine andere Wahl bekommt man eine neue Partition der Eins  $\varphi'_{\xi'}$  (für endlich viele neue Stützpunkte  $\xi' \in I'$ ). Man betrachtet zum Vergleich die neue Partition der Eins  $\varphi_\xi(x) \cdot \varphi_{\xi'}(x)$  für  $(\xi, \xi') \in J = I \times I'$  mit Trägern in  $K_{2r}(\xi) \cap K_{2r'}(\xi')$  (Übungsaufgabe!). Zur Unabhängigkeit von der Parametrisierung: Hierzu beachte, daß nach unserer Konstruktion für zwei verschiedene Parametrisierungen die Zusammensetzung  $h = \lambda^{-1} \circ \lambda'$

$$V \xrightarrow{\lambda} \partial M \cap K_{2r}(\xi) \xleftarrow{\lambda'} V'$$

sowie die Umkehrung  $h^{-1}$  beide  $C^\infty$ -Abbildungen sind; insbesondere daher  $\det(D(h)(x)) \neq 0$ . Die Behauptung folgt dann aus der Substitutionsregel 4.27, denn den Übergang vom Integral über  $V$

$$\int_V \varepsilon_\xi \cdot \lambda_\xi^*(\eta)$$

zum Integral über  $V'$

$$\int_{V'} \varepsilon_{\xi'} \cdot \lambda_{\xi'}^*(\eta)$$

erhält man durch eine Substitution mittels der Abbildung  $h$ , wenn man

$$h^*(\lambda_\xi^*(\eta)) = \lambda_{\xi'}^*(\eta)$$

berücksichtigt sowie  $\text{sign}(\det(Dh(x))) \cdot \varepsilon_{\xi'} = \varepsilon_\xi$ . Letztere Aussage über Vorzeichen folgt aus einer der Übungsaufgaben auf den Übungsblättern und wird benötigt aus folgendem Grund: In der Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale tritt der Absolutbetrag der Determinante der Jacobimatrix  $D(h(x))$  auf, beim Pullback dagegen nur die Determinante der Jacobimatrix  $D(h(x))$  selbst. Siehe dazu Seite 70. □

### 9.3 Der Satz von Stokes

**Satz 9.3.** *Sei  $M$  eine kompakte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit Rand  $\partial M$  und  $\eta \in A^{n-1}(\tilde{N})$  eine Differentialform auf einer offenen Menge  $\tilde{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ , welche  $M$  enthält. Dann gilt*

$$\boxed{\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta}.$$

**Beweis.** Sei  $\{\varphi_\xi(x) \mid \xi \in I\}$  eine Partition der Eins zu einer Überdeckung von  $M$  durch offene Kugeln  $K_{2r}(\xi)$ . Dann gilt für das Integral  $\int_M d\eta := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(x) \cdot d\eta$  wegen der  $\mathbb{R}$ -Linearität sowohl des Lebesgue Integrals auf  $\mathbb{R}^n$  als auch der Cartan Ableitung  $d$

$$\int_M d\eta = \int_M d\left(\sum_{\xi \in I} \varphi_\xi(x) \cdot \eta\right) = \sum_{\xi \in I} \int_M d(\varphi_\xi(x) \cdot \eta).$$

## 9 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Es genügt daher  $\int_M d(\varphi_\xi(x) \cdot \eta) = \varepsilon_\xi \cdot \int_{V_\xi} \lambda_\xi^*(\varphi_\xi(x) \cdot \eta)$  für jeden Summanden zu zeigen; Summation über die  $\xi \in I$  liefert dann den Satz von Stokes. Jetzt ist  $\rho = \varphi_\xi(x) \cdot \eta \in A_c^{n-1}(K_{2r}(\xi))$  eine Differentialform mit kompaktem Träger in einer lokalen Kartenmenge  $K_{2r}(\xi)$  von  $M$ . Zu zeigen bleibt dafür (\*)

$$\int_M d\rho = \varepsilon_\xi \cdot \int_{V_\xi} \lambda_\xi^*(\rho).$$

Die Substitutionsregel für die Substitution  $\psi = \psi_\xi$  (siehe Abschnitt 9.1) sowie Trägergründe implizieren für die linke Seite von (\*) und die offene Menge  $U_\xi := \psi^{-1}(K_{2r}(\xi)) \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\int_M d\rho := \int_{K_{2r}(\xi)} \chi_M(x) \cdot d\rho = \varepsilon_\xi \cdot \int_{U_\xi} \psi^*(\chi_M(x) \cdot d\rho) = \varepsilon_\xi \cdot \int_{U_\xi} \chi_{y_1 \leq 0} \cdot d(\psi^*(\rho)),$$

denn es gilt  $\psi^*(\chi_M(x)) = \chi_{y_1 \leq 0}(y)$ . Setze  $\omega := \psi^*(\rho) \in A_c^{n-1}(U_\xi)$ .

Zur Berechnung der rechten Seite (\*) beachte  $i^*(\omega) = i^*(\psi^*(\rho)) = \lambda_\xi^*(\rho)$  für die Inklusion  $i : V_\xi \hookrightarrow U_\xi$  und den Pullback von  $\omega$  auf  $V_\xi = U_\xi \cap \{y_1 = 0\}$  wegen  $\lambda_\xi = \psi \circ i$ . Es verbleibt daher für  $\omega = \psi^*(\rho) \in A_c^{n-1}(U_\xi)$  und die Inklusion  $i : V_\xi \hookrightarrow U_\xi$  zu zeigen (\*\*)

$$\int_{U_\xi} \chi_{y_1 \leq 0} \cdot d\omega = \int_{V_\xi} i^*(\omega) \quad \text{für} \quad V_\xi = U_\xi \cap \{y_1 = 0\},$$

Legt man  $U_\xi \cap (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1})$  in einen genügend grossen Quader  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ , dessen eine Wand durch die Hyperebene  $y_1 = 0$  gegeben ist, und setzt die Form  $\omega$  durch Null auf den Quader  $Q$  fort [möglich, da  $\omega$  kompaktem Träger in  $U_\xi \cap (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1})$  besitzt], dann folgt diese letzte verbliebene Aussage (\*\*) unmittelbar aus dem Satz von Stokes für Quader (Satz 4.34).  $\square$

## 9.4 Standardintegral auf der Kugeloberfläche

Der Euklidische **Stern-Operator**  $*$ :  $A^i(\mathbb{R}^n) \rightarrow A^{n-i}(\mathbb{R}^n)$  ist definiert durch

$$*(\sum_I f_I(x) dx_I) = \sum_I f_I(x) *dx_I$$

vermöge  $*dx_I = \varepsilon \cdot dx_{I^c}$ , wobei  $I^c$  die Komplementärmenge von  $I$  in  $\{1, \dots, n\}$  ist und  $\varepsilon$  ein durch  $dx_I \wedge *dx_I = \omega_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  bestimmtes Vorzeichen. Wie in Lemma 5.28 gezeigt wurde, gilt für  $\eta \in A^i(\mathbb{R}^n)$  und Substitutionen  $M$  aus  $SO(n, \mathbb{R})$

$$M^*(*\eta) = *(M^*(\eta)),$$

d.h. der Stern-Operator vertauscht mit dem Pullback  $M^*$ . Daraus folgt

**Lemma 9.4.** Die Formen  $\rho_0 = \frac{1}{2}r^2$  sowie  $\rho_1 = d\rho_0$  und  $\sigma_{n-1} = *\rho_1$  sind dreihinvariant, d.h. invariant unter Pullbacks von Abbildungen  $M \in SO(n, \mathbb{R})$ , d.h. es gilt  $M^*(\sigma_i) = \sigma_i$ .

**Beweis.** Berücksichtigt man  $M^*(r^2) = r^2 \iff {}^T M M = id$ , ist die Aussage klar für  $\rho_0$ . Da die Pullbacks  $M^*$  mit der Cartan Ableitung vertauschen, folgt die Aussage für  $\sigma_1$  und wegen Lemma 5.28 damit auch für  $\sigma_{n-1}$ .  $\square$

Im Fall der Euklidischen Einheitssphäre

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

würden wir aber gerne etwas wie die Gesamtfläche definieren. Wie soll man das machen? Hierauf gibt es eine sehr befriedigende Antwort: Betrachte die dreihinvariante Differentialform  $\sigma_{n-1}(x) \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ , die sogenannte **Oberflächenform**

$$\sigma_{n-1}(x) = *d\left(\frac{1}{2}r^2\right) = \sum_{i=1}^n x_i *dx_i .$$

Hierbei entsteht  $*dx_i$  aus  $\omega_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  bis auf ein Vorzeichen  $(-1)^{i-1}$  durch Weglassen des Terms  $dx_i$

$$*dx_i = \partial_i \vee \omega_n = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Es gilt daher  $dx_i \wedge *dx_i = \omega_n$ . Zum Beispiel gilt  $\sigma_1 = xdy - ydx$  im Fall  $n = 2$  und es gilt  $\sigma_2 = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$  im Fall  $n = 3$ . Optisch schöner

$$\sigma_2 = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy .$$

Es gilt offensichtlich

$$d\sigma_{n-1} = n \cdot \omega_n .$$

Die Kugeloberfläche (das Wort Oberfläche ist natürlich ein Sprachmissbrauch in Dimensionen  $n \neq 3$ ) ist dann definiert durch

$$vol(S) := \int_S \sigma_{n-1} .$$

Mit Hilfe der Kugeloberflächenform  $\sigma_{n-1}$  definieren wir jetzt allgemeiner für beliebige stetige Funktionen  $f(x)$  auf der Sphäre  $S = S^{n-1}$  ein abstraktes Integral

$$I: C(S^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R} ,$$

das sogenannte **Standard Integral**. Wir erklären dieses Integral zuerst für Funktionen  $f(x)$  aus dem Unterraum  $A \subseteq C(S^{n-1})$ ,

$$I(f) := \int_{S^{n-1}} f(x) \cdot \sigma_{n-1}(x) \quad , \quad f(x) \cdot \sigma_{n-1}(x) \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n) ,$$

welcher durch Einschränkungen von Funktionen in  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  erklärt ist (es würde sogar genügen den Raum der Einschränkungen aller Polynome im  $\mathbb{R}^n$  auf  $S^{n-1}$  zu betrachten). Dieser Unterraum  $A$  ist eine Algebra und liegt nach Lemma 5.31 und dem Satz von Stone-Weierstraß dicht in  $C(S^{n-1})$  bezüglich der Supremums-Norm. Auf Grund von Lemma 9.6 und Korollar 9.7 (weiter unten) kann man  $I$  (wie in Abschnitt 3.6) eindeutig zu einem abstrakten Integral auf  $C(S^{n-1})$  fortsetzen.

**Lemma 9.5.** *Das Standardintegral  $I(f)$  ist ein abstraktes Integral auf dem Verband  $A$  und ist invariant unter Drehungen<sup>1</sup> aus der Gruppe  $SO(n, \mathbb{R})$ , d.h.*

$$I(f) = I(f \circ M) \quad , \quad M \in SO(n, \mathbb{R}) .$$

<sup>1</sup>Eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist in der Gruppe  $SO(\mathbb{R}^n)$  und erhält damit die Sphäre  $S^{n-1}$ , wenn  $M = {}^T M^{-1}$  sowie  $\det(M) = 1$  gilt. Siehe auch Abschnitt 5.12.

## 9 Integration auf Mannigfaltigkeiten

**Beweis.** Die Abbildung  $I : A \rightarrow \mathbb{R}$  ist per Definition  $\mathbb{R}$ -linear; die Drehinvarianz folgt aus der Drehinvarianz der Oberflächenform  $\sigma_{n-1}$ . Es verbleibt daher nur noch für  $f(x) \geq 0$  zu zeigen  $I(f) \geq 0$ .

Mittels einer Partition der Eins kann man sich auf den Fall beschränken, daß der Träger von  $f(x)$  in einer Karte enthalten ist. Durch eine Drehung kann man dann annehmen, der Träger von  $f(x)$  sei enthalten in der rechten ‘Hemisphäre’  $S_+^{n-1} := \{x \in S^{n-1} \mid x_1 > 0\}$ . Eine Kartenabbildung

$$\lambda : \{x = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \rho^2 := \sum_{i=2}^n x_i^2 < 1\} \longrightarrow S_+^{n-1}$$

für die rechte Hemisphäre  $S_+^{n-1}$  ist für  $\rho^2 := \|x\|_{\mathbb{R}^{n-1}}^2 = \sum_{i=2}^n x_i^2$  gegeben durch die lokale Parametrisierung

$$\lambda(x_2, \dots, x_n) = (+\sqrt{1-\rho^2}, x_2, \dots, x_n).$$

Die Behauptung  $I(f) \geq 0$  für  $f \geq 0$  folgt daher aus dem nächsten Lemma.  $\square$

**Lemma 9.6.** Für Funktionen  $f$  mit kompaktem Träger in der rechten Hemisphäre  $S_+^{n-1}$  gilt

$$\int_{S_+^{n-1}} f(x) \cdot \sigma_{n-1}(x) = \int_{\|x\| < 1} \frac{f(\lambda(x_2, \dots, x_n))}{+\sqrt{1-\rho^2}} dx_2 \cdots dx_n.$$

**Beweis.** Bis auf  $dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$  ist der Pullback  $\lambda^*(\sigma_{n-1})$  gleich

$$\sqrt{1-\rho^2} - \sum_{i=2}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{1-\rho^2} = (1-\rho^2)^{-1/2} \cdot (1-\rho^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2) = (1-\rho^2)^{-1/2}.$$

**Korollar 9.7.** Das Standard Integral  $I$  auf  $C(S^{n-1})$  ist ein abstraktes Integral.

**Beweis.** Für monotone Folgen  $f_n \nearrow f$  stetiger Funktionen  $f_n \in C(S^{n-1})$  mit stetiger Grenzfunktion  $f \in C(S^{n-1})$  ist zu zeigen  $I(f_n) \nearrow I(f)$ . Durch eine Partition der Eins kann man obdA annehmen, daß alle  $f, f_n$  kompakten Träger in der rechten Hemisphäre  $S_+^{n-1}$  besitzen. In diesem Fall folgt die Aussage sofort aus dem letzten Lemma und dem Satz von Beppo Levi angewendet auf das reelle Integral  $\int_{\|x\| < 1} \frac{f(\lambda(x_2, \dots, x_n))}{+\sqrt{1-\rho^2}} dx_2 \cdots dx_n$ .  $\square$

**Lemma 9.8.**  $\int_{\|x\| < r} f(x) \omega_n = \int_0^r \left( \int_S f(t\xi) \sigma_{n-1}(\xi) \right) t^{n-1} dt.$

**Beweis.** ObdA hat  $f$  Träger in der rechten Hemisphäre. Die Abbildung  $\psi : \{\|\xi\| < 1\} \times (0, r) \rightarrow B_r(0)$  sei definiert durch  $\psi(\xi_2, \dots, \xi_n; t) = (t\sqrt{1-\rho^2}, t\xi_2, \dots, t\xi_n)$ . Sie hat dann die Eigenschaft  $\det(D\psi)(\xi) = \frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-\rho^2}}$  (Laplace Entwicklungssatz). Die Aussage folgt daher aus der Substitutionsformel Satz 4.27, sowie dem Satz von Fubini und Lemma 9.6.  $\square$

Das letzte Lemma motiviert die Definition des Standardintegrals  $I_R$  auf der Sphäre  $S(R)$  vom Radius  $R$  durch die Formel

$$I_R(f) := R^{n-1} \cdot \int_S f(R\xi) \sigma_{n-1}(\xi).$$

Lemma 9.8 schreibt sich dann suggestiver in der Form

$$\int_{\|x\|<r} f(x)\omega_n = \int_0^r I_t(f)dt .$$

## 9.5 Greensche Formel

Der Satz von Stokes für die abgeschlossenen Kugeln vom Radius  $R$  resp.  $r$  zeigt dann durch Subtraktion das folgende Resultat für die **Kugelschale**  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r \leq \|x\| \leq R\}$ :

Für  $\eta \in A^{n-1}(U)$  und  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  mit  $X \subset U$  gilt

$$\int_X d\eta = \int_{S^{n-1}(R)} \eta - \int_{S^{n-1}(r)} \eta .$$

Hierbei bezeichne  $S^{n-1}(R)$  resp.  $S^{n-1}(r)$  die Sphären vom Radius  $R$  resp.  $r$ . Wir schreiben die rechte Seite dieser Formel symbolisch wieder als  $\int_{\partial X}$ , wobei der Rand  $\partial X$  jetzt aus den beiden Sphären (mit unterschiedlicher Orientierung, nämlich  $+$  für den äusseren Teil und  $-$  für den inneren Teil) besteht

$$\int_X d\eta = \int_{\partial X} \eta .$$

**Greensche Formel.** Der Laplace Operator  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$  operiert auf Funktionen  $f, g \in C^\infty(U)$ . Für das Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle_{L^2(X)} = \int_X \bar{f}(x)g(x)dx$  im Hilbertraum  $L^2(X)$  gilt

$$\langle f, \Delta(g) \rangle_{L^2(X)} - \langle \Delta(f), g \rangle_{L^2(X)} = \int_X (f\Delta(g) - g\Delta(f))\omega_n$$

(beachte  $f = \bar{f}$  und  $g = \bar{g}$ ) und man hat

**Lemma 9.9. (Greensche Formel).** Für Kugelschalen  $X$  gilt

$$\int_X (f\Delta(g) - g\Delta(f))\omega_n = \int_{\partial X} f \sum_{i=1}^n \partial_i(g)*dx_i - \int_{\partial X} g \sum_{i=1}^n \partial_i(f)*dx_i .$$

**Beweis.** Benutze  $d(\sum_i f\partial_i(g)*dx_i) = \sum_i df \wedge \partial_i(g)*dx_i + \sum_i f \cdot d(\partial_i(g))*dx_i$  wegen  $d(*dx_i) = 0$ , und damit  $d(\sum_i f\partial_i(g)*dx_i) = \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(\partial_i g)\omega_n + f\Delta(g)\omega_n$  wegen  $df \wedge *dx_i = \sum_j (\partial_j f)dx_j \wedge *dx_i = (\partial_i f)\omega_n$ . Vertauscht man  $f$  und  $g$  und bildet die Differenz, folgt daraus sofort das Lemma mit Hilfe des Satzes von Stokes.  $\square$



# 10 Harmonische Analysis

## 10.1 Der Hilbertraum $L^2(S)$

Sei  $n \geq 2$  und sei  $S = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  die **Einheitssphäre** im  $\mathbb{R}^n$ . Das in Abschnitt 9.4 für stetige Funktionen  $f \in C(S)$  erklärte Standard Integral  $I(f) = I_S(f)$  ist nach Korollar 9.7 ein abstraktes Integral. Daher kann man den Hilbertraum  $L^2(S)$  definieren mit dem Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle = I_S(\bar{f} \cdot g)$ , d.h.

$$\langle f, g \rangle = \int_S \bar{f}(x)g(x)\sigma_{n-1}(x)$$

gebildet zur Differentialform  $\sigma_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n x_i * dx_i$  (siehe Abschnitt 9.4).

Der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller Polynome auf  $\mathbb{R}^n$  ist eine Algebra. Da bereits lineare Funktionen Punkte trennen, ist diese Algebra punkt-trennend auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Nach Stone-Weierstraß ist daher der Raum  $A$  der Einschränkungen aller Polynome auf  $S$  ein dichter Unterraum des Raumes  $C(S)$  der stetigen Funktionen auf  $S$ , denn  $S$  ist kompakt. Nach Lemma 5.21 wird  $A$  von den Einschränkungen der harmonischen Polynome auf  $\mathbb{R}^n$  aufgespannt. Es folgt

**Lemma 10.1.** *Der Vektorraum aller harmonischen Polynome liegt dicht in  $L^2(S)$ .*

In Lemma 10.6.4 zeigen wir, daß homogene harmonische Polynome verschiedenen Grades orthogonal zueinander sind bezüglich des Skalarproduktes von  $L^2(S)$ . Wir beschränken uns daher für den Moment auf homogene *harmonische* Polynome in  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  festes Grad  $l$ . Das Skalarprodukt  $\langle P, Q \rangle$  von  $L^2(S)$  liefert eine positiv definite symmetrische  $\mathbb{R}$ -Bilinearform auf  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$ . Sei  $\{P_{l,k}(x) \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n) \mid 1 \leq k \leq \dim \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)\}$  eine **reelle ON-Basis**  $P_{l,k}(x)$  dieses Skalarproduktes auf  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$ . Verschwindet ein Polynom in  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  auf der Sphäre  $S$ , dann ist es wegen der Homogenität das Nullpolynom. Die Einschränkung  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(S)$  ist also eine injektive Abbildung. Wir definieren dann für  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$Z_l(x, \xi) := \sum_{k=1}^{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))} P_{l,k}(x)P_{l,k}(\xi).$$

Für festes  $\xi$  ist die Funktion  $Z_l(x, \xi)$  ein harmonisches Polynom der Variable  $x$  vom Grad  $l$ , und umgekehrt gilt dies auch. Nach Definition gilt

$$Z_l(x, \xi) = Z_l(\xi, x) \quad , \quad Z_l(\lambda x, \lambda \xi) = \lambda^{2l} Z_l(x, \xi) .$$

$Z_l(x, \xi)$  ist **vollkommen bestimmt** durch die folgende **Reproduktionsformel**

$$\langle Z_l(x, \xi), P(x) \rangle = P(\xi).$$

[Diese folgt unmittelbar aus  $\langle \sum_k a_k P_{l,k}(x), P_{l,j}(x) \rangle = a_j$ .] Aus der Drehinvarianz des Standard Integrals auf  $S$  folgt  $\langle Z_l(Mx, M\xi), P(x) \rangle = \langle Z_l(x, M\xi), P(M^{-1}x) \rangle$  für  $M \in SO(n, \mathbb{R})$ . Aber  $\langle Z_l(x, M\xi), P(M^{-1}x) \rangle = P(M^{-1}M\xi) = P(\xi)$ , also  $\langle Z_l(Mx, M\xi), P(x) \rangle = P(\xi)$ . Aus obiger Eindeutigkeitsaussage folgt daher

$$Z_l(Mx, M\xi) = Z_l(x, \xi) \quad , \quad M \in SO(n, \mathbb{R}).$$

Insbesondere ist  $Z_l(x, \xi)$  als Funktion von  $x \in S$  (bei festem  $\xi \in S$ ) damit invariant unter dem Stabilisator  $SO(n-1, \mathbb{R})$  des Punktes  $\xi$ . Im Spezialfall  $\xi = (1, 0, \dots, 0)$  hängt daher  $Z_l(x, \xi)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  nur von  $x_1 = x \cdot \xi$  und  $r = \|x\|$  ab, ist daher proportional zu dem **zonalen harmonischen Polynom**  $P_{l,0}(x)$  vom Grad  $l$  (definiert in Abschnitt 5.9). D.h. man erhält die **Additionsformel**

$$Z_l(x, \xi) = \text{const}(l) \cdot P_{l,0}(x) \quad , \quad \xi = (1, 0, \dots, 0).$$

**Lemma 10.2.** *Es gilt  $|Z_l(x, \xi)| \leq Z_l(x, x) = \frac{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))}{\text{vol}(S)}$  für alle  $x, \xi \in S$ .*

**Beweis.** Wegen  $Z_l(x, x) = \sum_k P_{l,k}(x)^2$  und der  $SO(n, \mathbb{R})$ -Invarianz ist  $Z_l(x, x) = c$  eine konstante Funktion auf  $S$ . Also  $\text{vol}(S)c = \int_S Z_l(x, x) \sigma_{n-1} = \sum_k \langle P_{l,k}, P_{l,k} \rangle = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))$ . Es gilt  $|Z_l(x, \xi)| = |\sum_k P_{l,k}(x)P_{l,k}(\xi)| \leq |Z_l(x, x)|^{1/2} |Z_l(\xi, \xi)|^{1/2} = Z_l(x, x)$ . Dies benutzt die Schwarz Ungleichung und die Konstanz von  $Z_l(x, x) \geq 0$  auf  $S$ .  $\square$

## 10.2 Poisson Kern

Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine harmonische Funktion. Insbesondere gilt  $f \in C^\infty(U)$ . Ist  $x_0 = 0$  in  $U$ , dann sind die Taylor Koeffizienten

$$c_l(x) = \frac{1}{l!} \left( \frac{d}{dt} \right)^l f(tx)_{t=0}$$

harmonische Polynome in  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$ ; siehe Abschnitt 5.11.

Wir wenden dies auf den **Poisson Kern**  $P(x, \xi)$  an im Bereich  $\|x\| < \|\xi\|$ , d.h. auf

$$P(x, \xi) = \frac{1}{\text{vol}(S)} \frac{\|\xi\|^2 - \|x\|^2}{\|\xi - x\|^n} \quad , \quad x \neq \xi.$$

Beachte  $\|x\|^2 - \|\xi\|^2 = \|x - \xi\|^2 + 2(x - \xi, \xi)$ . Also  $-\text{vol}(S)P(x, \xi) = \|x - \xi\|^{-\kappa} + \frac{2(x - \xi, \xi)}{\|x - \xi\|^{\kappa+2}} = P_0^*(x - \xi) + P_1^*(x - \xi)$ . Dies ist eine Summe von Kelvin Transformaten der harmonischen Polynome  $P_0(x) = 1$  und  $P_1(x) = 2(x, \xi)$  mit  $\kappa = n - 2$ . Also ist  $P(x, \xi)$  eine harmonische Funktion in  $x - \xi$  und damit harmonisch in  $x$ , und wegen  $P(x, \xi) = -P(\xi, x)$  damit auch harmonisch in  $\xi$ .

Offensichtlich gilt  $P(Mx, M\xi) = P(x, \xi)$  für alle  $M \in SO(n, \mathbb{R})$ . Die Taylor Koeffizienten  $c_{l,\xi}(x) := T_l(P(x, \xi))(x)$  sind dann harmonische Polynome mit derselben Drehsymmetrie.

Somit sind  $c_{l,\xi}(x)$  und  $Z_l(x, \xi)$  **zonale harmonische Polynome** in  $x$  vom Grad  $l$  und daher proportional zu  $P_{l,0}(x)$  nach Abschnitt 5.9. [OBdA ist  $\xi$  gleich  $\xi_0 = (1, \dots, 0)$  wegen der Drehsymmetrie. Dann hängt  $vol(S)P(x, \xi_0) = \frac{1-r^2}{(1-2x_1+r^2)^{n/2}}$  nur ab von der ersten Koordinate  $x_1 = (x, \xi_0)/2$  und dem Radius  $r = \|x\|$ . Dasselbe gilt daher auch für die Taylor Koeffizienten  $c_l(x) = c_l(x, \xi_0)$ ]. Daraus folgern wir weiter unten

**Satz 10.3.** *Es gilt  $c_l(x, \xi) = Z_l(x, \frac{\xi}{\|\xi\|^2})\|\xi\|^{-\kappa}$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ , und für alle  $x, \|x\| < \|\xi\|$  gilt*

$$P(x, \xi) = \sum_{l=0}^{\infty} Z_l(x, \frac{\xi}{\|\xi\|^2})\|\xi\|^{-\kappa}.$$

Die Potenzreihe auf der rechten Seite konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von der Kugel  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \|\xi\|\}$  absolut und gleichmässig.

**Bemerkung.** Für  $x, \xi \in S$  sind alle Koeffizienten  $Z_l(x, \xi)$  symmetrisch in  $x$  und  $\xi$ . Dennoch ist die Summe  $P(x, \xi)$  antisymmetrisch in  $x$  und  $\xi$ . Zur Illustration dieses scheinbaren Widerspruchs betrachte dazu im eindimensionalen Fall  $(\xi - x)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} z_l(x, \frac{\xi}{\xi^2})\xi^{-1}$  für  $z_l(x, \xi) = x^l \xi^l$  im Bereich  $|x| < |\xi|$  (im wesentlichen die geometrische Reihe).

**Beweis.** Durch Reskalierung  $(x, \xi) \mapsto (tx, t\xi)$  ist wegen  $P(tx, t\xi) = t^{-\kappa}P(x, \xi)$  und der analogen Reskalierungseigenschaft der rechten Seite oBdA  $\xi \in S$  und  $\|x\| < 1$ . Auf Grund der Drehinvarianz beider Seiten ist dann oBdA  $\xi = \xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$ . Wir zeigen nun, daß auf der rechten Seite  $\sum_{l=0}^{\infty} Z_l(x, \xi_0)$  für  $\|x\| < 1$  absolut konvergiert, und in diesem Bereich damit eine drehinvariante harmonische Funktion  $f(x)$  darstellt. Dazu benützen wir die Abschätzung  $|Z_l(x, \xi_0)| \leq t^l Z_l(\xi_0, \xi_0)$ , welche aus Lemma 10.2 folgt, und können für die absolute Konvergenz oBdA annehmen  $x = t\xi_0$ . Aus  $vol(S)Z_l(t\xi_0, \xi_0) = \dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)) \cdot t^l$  (Lemma 10.2) und  $\kappa \cdot \dim(\mathcal{H}_l) = (2l + \kappa) \binom{n+l-3}{l}$  oBdA für  $\kappa = n - 2 \geq 1$  (Satz 5.19), sowie

$$\sum_l (1 + \frac{2l}{\kappa}) \binom{n+l-3}{l} t^l = \frac{1}{(1-t)^\kappa} + \frac{2t}{\kappa} \frac{d}{dt} \frac{1}{(1-t)^\kappa} = \frac{1-t^2}{(1-t)^n} = \frac{\|\xi_0\|^2 - \|t\xi_0\|^2}{\|\xi_0 - t\xi_0\|^n},$$

folgt  $f(t\xi_0) = P(t\xi_0, \xi_0)$ . Wir haben dabei benutzt  $\frac{1}{t} (\frac{d}{dt})^l (1-t)^{-\kappa} |_{t=0} = \binom{\kappa+l-1}{l}$  für  $\kappa > 0$ . Im Fall  $n = 2$  reduziert sich alles auf  $-1 + 2/(1-t) = (1-t^2)/(1-t)^2$ . Dies zeigt die absolute und gleichmässige Konvergenz.

Wegen der Proportionalität der zonalen harmonischen Polynome  $c_l(x, \xi) = const(l) \cdot Z_l(x, \xi)$  genügt wegen  $Z_l(\xi_0, \xi_0) > 0$  für  $const(l) = 1$  die gezeigte Gleichheit in den Punkten  $x = t \cdot \xi_0$ . Dies zeigt, daß alle Taylor Koeffizienten der harmonischen  $C^\infty$ -Funktion  $f(x) - P(x, \xi_0)$  im Mittelpunkt  $x_0 = 0$  der Kugel  $U = \{x \mid \|x\| < 1\}$  verschwinden. Aus Lemma 10.8 im nächsten Abschnitt folgt daher  $f(x) = P(x, \xi_0)$  auf  $U$ . □

Eine geringfügige Modifikation des Beweises zeigt analog

**Satz 10.4.** Für  $n \geq 3$  und  $\kappa = n - 2$  sei  $Q(x, \xi)$  das **Coulomb oder Newton Potential**

$$Q(x, \xi) = \frac{1}{\kappa \cdot \text{vol}(S)} \frac{1}{\|x - \xi\|^\kappa}$$

im  $\mathbb{R}^n$ . Für alle  $x$  mit  $\|x\| < \|\xi\|$  gilt dann

$$Q(x, \xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l + \kappa} \cdot Z_l(x, \frac{\xi}{\|\xi\|^2}) \|\xi\|^{-\kappa}.$$

Die Reihe konvergiert auf jedem Kompaktum der Kugel  $\{x \mid \|x\| < \|\xi\|\}$  absolut und gleichmässig.

### 10.3 Orthogonalität

In diesem Abschnitt sei  $n \geq 2$ . Für reelle Zahlen  $0 < \rho < R$  und  $r \in [\rho, R]$  sei  $X = X[r, R]$  die abgeschlossene **Kugelschale** im  $\mathbb{R}^n$  mit den Radien  $r$  und  $R$  um  $x_0 = 0$ . Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, welche  $X$  für alle  $r \in [\rho, R]$  enthält. Für harmonische Funktionen  $f(x), g(x) \in C^\infty(V)$  verschwindet die linke Seite der Greenschen Formel wegen  $\Delta(f) = \Delta(g) = 0$ . Die Greensche Formel (Lemma 9.9) liefert damit folgende **Vertauschungsformel**:

$$\int_{\partial X} f \sum_{i=1}^n \partial_i(g) * dx_i = \int_{\partial X} g \sum_{i=1}^n \partial_i(f) * dx_i.$$

Damit beweisen wir das nächste Lemma. Beachte,  $\partial X$  ist die Vereinigung der beiden Sphären  $S(R), S(r)$  vom Radius  $R$  und  $r$  mit unterschiedlicher Orientierung

$$\partial X = S(R) - S(r).$$

Die Vertauschungsformel zeigt daher, daß  $\int_{S(r)} f \sum_i \partial_i(g) * dx_i - \int_{S(r)} g \sum_i \partial_i(f) * dx_i$  unabhängig vom Radius  $r \in [\rho, R]$  ist.

**Definition.** Für harmonisches  $f(x) \in C^\infty(V)$  und  $P(x) \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  und  $r \in [\rho, R]$  setzen wir

$$\langle f, P \rangle_r := r^{-n-2l} \int_{S(r)} f(x) P(x) \sigma_{n-1}(x).$$

**Lemma 10.5.** Sei  $P(x)$  ein harmonisches Polynom auf  $\mathbb{R}^n$  und  $f(x)$  eine harmonische Funktion auf einer offenen Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ , welche  $\bigcup_{r \in [\rho, R]} S(r)$  enthält. Dann existieren Konstanten  $\alpha = \alpha(P, f)$  und  $\beta = \beta(P, f)$ , welche nicht von  $r \in [\rho, R]$  abhängen, so daß für  $\kappa = n - 2$  gilt

$$(\kappa + 2l) \cdot \langle f, P \rangle_r = \alpha + \beta \cdot r^{-\kappa-2l} \quad \text{bzw. für } (n, l) = (2, 0) \quad \langle f, P \rangle_r = \alpha + \beta \cdot \log(r).$$

**Beweis.** Die **Kelvin Transformierte**  $g(x) = P^*(x) = P(x) \|x\|^{-\kappa-2l}$  des harmonischen Polynoms  $P(x)$  hat eine **Singularität** im Punkt  $x_0 = 0$  [für  $(n, l) = (2, 0)$  setzt man analog  $g(x) = \log(\|x\|)$ ], ist aber harmonisch auf der offenen Menge  $V \setminus \{x_0\}$ , welche  $X = X(r, R)$

enthält. Wir wenden nun für  $g = P^*$  und  $f$  die oben angegebene **Vertauschungsformel** an. Wegen

$$\hat{\partial}_i g(x) = -(\kappa + 2l) \frac{P(x)x_i}{\|x\|^{n+2l}} + \frac{\partial_i P(x)}{\|x\|^{\kappa+2l}}$$

gilt

$$f(x) \sum_i \hat{\partial}_i(g) * dx_i = -(\kappa + 2l) \frac{f(x)P(x)\sigma_{n-1}(x)}{\|x\|^{n+2l}} + \frac{f(x) \sum_i \partial_i(P) * dx_i}{\|x\|^{\kappa+2l}}.$$

Die Nenner sind Potenzen von  $r$ , also konstant auf  $S(r)$ . Nach der Vertauschungsformel ist daher  $-\alpha := \int_{S(r)} f \sum_i \hat{\partial}_i(g) * dx_i - \int_{S(r)} g \sum_i \partial_i(f) * dx_i$  unabhängig von  $r \in [\rho, R]$ . Konkret ist

$$-\alpha = -(\kappa + 2l) \langle f, P \rangle_r + \frac{1}{r^{\kappa+2l}} \int_{S(r)} f(x) \sum_i \partial_i(P) * dx_i - \frac{1}{r^{\kappa+2l}} \int_{S(r)} P(x) \sum_i \partial_i(f) * dx_i.$$

Analog zeigt die Vertauschungsformel angewandt für  $g = P$  und  $f$  die  $r$ -Unabhängigkeit von

$$\beta := \int_{S(r)} f(x) \sum_i \partial_i(P) * dx_i - \int_{S(r)} P(x) \sum_i \hat{\partial}_i(f) * dx_i.$$

Beides zusammen liefert unsere Behauptung.  $\square$

Für  $(n, l) = (2, 0)$  überlassen wir es dem Leser  $\langle f, 1 \rangle_r = \frac{1}{r^2} \int_{S(r)} f(x) \sigma_1(x) = \alpha + \beta \cdot \log(r)$  zu zeigen mit einem analogen Argument.

**Lemma 10.6.** Sei  $U$  eine offene Kugel vom Radius  $> R$  um  $x_0 = 0$ . Wir nehmen an  $1 < R$ . Dann gilt für harmonisches  $f(x) \in C^\infty(U)$  und harmonisches  $P(x) \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$

1. Nach Definition gilt  $\langle f, P \rangle_1 = \langle f, P \rangle$  für das Skalarprodukt  $\langle f, P \rangle = \langle f, P \rangle_{L^2(S)}$ .
2.  $\langle f, P \rangle_r$  hängt nicht ab von der Wahl von  $r$ .
3. Verschwinden die Taylor Koeffizienten  $T_\nu(f)(x)$  für  $\nu \leq l$ , dann gilt  $\lim_{r \rightarrow 0} \langle f, P \rangle_r = 0$ .
4. Orthogonalität: Es gilt  $\langle \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n), \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n) \rangle = 0$  für  $m \neq l$ .
5. Es gilt  $\langle f, P \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \langle f, P \rangle_r = \langle T_l(f), P \rangle$ .

**Beweis.** Behauptung 2 folgt aus Lemma 10.5, da  $f(x)$  nach Annahme stetig im Punkt  $x_0 = 0$  ist und deshalb für  $r \rightarrow 0$  das Integral  $\langle f, P \rangle_r$  beschränkt bleibt. Daraus folgt  $\beta = 0$  und  $(\kappa + 2l) \cdot \langle f, P \rangle_r = \alpha$  in Lemma 10.5. Beachte  $\kappa + 2l > 0$  ausser im Fall  $(n, l) = (2, 0)$ ; dieser geht aber analog. Für Behauptung 3 betrachten wir die Taylor Koeffizienten  $T_\nu(f)$  von  $f(x)$  im Punkt  $x_0 = 0$  (siehe Abschnitt 5.11). Aus  $T_\nu(f) = 0$  für alle  $\nu \leq l$  und Lemma 5.25 folgt  $f(x) = \|x\|^l \cdot H(x)$  für eine stetige Funktion  $H$  auf  $U$  mit  $H(0) = 0$ . Wegen  $f(rx)P(rx)\sigma_{n-1}(rx) = r^{2l+n} \cdot H(rx)P(x)\sigma_{n-1}(x)$  für  $x \in S = S(1)$  folgt Behauptung 3 aus  $\lim_{r \rightarrow 0} H(rx) = 0$ . Behauptung 4 folgt aus den Behauptungen 1,2,3, denn wegen  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$  ist obdA  $m > l$ . Für die harmonische Funktion  $h(x) = f(x) - \sum_{\nu=0}^l T_\nu(f)(x)$  folgt  $\lim_{r \rightarrow 0} \langle h, P \rangle_r = 0$  aus Behauptung 3 und Abschnitt 5.11. Wegen Behauptung 1 und 2 ist daher  $\langle h, P \rangle = 0$  und damit  $\langle f, P \rangle = \sum_{m=0}^l \langle T_m(f), P \rangle$ , wegen Behauptung 4 also  $\langle f, P \rangle = \langle T_l(f), P \rangle$ . Dies zeigt Behauptung 5.  $\square$

Lemma 10.6.4 und Lemma 10.1 zusammen ergeben

**Satz 10.7.** Die Funktionen  $P_{l,k}(x)$  bilden eine Hilbertraum-Basis von  $L^2(S)$ .

Aus Lemma 10.6.1-3 folgt daher

**Lemma 10.8.** Verschwinden alle Taylor Koeffizienten einer harmonischen Funktion  $f \in C^\infty(U)$  im Mittelpunkt  $x_0$  einer offenen Kugel  $U$ , dann verschwindet  $f$  auf  $U$ .

**Irreduzibilität.** Es existiert kein<sup>1</sup>  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum  $0 \neq V \subsetneq \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  mit der Eigenschaft:  $P(x) \in V \Rightarrow P(Mx) \in V$  für alle  $M \in SO(V)$ .

## 10.4 Harmonische Funktionen sind analytisch

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

eine harmonische Funktion auf  $U$ . Sei die abgeschlossene Kugel vom Radius  $R$  um  $x_0$  in  $U$  enthalten

$$\{x \mid \|x - x_0\| \leq R\} \subset U.$$

Für die Sphäre  $S(R, x_0)$  mit Mittelpunkt  $x$  und Radius  $R$  gilt dann

**Satz 10.9 (Poisson Formel).** Unter obigen Voraussetzungen gilt für alle  $x$  in der Kugel  $B$  definiert durch  $\|x\| < R$

$$f(x + x_0) = \frac{1}{R^2 \text{vol}(S)} \int_{S(R,0)} f(\xi + x_0) \frac{\|\xi\|^2 - \|x\|^2}{\|\xi - x\|^n} \sigma_{n-1}(\xi).$$

Für  $x = 0$  liefert dies folgende **Mittelpunktsformel**

**Satz 10.10.** Sei  $n \geq 2$  und  $U$  offen im  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in C^\infty(U)$  eine harmonische Funktion. Für jede abgeschlossene Kugel vom Radius  $R$  in  $U$  mit Mittelpunkt  $x_0$  gilt

$$f(x_0) = \frac{1}{\text{vol}(S(R))} \cdot \int_{S(R,0)} f(\xi + x_0) \sigma_{n-1}(\xi).$$

**Beweis.** Zum Beweis der Poisson Formel ist obdA  $x_0 = 0$  und  $R = 1$ . Das Integral auf der rechten Seite der Poisson Formel definiert eine Funktion  $g(x)$  auf  $B$ . Wegen Lemma 10.8 genügt es, daß alle (höheren) Ableitungen von  $f$  und  $g$  in  $x_0$  übereinstimmen. Zum Beweis entwickeln wir  $g$  auf  $B$  mittels Satz 10.4 in eine konvergente Potenzreihe<sup>2</sup>. Vertauschen von Summation

<sup>1</sup>Definiere  $Z_l^V(x, \xi)$  mit einer ON-Basis von  $V$  analog zu  $Z_l(x, \xi)$ . Dann gilt analog eine Reproduktionsformel auf  $V$  und damit  $Z_l^V(Mx, M\xi) = Z_l^V(x, \xi)$  für  $M \in SO(V)$ . Daher sind  $Z_l^V(x, \xi)$  und  $Z(x, \xi)$  proportional [setze  $\xi = (1, 0, \dots, 0)$ ] und die Reproduktionsformeln für  $Z_l^V(x, \xi)$ ,  $Z(x, \xi)$  zeigen  $V = \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  oder  $V = 0$ .

<sup>2</sup>Die Konvergenz ist gleichmässig für festes  $\xi \in S$  und alle  $x$  aus einer kompakten Teilkugel von  $B$ . Wegen der  $SO(n, \mathbb{R})$ -Invarianz von  $P(x, \xi)$  ist sie daher auch gleichmässig für alle solchen  $x$  und alle  $\xi \in S$ .

und Integration (Korollar 6.13) liefert

$$g(x) = \int_S f(\xi) P(x, \xi) \sigma_{n-1}(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \int_S f(\xi) Z_l(x, \xi) \sigma_{n-1}(\xi) .$$

Die Summanden  $\int_S f(\xi) Z_l(x, \xi) \sigma_{n-1}(\xi) = \langle Z_l(\xi, x), f(\xi) \rangle$  sind homogen vom Grad  $l$  in  $x$ , somit gleich den Taylor Koeffizienten  $T_l(g)(x)$ . Also ist  $\langle Z_l(\xi, x), f(\xi) \rangle = \langle Z_l(\xi, x), T_l(f)(\xi) \rangle$  nach Lemma 10.6.5, und wegen der Reproduktionsformel in Abschnitt 10.1 dann gleich  $T_l(f)(x)$ . Also gilt  $T_l(f)(x) = T_l(g)(x)$  für alle  $l$ .  $\square$

Das benutzte Argument zeigt unter gleichen Voraussetzungen

**Satz 10.11.** Die harmonische Funktion  $f(x)$  lässt sich um  $x_0$  (hier obdA  $x_0 = 0$ ) in eine konvergente Potenzreihe vom Konvergenzradius  $\geq R$  entwickeln

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) .$$

Die Funktionen  $P_l(x) \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  sind harmonische Polynome auf  $\mathbb{R}^n$  und homogen vom Grad  $l$ , und sind wie folgt durch  $f$  bestimmt

$$P_l(x) = \frac{1}{R^2} \int_S f(\xi) Z_l(x, \xi) \sigma_{n-1}(\xi) .$$

**Bemerkung.** Der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung ist daher mindestens (!) so groß wie der Radius  $R$  jeder Vollkugel um  $x_0$ , die vollkommen im Definitionsbereich  $U$  von  $f$  enthalten ist.

Aus der Mittelpunktsformel kann man ohne große Mühe das sogenannte **Maximumsprinzip** folgern: Nimmt eine harmonische Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  ihr Maximum (Minimum) in einem Punkt  $x_0 \in U$  an, dann ist  $f$  konstant auf jeder offenen Kugel in  $U$  mit Mittelpunkt  $x_0$ .

## 10.5 Entwicklung auf Kugelschalen

Sei  $X = X[\rho, R]$  eine abgeschlossene Kugelschale und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge, die  $X$  enthält. ObdA sei  $0 < \rho < R$  und

$$f : V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{harmonisch} .$$

**Satz 10.12.** Auf  $V$  harmonische Funktionen  $f(x)$  lassen sich auf Kugelschalen  $X[\rho, R] \subset V$  in absolut und gleichmässig konvergente Reihen entwickeln der Gestalt (siehe Abschnitt 5.10)

$$f(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))} (a_{lk} \cdot P_{l,k}(y) + b_{lk} \cdot P_{l,k}^*(y)) .$$

Im Fall  $(n, l) = (2, 0)$  ist hierbei  $P_{0,1}^*(x)$  formal durch  $\log(r)$  zu ersetzen.

**Beweis.** Sei  $n > 2$ ; der Fall  $n = 2$  geht analog. Wir entwickeln  $f$  in eine Potenzreihe auf  $X[\rho, R]$ . Die Einschränkung von  $f$  auf jede Sphäre  $S(r)$  für  $r \in [\rho, R]$  definiert eine stetige Funktion auf  $S(r)$ , und ist somit in  $L^2(S(r))$  enthalten. Für harmonische Polynome  $P \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  gilt daher durch Transformation auf die Einheitssphäre  $S$ , mittels  $y = r\xi$  und der Notation  $f_r(\xi) := f(r\xi)$ ,

$$\int_S f_r(\xi) P(\xi) \sigma_{n-1}(\xi) = r^{-n-l} \int_{S(r)} f(y) P(y) \sigma_{n-1}(y) = ar^l + br^{-l-\kappa}$$

für Konstanten  $a, b$ , welche nur von  $f, P$  abhängen aber nicht von  $r$ . Letzteres folgt aus Lemma 10.5, wobei wir der Einfachheit halber  $(n, l) \neq (2, 0)$  angenommen haben! Anwenden von  $r \frac{d}{dr}$  liefert<sup>3</sup> auf Grund des Vertauschungssatzes 4.32

$$\int_S (Ef)_r(\xi) P(\xi) \sigma_{n-1}(\xi) = l \cdot ar^l - (l + \kappa) \cdot br^{-l-\kappa},$$

und damit  $\frac{2l+\kappa}{l+\kappa} \cdot ar^l = \langle f_r + \frac{1}{l+\kappa} (Ef)_r, P \rangle$ , beziehungsweise wegen  $(r \frac{d}{dr})^m f_r = (E^m f)_r$

$$\frac{(2l + \kappa)l^m}{l + \kappa} \cdot ar^l = \langle (E^m f)_r + \frac{1}{l + \kappa} (E^{m+1} f)_r, P \rangle.$$

Das Skalarprodukt rechts kann durch  $c_1 \cdot \max_{\xi \in S} |P(\xi)|$  abgeschätzt werden. Die Konstante  $c_1$  hängt dabei nur von  $f$  und  $m$  ab und nicht von  $l$ . Für  $P = P_{l,k}$ ,  $a = a_{lk}$  und  $l > 0$  liefert dies  $|a_{lk}r^l| \leq C_1 \cdot l^{-m} \max_{\xi \in S} |P_{l,k}(\xi)|$  für eine Konstante  $C_1$ , welche nur von  $f$  und  $m$  abhängt. Dies schätzt  $\sum_{k=1}^{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))} |a_{lk} \cdot P_{l,k}(r\xi)|$  durch  $C_1 l^{-m} \cdot \sum_{k=1}^{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))} \max_{\xi \in S} (P_{l,k}(\xi))^2$  ab. Aus Lemma 10.2 folgt  $0 \leq P_{l,k}(\xi)^2 \leq Z_l(\xi, \xi) \leq \frac{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))}{\text{vol}(S)}$ . Wegen  $\frac{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))}{\text{vol}(S)} \leq C_2 \cdot l^n$  (Satz 5.19) gilt also

$$\sum_{k=1}^{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))} |a_{lk} \cdot P_{l,k}(r\xi)| \leq \text{vol}(S) C_1 C_2 \cdot l^{2n-m} \leq \text{const.} \cdot l^{-2},$$

da wir obdA  $m = 2n + 2$  wählen können. Ähnlich kann man  $\sum_k b_{lk} P_{l,k}^*(r\xi)$  abschätzen. Gilt  $x \in S$  und  $r \in [\rho, R]$ , folgt aus  $\sum_{l=1}^{\infty} l^{-2} < \infty$  daher für  $y = r \cdot x \in X[\rho, R]$  die absolute und gleichmässige Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite der noch zu zeigenden Identität

$$f_r(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))} (a_{lk}r^l + b_{lk}r^{-l-\kappa}) \cdot P_{l,k}(x).$$

Damit ist die rechte Seite der Formel in Satz 10.12 wohldefiniert und harmonisch auf ihrem Definitionsbereich  $X[\rho, R]$ . Weiterhin haben die linke und die rechte Seite der Formel in Satz 10.12 die selben Skalarprodukte mit allen Funktionen der Hilbertraum-Basis  $P_{l,k}(x)$  (Satz 10.7) von  $L^2(S)$ . Deshalb sind beide Seiten f.ü. gleich als Funktion auf  $S$  (Korollar 8.9) bei festem  $r$ . Damit sind beide Seiten aus Stetigkeitsgründen (Satz 2.24 und Lemma 8.11) gleich auf ganz  $S$ . Aus  $P_{k,l}(y) = r^l P_{k,l}(x)$  resp.  $P_{k,l}^*(y) = r^{-l-\kappa} P_{k,l}(x)$  resp.  $f(y) = f_r(x)$  folgt daher die Behauptung (im Fall  $n > 2$ ).  $\square$

<sup>3</sup>Für das Eulerfeld  $E = \sum_{i=1}^n x_i \partial_i$  gilt  $r^2 \Delta(Ef) = E(r^2 \Delta(f)) = 0$ . Deshalb ist auch  $Ef$  harmonisch auf  $V$ , sowie dann alle  $E^m f$  für  $m \in \mathbb{N}$ . Aus der Kettenregel folgt  $(Ef)(r\xi) = r \frac{d}{dr} f(r\xi)$  für reelles  $r > 0$  und  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

**Satz 10.13 (Hebbarkeitssatz).** Sei  $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < R\}$  und  $f : B \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  eine harmonische Funktion. Ist  $f$  beschränkt auf  $\{x \neq x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$  für ein  $r$  mit  $0 < r < R$ , dann lässt sich  $f$  zu einer harmonischen Funktion auf ganz  $B$  fortsetzen.

Aus Lemma 10.5 folgt wie im Beweis von Lemma 10.6.2 aus der Beschränktheit von  $f$  das Verschwinden der Koeffizienten  $b = b_{kl}$ . Damit folgt das Resultat leicht aus Satz 10.12.

## 10.6 Die Potential Gleichung

Für eine gegebene  $C^\infty$ -Funktion  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (hier der Einfachheit halber  $n \geq 3$ ) suchen wir Lösungen  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  der **Potential Gleichung** oder auch **Laplace Gleichung**

$$\boxed{-\Delta u(x) = \rho(x)}.$$

Hat man eine Lösung  $u(x)$  gefunden, dann ist jede andere Lösung von der Gestalt  $u(x) + f(x)$  für eine harmonische Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Unter geeigneten Bedingungen an das Abklingen der Lösungen im Unendlichen (etwa  $\leq \text{const} \cdot r^{-\varepsilon}$  für ein  $\varepsilon > 0$ ) ist die Lösung der Poisson Gleichung eindeutig, d.h. es gilt  $f(x) = 0$ . Dazu benutzt man

**Satz 10.14.** Beschränkte harmonische Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sind konstant.

**Beweis.** (Im Prinzip ist das Satz 10.13). Wegen Satz 4.8 genügt zu zeigen  $df(x_0) = 0$  für alle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Zum Beweis von  $df(x_0) = 0$  sei obdA  $x_0 = 0$ . Satz 10.9 und Satz 4.32 zeigen dann für den Poissonkern  $P(x, \xi)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(0) = \frac{1}{R^2} \int_{S(R)} f(\xi) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} P(x, \xi) \Big|_{x=0} \right) \sigma_{n-1}(\xi).$$

Aus  $|\text{vol}(S) \partial_i P(x, \xi)_{x=0}| = n |\xi_i| |\xi|^{-n} \leq n R^{1-n}$  folgt  $|\text{vol}(S) \partial_i f(0)| \leq R^{-2} \cdot \max(|f|) \cdot n R^{1-n} \text{vol}(S(R)) = \frac{n \text{vol}(S)}{R}$ . Also folgt  $\partial_i f(0) = 0$  im Limes  $R \rightarrow \infty$ .  $\square$

Das **Coulomb** oder **Newton Potential**  $Q(x, y)$  zum (fixierten) Punkt  $y$

$$\boxed{Q(x, y) = \frac{1}{\kappa \cdot \text{vol}(S^{n-1}) \|x-y\|^\kappa}}, \quad \kappa = n - 2 > 0$$

ist lokal eine integrierbare Funktion und definiert daher eine Distribution auf  $\mathbb{R}^n$ . Aus Korollar 7.6 und Lemma 7.7 folgt für  $Q(x) = Q(x, 0)$

**Satz 10.15 (Existenz).** Für  $\rho(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\kappa = n - 2 > 0$  ist  $u(x) = (Q * \rho)(x)$  in  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  für die Fundamentallösung  $Q(x) = \frac{1}{\kappa \cdot \text{vol}(S^{n-1}) \|x\|^\kappa}$ , und  $u(x)$  definiert eine Lösung der Potential Gleichung  $-\Delta u = \rho$ .

**Bemerkung.** Intuitiver vom physikalischen Standpunkt ist die Formel

$$\boxed{u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(y)}{(n-2) \text{vol}(S^{n-1}) \|x-y\|^\kappa} \omega_n}.$$

Wir überlassen es dem Leser diese einfachere Formel mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz abzuleiten. Mit der so erhaltenen Formel lässt sich die gefundene Lösung der Poisson Gleichung deuten als Verschmierung des **Coulomb** oder **Newton Potentials**  $Q(x, y)$  im Punkt  $y$ .

**Bemerkung.** In der **Elektrostatik** reduziert sich das Vektorpotential  $A$  auf dem  $\mathbb{R}^4$  (siehe Abschnitt 5.15) auf die 1-Form  $A = -u(x, y, z)dt$  und der Vierer-Strom  $j$  reduziert sich auf die 1-Form  $j = -\rho(x, y, z)dt$ . Die Maxwellgleichungen vereinfachen sich daher zu der Gleichung

$$-\Delta u(x, y, z) = \rho(x, y, z)$$

für die statische Ladungsverteilung  $\rho = \rho(x, y, z)$ . Das Lösungspotential  $u$  liefert Satz 10.15. Durch das Postulat, daß im Unendlichen die Lösung  $u(x, y, z)$  abklingt oder zumindestens beschränkt ist, wird die Lösung  $u$  (bis auf eine Konstante) eindeutig.

**Bemerkung.** Sei  $X$  eine Kugelschale  $X$  um einen Punkt  $x_0$  und sei  $\text{obd}A \ x_0 = 0$ . Ist die Ladungsdichte  $\rho(x, y, z)$  Null auf  $X$  (eine physikalisch typische Situation wenn alle Ladungen im Inneren konzentriert sind), dann ist  $u(x, y, z)$  auf  $X$  eine harmonische Funktion und kann dort nach Satz 10.12 in eine Potenzreihe entwickelt werden. Nimmt man sogar an  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq r\}$ , d.h. ist also  $R = +\infty$ , und ist  $u(x, y, z)$  ausserdem beschränkt auf  $X$ , dann folgt aus Satz 10.13 die harmonische Fortsetzbarkeit der Kelvin Transformierten  $u^*(x, y, z)$  von  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x\| < \frac{1}{r}\}$  auf die offene Kugel  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \frac{1}{r}\}$ . Damit lässt sich  $u(x, y, z)$  im Bereich  $\|x\| \geq r + \varepsilon$  (für jedes  $\varepsilon > 0$ ) in eine absolut und gleichmässig konvergente Reihe der Gestalt

$$u(x, y, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^{k=+l} b_{kl} \cdot P_{k,l}^*(x, y, z)$$

entwickeln für gewisse Koeffizienten  $b_{kl}$ . Aus der Kenntnis von  $u$  auf  $X$ , d.h. aus dieser Entwicklung, kann man die Ladungsdichte  $\rho$  ausserhalb von  $X$  aber nicht rekonstruieren! Im Gegenteil: Für den Beobachter in  $X$  erscheint es auf Grund dieser Formel eher so, als sei alle Ladung in infinitesimaler Nähe<sup>4</sup> des Ursprungs  $x_0 = 0$  konzentriert!

**Bemerkung 10.16.** Im Gegensatz zur Potentialgleichung besitzt die d'Alembertgleichung

$$\square A = 0$$

viele beschränkte Lösungen, etwa  $A = f(\sum_{\nu=1}^4 a_{\nu}x_{\nu})$  für  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  mit  $q_L(a) = 0$  und eine beliebige (beschränkte) Funktion  $f \in C^2(\mathbb{R})$ . Die einzige Lösung im Schwartzraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  ist dagegen  $A = 0$ , denn die Fourier Transformierte  $\mathcal{F}(A) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  hat dann ihren Träger im Lichtkegel (Lemma 8.15). Da der Lichtkegel eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^4$  ist, folgt daraus  $\|A\|^2 = \|\mathcal{F}(A)\|^2 = 0$  und damit  $A = 0$ .

<sup>4</sup>Physiker nennen dies die **Multipolentwicklung** des Potentials in  $x_0$ . Die Terme  $P_{k,l}^*(x, y, z)$  können als Potentiale von  $2^l$  infinitesimal in der Nähe von  $x_0$  konzentrierten Ladungen gedeutet werden. Im Beispiel  $l = 1$  betrachten wir zwei Elementarladungen entgegengesetzten Vorzeichens im Punkt  $\frac{1}{2}\xi$  und  $-\frac{1}{2}\xi$  (**Dipol**). Im Limes  $t \rightarrow 0$  für  $\xi = t \cdot \xi_0$  gilt

$$\frac{1}{\|\xi\|} \left( \frac{1}{\|x + \frac{1}{2}\xi\|} - \frac{1}{\|x - \frac{1}{2}\xi\|} \right) \rightarrow \frac{(\xi_0/\|\xi_0\|, x)}{\|x\|^3} = P^*(x)$$

für das lineare harmonische Polynom  $P(x) = (\xi_0/\|\xi_0\|, x)$ .

# 11 Ausgewählte Themen II

## 11.1 Kugelvolumina

Sei  $E^n \subseteq \mathbb{R}^n$  die Einheitskugel, d.h.  $x \in E^n \Leftrightarrow \|x\| \leq 1$ .

*Polarkoordinaten.* Für die Polarkoordinaten Abbildung  $(0, 1) \times \prod_{i=1}^{n-2} [0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow E^n$

$$(x_1, \dots, x_n) = r \cdot \left( \cos(\alpha_1), \cos(\alpha_2) \sin(\alpha_1), \dots, \cos(\alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-2} \sin(\alpha_i), \prod_{i=1}^{n-1} \sin(\alpha_i) \right).$$

hat die Jacobideterminante die Gestalt  $r^{n-1} \cdot g(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$  für eine Funktion  $g(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$  in den **Eulerwinkeln**  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ . Setze  $\text{vol}(S^{n-1}) := \int_0^\pi \cdots \int_0^{2\pi} g(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) d\alpha_1 \cdots d\alpha_{n-1}$ .

Durch Berechnung in Polarkoordinaten (Satz 4.27) oder mit Hilfe von Lemma 9.8 folgt

$$\boxed{\text{vol}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}) = \text{vol}(E^n) \cdot R^n}$$

für das Volumen  $\text{vol}(E^n)$  der Einheitskugel, sowie

**Lemma 11.1.**

$$\boxed{\text{vol}(S^{n-1}) = \int_{S^{n-1}} \sigma_{n-1} = n \cdot \text{vol}(E^n)}$$

Um das Volumen  $\text{vol}(S^{n-1})$  der Einheitskugel und damit  $\text{vol}(E^n)$  zu bestimmen berechnen wir folgendes Integral einmal mit Hilfe von Lemma 8.15.4

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-r^2) dx_1 \dots dx_n = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx = \pi^{\frac{n}{2}}$$

und einmal in Polarkoordinaten (oder mit Hilfe von Lemma 9.8):

$$I = \text{vol}(S^{n-1}) \int_{r>0} r^{n-1} \exp(-r^2) dr = \frac{\text{vol}(S^{n-1})}{2} \int_{r>0} r^{\frac{n}{2}} \exp(-r) \frac{dr}{r}.$$

Für die **Gammafunktion**  $\Gamma(s) := \int_{r>0} r^s \exp(-r) \frac{dr}{r}$  liefert partielle Integration

$$\boxed{\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)}, \quad (s > 0).$$

Der Vergleich berechnet  $\text{vol}(S^{n-1})$  in Termen der  $\Gamma$ -Funktion

**Lemma 11.2.**

$$\boxed{\text{vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}}.$$

Aus  $\text{vol}(S^0) = \text{vol}(E^1) = 2$  und  $\text{vol}(S^1) = 2\text{vol}(E^2) = 2\pi$  folgt daher  $\Gamma(1) = 1$  und  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{1/2}$ . Mittels der Rekursionsgleichung der Gammafunktion kann man damit dann alle weiteren Werte  $\Gamma(\frac{n}{2})$  leicht bestimmen. Es ergibt sich

$$\text{vol}(S^{n-1}) = 2, 2\pi, 4\pi, 2\pi^2, \dots$$

in den Fällen  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ .

**Bemerkung.** Die Eigenschaft

$$d\sigma_{n-1} = n \cdot \omega_n$$

und die Drehinvarianz  $M^*(\sigma_{n-1}) = \sigma_{n-1}$  unter Drehungen  $M$  in der orthogonalen Gruppe  $SO(n, \mathbb{R})$  (in allen Teilebenen in den  $i, j$ -Koordinatenrichtungen für  $1 \leq i < j \leq n$ ) bestimmen<sup>1</sup> die Kugelflächen Form  $\sigma = \sigma_{n-1}$  in  $A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  eindeutig.

In der Fußnote wird unter anderem gezeigt, daß die der Kugelflächenform  $\sigma_{n-1}$  zugeordnete **Potentialform**

$$\rho = \frac{\sigma_{n-1}}{r^n} \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

welche einen Singularität im Nullpunkt besitzt, eine geschlossene rotationssymmetrische Differentialform auf  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist:

$$d\rho = 0.$$

Bei Integration über die Sphäre  $S^{n-1}$  liefert die Potentialform  $\rho$  dasselbe Integral  $nc(n) \neq 0$  wie die Oberflächenform  $\sigma_{n-1}$ , da  $r = 1$  ist auf der Einheitskugel. Im Gebiet  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist deshalb das Poincare Lemma nicht erfüllt im Grad  $i = n-1$  (das verallgemeinert die Bemerkung auf Seite 73 im Fall  $n = 2$ )

**Lemma 11.3.**  $\rho \notin d(A^{n-2}(U)).$

**Beweis.** Angenommen  $\rho = d\eta$ , dann folgt  $nc(n) = \int_{S^{n-1}} \rho = \int_{S^{n-1}} d\eta$  für ein  $\eta \in A^{n-2}(U)$ . Eine stärkere Version (!) des Satzes von Stokes (Übungsaufgabe; hier ohne Beweis) würde dann folgenden Widerspruch liefern  $0 \neq n \cdot c(n) = \int_{S^{n-1}} d\eta = \int_{\partial S^{n-1}} \eta = 0$ , letzteres wegen  $\partial S^{n-1} = \emptyset$ . □

---

<sup>1</sup>Ist  $\sigma = \sum f_i(x) * dx_i$  invariant unter allen Drehungen  $M = M(\alpha)$  in Richtung der  $x_1, x_2$ -Ebene mit Winkeln  $\alpha$ , d.h. gilt  $M^*(\sigma) = \sigma$ , dann folgt  $f_1(x) = \cos(\alpha)f_1(\cos(\alpha)x_1 + \sin(\alpha)x_2, -\sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2, \dots) - \sin(\alpha)f_2(\cos(\alpha)x_1 + \sin(\alpha)x_2, -\sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2, \dots)$  für alle  $\alpha$ . Wenn man diese Relation nach  $\alpha$  ableitet und  $\alpha = 0$  setzt, folgt daraus  $x_1 f_2(x) = x_2 f_1(x)$ . Macht man dies analog für andere Koordinaten-Ebenen, so folgt  $f_i(x) = x_i \cdot f(x)$  für eine Funktion  $f(x)$ , welche auf Sphären konstant ist und daher nur vom Radius  $r$  abhängt. Also  $\sigma = f(r) \cdot \sigma_{n-1}$ . Fordert man noch  $d\sigma = n \cdot \omega_n$ , so folgt aus  $d\sigma = df \wedge \sigma_{n-1} + n f \omega_n$  die inhomogene lineare Differentialgleichung  $\sum_{i=1}^n x_i \partial_i f(x) + n f(x) = n$ , oder wegen  $\partial_i f(r) = \frac{x_i}{r} \frac{d}{dr} f(r)$  dann  $r \frac{d}{dr} f(r) + n f = n$ . Also  $f = 1 + g$  für eine Lösung  $g(r) = c \cdot r^{-n}$  der homogenen Gleichung  $r \frac{d}{dr} g(r) + n g(r) = 0$ . Nur für  $c = 0$  ist diese Lösung differenzierbar im Punkt Null.

## 11.2 Überdeckungskompaktheit

**Satz 11.4 (Heine-Borel).** Für einen folgenkompakten metrischen Raum  $(X, d)$  gilt: Jede Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  durch offene Teilmengen  $U_i \subseteq X$  besitzt eine Überdeckung durch endlich viele der Mengen  $U_i$ . (Die Umkehrung gilt auch).

**Beweis.** 1) Für jedes  $\varepsilon > 0$  besitzt ein folgenkompakter Raum  $(X, d)$  eine Überdeckung durch endlich viele offene Kugeln  $K_\varepsilon(x_i)$  vom Radius  $\varepsilon$ . [Anderenfalls gäbe es eine Folge  $x_1, x_2, \dots$  in  $X$  mit  $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} K_\varepsilon(x_i)$ . Diese würde wegen  $d(x_n, x_m) > \varepsilon$  keine konvergente Teilfolge besitzen. Ein Widerspruch zur Folgenkompaktheit von  $(X, d)$ . Für  $\varepsilon = 1/n$  liefert diese Beobachtung endlich viele Kugelmittelpunkte und die Vereinigung all dieser Punkte für  $n \in \mathbb{N}$  ist eine abzählbare Teilmenge  $M$  von  $X$ .

2)  $M$  liegt dicht in  $X$ . [Sei  $x \in X$  beliebig und  $U = K_\varepsilon(x)$  eine offene Kugel um  $x$  vom Radius  $\varepsilon > 0$ . Sei  $1/n < \varepsilon$ , dann existiert ein  $\xi \in M$  mit  $x \in K_{1/2n}(\xi)$ . Aus der Dreiecksungleichung folgt dann  $x \in K_{1/2n}(\xi) \subset U$ ].

3) Sei  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine beliebige Überdeckung von  $X$  durch offene Mengen  $U_i \subset X$ . Für jedes  $x \in X$  gibt es dann ein  $i \in I$  mit  $x \in U_i$  sowie dann eine Kugel  $U = U_x = K_\varepsilon(x)$  in  $U_i$ , da  $U_i$  offen in  $X$  ist. Offensichtlich ist dann auch  $X = \bigcup_{x \in X} U_x$  eine Überdeckung von  $X$  durch offene Teilmengen. Wegen Schritt 2) gilt dann  $X = \bigcup_{n, \xi} K_{1/2n}(\xi)$  für eine gewisse Teilmenge  $J$  der  $(n, \xi) \in \mathbb{N} \times M$ .  $J$  ist daher abzählbar! Es gilt also  $X = \bigcup_{j \in J} V_j$  für  $V_j = K_{1/2n}(\xi)$  derart daß nach Schritt 2) jedes  $V_j, j \in J$  in einer der offenen Mengen  $U_i, i \in I$  enthalten ist. Lässt sich  $X$  durch endlich viele der  $V_j$  überdecken, dann erst recht durch endlich viele der  $U_i$ . Dies reduziert den Beweis auf den Fall, wo die Indexmenge  $I$  abzählbar ist.

4) Wegen des letzten Schrittes sei also  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  eine abzählbare Vereinigung. Man kann die  $U_i$  durch die aufsteigende Folge der offenen Mengen  $\bigcup_{j \leq i} U_j$  ersetzen und daher oBdA annehmen  $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ . Dann bilden die abgeschlossenen Komplemente  $A_i = X \setminus U_i$  der  $U_i$  eine absteigende Folge  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ . Es genügt jetzt  $A_n = \emptyset$  für ein geeignetes  $n$ , denn dann gilt  $X = U_n$ . Gäbe es ein solches  $n$  nicht, gibt es eine Folge  $x_n \in X$  mit  $x_n \in A_n$ . Da  $X$  folgenkompakt ist, kann durch Übergang zu einer Teilfolge oBdA angenommen werden  $x_n \rightarrow x$  sei konvergent in  $(X, d)$ . Es gilt  $x \in U_m$  für ein  $m$ . Da  $U_m$  offen ist, liegen dann fast alle Folgenglieder der Teilfolge  $x_n$  in  $U_m$ , also  $x_n \notin A_m$  für alle  $n \geq n_0$ . OBdA ist hierbei  $n_0 \geq m$ . Dies ist ein Widerspruch wegen  $x_n \in A_n \subset A_m$  für alle  $n \geq n_0$ .  $\square$

Metrische Räume können skurrile Eigenschaften besitzen<sup>23</sup>

<sup>2</sup>Eine Menge  $X$  mit  $d(x, y) = 0$  für  $x = y$  und  $d(x, y) = 1$  für  $x \neq y$  definiert einen metrischen Raum  $(X, d)$ . Eine Teilmenge  $A \subset X$  ist kompakt in  $(X, d)$  genau dann, wenn  $A$  endlich ist. Jede Kugel in  $(X, d)$  ist kompakt oder gleich  $X$ . Ist  $X$  nicht abzählbar, dann ist  $X$  keine abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen und besitzt keine abzählbare dichte Teilmenge.

<sup>3</sup>Sei  $X \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  die Teilmenge aller Punkte  $P = (x, y)$  für die im Fall  $y \neq 0$  die Zahl  $x/y$  in  $\mathbb{Q}$  ist. Versieht man  $X$  mit der Wegemetrik  $d$  (Hierbei sei  $d(P, Q)$  die Länge des kürzesten Weges zwischen  $P$  und  $Q$  in  $X$ ), dann ist keine Kugel in  $X$  um  $P = (0, 0)$  kompakt. Dennoch ist  $X$  eine abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen und besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge. Jede Funktion  $f \in C_c(X)$  verschwindet im Punkt  $x = 0$ .

## 11.3 Residuensatz

Sei  $\varepsilon > 0$  und

$$f : U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \|z - z_0\| < \varepsilon\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine auf  $U$  holomorphe Funktion.

**Satz 11.5 (Laurent Entwicklung).**  $f(z)$  ist dann auf jedem kompakten Kreisring in  $U$  in eine absolut und gleichmässig konvergente Potenzreihe entwickelbar

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot (z - z_0)^l + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cdot (z - z_0)^{-l}.$$

Man nennt den Koeffizient  $b_1$  das **Residuum**  $\text{Res}_{z_0}(f)$  der Funktion  $f$  bei  $z_0$ .

**Beweis.** ObdA  $z_0 = 0$ . Nach Lemma 5.9 sind Real- und Imaginärteil von  $f(z)$  harmonisch. Die harmonischen Polynome in  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^2)$  sind  $\text{Re}(z^l)$  und  $\text{Im}(z^l)$  und somit folgt aus Satz 10.12 die Existenz einer Entwicklung  $f(z) = a_0 + b_0 \cdot \log(|z|) + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l z^l + \tilde{a}_l \bar{z}^l) + \sum_{l=1}^{\infty} (b_l z^{-l} + \tilde{b}_l \bar{z}^{-l})$ . Nach Annahme gilt  $\bar{\partial}_z f = 0$  für  $\bar{\partial}_z := \partial_x + i\partial_y$  (siehe Abschnitt 5.2). Gliedweises Ableiten mit  $\bar{\partial}_z$  gibt  $\frac{b_0}{z} + \sum_{l=0}^{\infty} l \tilde{a}_l \bar{z}^{l-1} - \sum_{l=1}^{\infty} l \tilde{b}_l \bar{z}^{-l-1} = 0$ , d.h.  $b_0 = \tilde{b}_l = \tilde{a}_l = 0$ ,  $l \neq 0$ .  $\square$

**Bemerkung.** Der letzte Satz liefert für  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = z_0 + r \cdot \exp(it)$  und  $0 < r < \varepsilon$  die Formel

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z_0}(f).$$

Satz 6.11 zeigt nämlich  $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot \int_{\gamma} (z - z_0)^l dz + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cdot \int_{\gamma} (z - z_0)^{-l} dz$ . Beachte

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i \quad \text{sowie} \quad \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 0, \quad (n \neq -1)$$

wegen  $(z - z_0)^n dz = d \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1}$  für  $n \neq -1$  (für beides siehe Abschnitt 5.2).

**Lemma 11.6.** Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion und ist  $U$  eine sternförmige offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , dann gilt  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$ .

**Beweis.** Nach Lemma 5.5.1 ist die Differentialform  $\omega = f(z) dz$  für holomorphes  $f(z)$  geschlossen:  $d\omega = 0$ . Ist der Definitionsbereich  $U$  von  $f$  offen und sternförmig, folgt aus dem Poincaré Lemma die Existenz eines Potentials  $\phi$  mit  $\omega = d\phi$ . Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ein Weg in  $U$ , gilt also  $\int_{\gamma} \omega = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$ . Ist der Weg  $\gamma$  in  $U$  geschlossen, folgt  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .  $\square$

Sei nun  $Q = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$  ein beschränkter Quader im  $\mathbb{R}^2$ . Wir entfernen aus  $Q$  offene Kreise vom Radius  $\varepsilon > 0$  um die Eckpunkte und erhalten eine abgeschlossene Menge  $X$ . Nach Konstruktion gilt  $X \subset Q$ . Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  mit  $X \subset U$  und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Wurde  $\varepsilon > 0$  klein genug gewählt, enthält  $U$  eine sternförmige offene Teilmenge  $V \subseteq U$  welche ganz  $X$  enthält. Wegen Lemma 11.6 folgt daraus  $\int_{\partial X} f(z) dz = 0$ . Dies zeigt

**Satz 11.7 (Residuensatz).** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^2$  ein Quader und  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine offene Menge, welche  $Q$  enthält. Seien  $z_1, \dots, z_l$  endlich viele Punkte in  $Q \setminus \partial Q$  und sei  $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_l\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} f(z) dz = \sum_{\nu=1}^l \text{Res}_{z_\nu}(f).$$

**Beweis.** Wir zerlegen den Quader  $Q$  in endlich viele Teilquader so, daß alle Punkte  $z_\nu$  für  $\nu = 1, \dots, l$  zu Eckpunkten werden. Wir wählen dann  $\varepsilon > 0$  klein genug so daß das Innere aller Teilquader nach Herausnahme kleiner Kreisscheiben vom Radius  $\varepsilon$  um die Eckpunkte sternförmig wird. Seien  $\gamma_\nu : [0, 2\pi] \rightarrow U$  kleine Kreisinge in  $U$  definiert durch  $\gamma_\nu(t) = z_\nu + \varepsilon \cdot \exp(it)$ . Dann gilt  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} f(z) dz = \sum_{\nu=1}^l \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\nu} f(z) dz$ , denn die Differenz beider Seiten schreibt sich als eine endliche Summe von Integralen  $\int_\gamma f(z) dz$  über Wege, die in einem sternförmigen offenen Teil von  $U$  enthalten sind und daher nach Lemma 11.6 verschwinden. Ist  $\varepsilon$  klein genug, dann liegt  $\gamma_\nu$  in  $U$  und  $f$  ist holomorph auf  $\{z \mid 0 < \|z - z_\nu\| < 2\varepsilon\}$ . Daraus folgt  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\nu} f(z) dz = \text{Res}_{z_\nu}(f)$ , wie oben gezeigt wurde. Dies zeigt die Behauptung.  $\square$

## 11.4 Wärmeleitungskern

Die Funktion  $f_t(x) = t^{-n/2} e^{-\pi \frac{\|x\|^2}{t}}$  ist definiert auf  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n$  und stellt dort eine  $C^\infty$ -Funktion dar. Man zeigt leicht, daß sie dort eine Lösung der **Wärmeleitungsgleichung**

$$4\pi \partial_t f_t(x) = \Delta f_t(x)$$

ist. Wir studieren im Folgenden das Verhalten der Funktion im rechtsseitigen Limes  $t \rightarrow 0^+$  (im Spezialfall  $n = 1$ ). Im physikalischen Kontext bedeutet dies in der Regel: Entweder die Zeit  $t$  geht gegen Null oder die Temperatur oder Energie  $T = \frac{1}{t}$  geht gegen unendlich. Man nennt die Funktion  $f_t(x - y)$  den **Wärmeleitungskern**.

**Lemma 11.8.** Für  $t > 0$  und  $f_t(x) = t^{-1/2} e^{-\pi \frac{x^2}{t}}$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f_t(x) dx = 1.$$

**Beweis.** Man reduziert dies mittels Variablensubstitution auf den Spezialfall  $t = 1$ , der in Lemma 8.15 bewiesen wurde.  $\square$

Für  $0 < t \leq \delta$  kann das Integral  $\int_{|x| \geq \delta} f_t(x) dx$  durch  $\int_{|x| \geq 1} \frac{\delta}{t^{1/2}} \exp(-\pi \frac{\delta^2}{t} x^2) dx$ , oder damit  $\int_1^\infty \frac{\delta}{t^{1/2}} \exp(-\pi \frac{\delta^2}{t} y) dy = \frac{t^{1/2}}{\pi \delta} \cdot \exp(-\pi \frac{\delta^2}{t}) \leq c(\delta) t^{1/2}$  für  $c(\delta) = \frac{\exp(-\pi \delta)}{\pi \delta}$  abgeschätzt werden.

**Lemma 11.9.** Für eine beschränkte stetige Funktion  $g(x)$  auf  $\mathbb{R}$  gilt<sup>4</sup>

$$g(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} g(x) f_t(x) dx.$$

<sup>4</sup>Insbesondere gilt hier im Fall  $g(0) \neq 0$  also  $g(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} g(x) f_t(x) dx \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow 0^+} g(x) f_t(x) dx = 0$ . Dies demonstriert, wie essentiell die Bedingungen in Satz 6.12 sind.

**Beweis.** Indem man  $g(x)$  durch  $g(x) - g(0)$  ersetzt kann obdA  $g(0) = 0$  angenommen werden [benutze  $\int_{\mathbb{R}} f_t(x)dx = 1$ ]. Nach Annahme gilt  $|g(x)| \leq C$  für eine Konstante  $C$ . Wegen der Stetigkeit von  $g$  gibt es für  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|g(x) - g(0)| < \varepsilon$  für  $|x| < \delta$ . Es gilt  $|\int_{|x| \leq \delta} g(x)f_t(x)dx| \leq \varepsilon \int_{|x| \leq \delta} f_t(x)dx$  wegen  $f_t(x) \geq 0$ . Weiterhin ist  $|\int_{|x| \geq \delta} g(x)f_t(x)dx| \leq C \int_{|x| \geq \delta} f_t(x)dx$ . Für  $t \leq \delta$  ist dies wie oben gezeigt  $\leq Cc(\delta) \cdot t^{1/2}$  und geht gegen Null im Limes  $t \rightarrow 0$ . Es folgt

$$-\varepsilon \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f_t(x)dx \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} g(x)f_t(x)dx \leq +\varepsilon \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f_t(x)dx.$$

Aus  $\int_{\mathbb{R}} f_t(x)dx = 1$  (Lemma 11.8) folgt dann sofort die Behauptung. □

## 11.5 Spinordarstellung

Der  $K$ -Vektorraum  $\mathcal{S}_n$  der Polynome in den antikommutierenden Variablen  $\theta_1, \dots, \theta_n$  mit Koeffizienten in  $K$  besitzt folgende ausgezeichnete  $K$ -lineare Endomorphismen für  $\nu = 1, \dots, n$

$$\theta_\nu : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n \quad (\text{Linksmultiplikation mit } \theta_\nu) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \theta_\nu} : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n \quad (\text{Ableiten nach } \theta_\nu)$$

wobei  $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial \theta_\nu}$  durch  $\partial_\nu(\theta_\nu \cdot g(\theta)) = g(\theta)$  sowie  $\partial_\nu \theta^I = 0$ , falls  $\nu \notin I$ , definiert ist. Der von diesen Endomorphismen aufgespannte Untervektorraum  $V$  von  $\text{End}_K(\mathcal{S}_n)$  hat  $\dim_K(V) = 2n$ . Beachte  $\dim_K(\mathcal{S}_n) = 2^n$  und  $\dim_K(\text{End}_K(\mathcal{S}_n)) = (2^n)^2 = 2^{2n}$ .

Wie man leicht auf Monomen  $f(\theta) = \theta^I$  nachprüft, gilt in  $\text{End}_K(\mathcal{S}_n)$ , in Analogie zu den Heisenberg Kommutatorrelationen  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \circ x_\nu - x_\nu \circ \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \delta_{\nu\mu} \cdot id$ , die Formel

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta_\mu} \circ \theta_\nu + \theta_\nu \circ \frac{\partial}{\partial \theta_\mu} = \delta_{\nu\mu} \cdot id}.$$

Neben der Fourier Transformation  $\mathcal{F} \in \text{End}_K(\mathcal{S}_n)$  hat man folgende Automorphismen  $\varphi$  von  $\mathcal{S}_n$ ; erstens die *Koordinatenwechsel*<sup>5</sup>  $f(\theta) \mapsto \det(U)^{-1/2} \cdot f(TU \cdot \theta)$  für invertierbare komplexe Matrizen  $U \in \text{Gl}(n, K)$ , zweitens Multiplikationen  $f(\theta) \mapsto f_A(\theta) \cdot f(\theta)$  mit **Gaußfunktionen**  $f_A(\theta)$  für *schiefsymmetrische*<sup>6</sup> Matrizen  $A$

$$f_A(\theta) = e^{-\sum_{\nu < \mu} A_{\nu\mu} \theta_\nu \theta_\mu} \quad , \quad A_{\nu\mu} = -A_{\mu\nu} \in K.$$

Es gilt  $\partial_\nu f_A(\theta) = (\sum_{\mu < \nu} A_{\nu\mu} \theta_\mu - \sum_{\nu < \mu} A_{\nu\mu} \theta_\mu) \cdot f_A(\theta)$  sowie  $f_A(\theta)f(\theta) = f(\theta)f_A(\theta)$  für alle  $f \in \mathcal{S}_n$ . Beachte auch  $f_A(\theta)f_{A'}(\theta) = f_{A+A'}(\theta)$ .

<sup>5</sup>d.h, wir ersetzen die Variablen  $\theta_\nu$  durch  $\sum_{\mu=1}^n U_{\mu\nu} \theta_\mu$  und multiplizieren das entstehende Polynom mit der Konstante  $\det(U)^{-1/2}$  (die Wurzel existiere in  $K^*$ ; diese ist nur eindeutig bis auf ein Vorzeichen!)

<sup>6</sup> $\sum_{\nu < \mu} A_{\nu\mu} \theta_\nu \theta_\mu = \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} A_{\nu\mu} \theta_\nu \theta_\mu$  definiert eine symmetrische Bilinearform  $(\eta, \theta)_A = \sum_{\nu, \mu} A_{\nu\mu} \eta_\nu \theta_\mu$ , d.h. es gilt  $(\eta, \theta)_A = (\theta, \eta)_A$ .

Alle genannten Automorphismen  $\varphi \in Gl_K(\mathcal{S}_n)$  haben die Eigenschaft<sup>789</sup>

$$\varphi^{-1} \circ V \circ \varphi \subseteq V$$

Für die von diesen Automorphismen  $\varphi$  in  $Gl_K(\mathcal{S}_n)$  erzeugte Untergruppe  $G \subset Gl_K(\mathcal{S}_n)$  existiert daher ein Gruppenhomomorphismus

$$\iota : G \longrightarrow Gl_K(V) \quad , \quad \iota(\varphi)v := \varphi^{-1} \circ v \circ \varphi \text{ für } v \in V .$$

Der Kern  $Kern(\iota)$  besteht aus skalaren Vielfachen der Identität wegen

**Lemma 11.10.** *Sei  $\varphi \in Gl_K(\mathcal{S}_n)$ . Gilt  $\varphi \circ v = v \circ \varphi$  für alle  $v \in V$ , so ist  $\varphi = \lambda \cdot id$  ein skalares Vielfaches der Identität.*

**Beweis.** Für  $P := \varphi(1) \in \mathcal{S}_n$  gilt  $v(P) = \varphi(v(1)) = 0$  für  $v = \partial_\nu \in V, \forall \nu$ . Also  $P(\theta) = \lambda$  für  $\lambda \in K$  (benutze Induktion nach dem Grad). Erneut durch Induktion nach  $r = |I|$  folgt dann  $\varphi(\theta^I) = \lambda \cdot \theta^I$  für alle  $I$ . Benutze dazu  $\varphi(\theta_\nu \theta^I) = \theta_\nu \varphi(\theta^I)$  für  $\theta_\nu \in V$ .  $\square$

In geeigneten Koordinaten von  $V$  sind die  $2n \times 2n$ -Matrizen  $\iota(\varphi)$  gegeben durch

$$M(U) := \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^T U^{-1} \end{pmatrix} \quad , \quad M(A) := \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

und liegen daher in der orthogonalen Gruppe  $O(S, K)$  der symmetrischen  $2n \times 2n$ -Matrix  $S$ . Die Matrix  $S$  liegt in  $SO(S, K)$  genau dann, wenn  $n$  gerade ist; die anderen liegen in  $SO(S, K)$ . Wir überlassen es dem Leser folgendes nachzuweisen<sup>10</sup>

**Lemma 11.11.** *Für  $K = \mathbb{C}$  ist die von den Matrizen  $M(U), M(A), SM(A)S^{-1}$  erzeugte Untergruppe  $H \subset Gl_{\mathbb{C}}(V)$  die Gruppe  $H = SO(S, \mathbb{C})$ . Also ist  $G/Kern(\iota) = SO(S, \mathbb{C})$  oder  $O(S, \mathbb{C})$  je nachdem ob  $\dim_{\mathbb{C}}(V)$  durch 4 teilbar (d.h.  $n$  gerade) ist oder nicht.*

**Lemma 11.12.**  $Kern(\iota) = \pm id_{\mathcal{S}_n}$ .

**Beweis.**  $[f, h] := \int f^*(\theta) \cdot h(\theta) d\theta$  ist eine  $G$ -invariante  $K$ -Bilinearform auf  $\mathcal{S}_n$ . Benutze dazu  $f_A^*(\theta) = f_{-A}(\theta)$ , die ‘Leibnizformel’  $\int h({}^T U \cdot \theta) d\theta = det(U) \cdot \int h(\theta) d\theta$  (Lemma 5.26)

<sup>7</sup> $f_{-A}(\theta)\theta_\nu f_A(\theta)f(\theta) = f(\theta)$  und  $f_{-A}(\theta)\partial_\nu f_A(\theta)f(\theta) = (\partial_\nu + (\sum_{\nu < \mu} A_{\nu\mu}\theta_\mu - \sum_{\mu < \nu} A_{\nu\mu}\theta_\mu))f(\theta)$ .

<sup>8</sup> $\mathcal{F}^{-1}(\partial_\nu \mathcal{F}(f)) = \theta_\nu f$  sowie damit  $\mathcal{F}^{-1}(\theta_\nu \mathcal{F}(f)) = \partial_\nu f$  zeigt man vollkommen analog zu Lemma 8.15. Zeige zuerst  $\partial_\nu \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(\theta_\nu f)$  mit Hilfe von  $\frac{\partial}{\partial \eta_\nu} \int P(\theta, \eta) d\theta = \int \frac{\partial}{\partial \eta_\nu} P(\theta, \eta) d\theta$ . Analog  $\mathcal{F}_L^{-1} \circ \theta_\nu \circ \mathcal{F}_L = \lambda_\nu^{-1} \partial_\nu$ .

<sup>9</sup>Der Fall von Koordinatenwechseln ist klar.

<sup>10</sup>Hinweis: Der Hyperbelfall  $n = 1$  ist instruktiv, denn hier ist

$$O(S, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Für  $n \geq 2$  und  $M \in SO(S, K)$  setzt man  $v = M(e_1), w = M(e_{n+1})$  und zeigt, daß wegen  $q_S(v) = q_S(w) = 0$  und  ${}^T v S w = 1$  eine Substitution  $g \in H$  existiert mit  $g(v) = e_1$  und  $g(w) = e_{n+1}$ . Dann läßt  $gM$  den Teilraum  $W = K \cdot e_1 + K \cdot e_{n+1}$  identisch fest. Man kann sich auf das Orthokomplement  $W^\perp = \{v \in V \mid {}^T v S w = 0 \forall w \in W\}$  beschränken und schließt dann per Induktion.

und<sup>11</sup>

$$\boxed{[\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(h)] = [f, h]} \quad , \quad f, h \in \mathcal{S}_n .$$

Für  $g = \lambda \cdot id \in G$  gilt deshalb  $[\lambda \cdot f, \lambda \cdot h] = [f, h]$ , also  $\lambda^2 = 1$ . □

Das Urbild von  $SO(S, \mathbb{C})$  in  $G$  definiert wegen Lemma 11.12 eine zweiblättrige Überlagerung der Gruppe  $SO(S, \mathbb{C})$ , die sogenannte **Spingruppe**  $Spin(S, \mathbb{C}) \subseteq G$ . Die kanonische Einbettung von  $G$  in  $Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_n)$  definiert eine Darstellung

$$Spin(S, \mathbb{C}) \hookrightarrow Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_n) .$$

Die Operation von  $Spin(S, \mathbb{C})$  erhält die Teilräume  $\mathcal{S}_n^{\pm}$  der geraden resp. ungeraden Polynome in  $\mathcal{S}_n$ . Unsere Darstellung zerfällt daher in zwei Teildarstellungen  $\mathcal{S}_n^{\pm}$  der Dimension  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_n^{\pm}) = 2^{n-1}$ , die beiden **Spindarstellungen** der Gruppe  $Spin(S, \mathbb{C})$

$$\boxed{Spin(S, \mathbb{C}) \longrightarrow Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_n^{\pm})} .$$

*Physiker Notation:*  $(\mathcal{S}_n)_L$  und  $(\mathcal{S}_n)_R$  für 'links' und 'rechts' anstatt  $\mathcal{S}_n^+$  und  $\mathcal{S}_n^-$ .

## 11.6 Oszillatordarstellung

Auf dem Schwartzraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  hat man  $\mathbb{C}$ -lineare Endomorphismen für  $\nu = 1, \dots, N$

$$2\pi i x_{\nu} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \quad (\text{Multiplikation mit } 2\pi i x_{\nu}) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) .$$

Der davon aufgespannte Untervektorraum  $V$  in  $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$  hat Dimension  $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 2N$ . Neben der Fourier Transformation  $\mathcal{F} \in End_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$  betrachten wir folgende Automorphismen  $\varphi$  von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ : Die *Koordinatenwechsel*  $f(x) \mapsto \det(U)^{+1/2} \cdot f^T U \cdot \theta$  für invertierbare reelle Matrizen  $U \in Gl(n, \mathbb{R})$ , sowie Multiplikationen  $f(x) \mapsto f_S(x) \cdot f(x)$  mit Gaußfunktionen  $f_S(x)$  für *symmetrische* reelle Matrizen  $S$

$$f_S(x) = e^{-\pi i \sum_{\nu, \mu} S_{\nu\mu} x_{\nu} x_{\mu}} \quad , \quad S_{\nu\mu} = S_{\mu\nu} \in \mathbb{R} .$$

Es gilt  $\partial_{\nu} f_S(x) = (\sum_{\mu} S_{\nu\mu} x_{\mu}) \cdot f_S(x)$ . Die genannten Automorphismen  $\varphi \in Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$  haben wegen Lemma 8.15, der Substitutionsregel und wegen  $f_{-S}(x) x_{\nu} f_S(x) f(x) = f(x)$  und  $f_{-S}(x) \partial_{\nu} f_S(x) f(x) = (\partial_{\nu} + \sum_{\mu=1}^N S_{i\nu} \cdot 2\pi i x_{\mu}) f(x)$  die Eigenschaft

$$\boxed{\varphi^{-1} \circ V \circ \varphi \subseteq V} .$$

Für die von diesen Automorphismen  $\varphi$  in  $Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$  erzeugte Untergruppe  $G \subset Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$  existiert daher ein Gruppenhomomorphismus

$$\iota : G \longrightarrow Gl_{\mathbb{C}}(V) \quad , \quad \iota(\varphi)v := \varphi^{-1} \circ v \circ \varphi \quad \text{für } v \in V .$$

<sup>11</sup> $\mathcal{S}_n$  zerfällt in orthogonale Summanden  $W = Kf \oplus K\mathcal{F}(f)$ ,  $f(\theta) = \theta^I$  mit  $[f, f] = [\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(f)] = 0$  wegen Lemma 5.27. Somit genügt  $[\mathcal{F}(f), \mathcal{F}^2(f)] = [f, \mathcal{F}(f)]$  wegen  $[h, g] = \varepsilon_n [g, h]$  [beachte  $\int h^* g d\theta = \varepsilon_n \int (h^* g)^* d\theta = \varepsilon_n \int g^* f h d\theta$ ]. Setze nun  $h := \mathcal{F}(f)$  und  $g := \mathcal{F}^2(f) = \varepsilon_n f$ .

$Kern(\iota)$  besteht aus skalaren Matrizen. [ $f(x) := \varphi(\exp(-\pi r^2))$  ist gleich  $\lambda \exp(-\pi r^2)$ , da  $f(x)$  von den  $\partial_{x_\nu} - 2\pi x_\nu$  annulliert wird. Man schließt dann  $\varphi = \lambda \cdot id$  analog zu Lemma 11.10 auf der dichten Teilmenge  $\bigoplus_{l=0}^\infty \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N) \cdot \exp(-\pi r^2)$  von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ]. In geeigneten Koordinaten von  $V$  sind die Matrizen  $\iota(\varphi)$  gegeben durch

$$M(U) := \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^T U^{-1} \end{pmatrix}, \quad M(A) := \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese liegen in der **symplektischen Gruppe**  $Sp(2N, \mathbb{R}) \subset Gl_{\mathbb{C}}(V)$  aller reellen  $2N \times 2N$  Matrizen  $M$  mit der Eigenschaft  ${}^T M J M = J$ . Ähnlich wie Lemma 11.11 zeigt man dann

**Lemma 11.13.** *Die von den Matrizen  $M(U), M(S), J$  erzeugte Untergruppe in  $Gl_{\mathbb{C}}(V)$  ist die symplektische Gruppe  $Sp(2N, \mathbb{R})$ . Insbesondere ist  $G/Kern(\iota) = Sp(2N, \mathbb{R})$ .*

Normiert<sup>12</sup> man die reelle Fourier Transformation  $\mathcal{F}$  mit einer geeigneten komplexen Zahl  $\gamma$  vom Betrag 1, gilt  $Kern(\iota) = \pm id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}$  (der Nachweis dafür ist viel diffiziler als im Fall von Lemma 11.12). Damit wird dann  $G$  eine zweiblättrige Überlagerung der symplektischen Gruppen, die sogenannte **metaplektische Gruppe**  $Mp(2N, \mathbb{R})$ . Die kanonische Einbettung der Gruppe  $G = Mp(2N, \mathbb{R})$  in die Gruppe  $Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$  wird realisiert durch eine Einbettung in die unitäre Gruppe von  $L^2(\mathbb{R})$

$$\boxed{Mp(2N, \mathbb{R}) \longrightarrow U(L^2(\mathbb{R}^N))},$$

wie man durch direkte (!) Inspektion auf den Erzeugern  $M(U), M(S), \gamma \cdot \mathcal{F}$  sieht. Dies definiert die **metaplektische Darstellung** oder auch **Oszillatordarstellung**.

## 11.7 Spinor-Matrizen

Sei  $S \in Gl(K, k)$  eine symmetrische Matrix mit Koeffizienten  $S_{\nu\mu}$  im Körper  $K$ . Wir nennen Endomorphismen  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  eines  $K$ -Vektorraums  $W$  Spinoren für  $S$ , wenn gilt

$$\boxed{\gamma_\nu \circ \gamma_\mu + \gamma_\mu \circ \gamma_\nu = 2S_{\nu\mu} \cdot id_W}.$$

**Beispiel** ( $k = 2n$ ). Sei  $S$  die Matrix von Abschnitt 11.5. Dann sind  $\gamma_i = \theta_i, \gamma_{i+n} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) Spinoren für  $\frac{1}{2}S$  und  $W = \mathcal{S}_n \cong \mathbb{C}^{2^n}$ . Die  $2^{2n}$  angeordneten Monome  $\gamma^J, J \subseteq \{1, \dots, 2n\}$  sind linear unabhängig in  $M_{2^n, 2^n}(\mathbb{C})$ , wie man leicht sieht. Sie bilden daher eine Basis wegen  $\dim_{\mathbb{C}}(M_{2^n, 2^n}(\mathbb{C})) = (2^n)^2 = 2^{2n}$ .

**Basiswechsel.** Sind  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  Spinoren für  $S$  in  $End_K(W)$  und ist  $U \in Gl(k, K)$ , dann sind  $\tilde{\gamma}_\mu := \sum_{n=1}^k U_{\nu\mu} \gamma_\nu$  Spinoren<sup>13</sup> für die symmetrische Matrix  $\tilde{S} = {}^T U S U$  in  $End_K(W)$ .

<sup>12</sup>In  $Gl_{\mathbb{C}}(V)$  gilt  $J^2 = M(U)$  für  $U = -E$ . Der  $U$ -Koordinatenwechsel liefert  $det(U)^{+1/2} f(-x) = i^N f(-x)$ .

Ersetze  $\mathcal{F}$  durch  $\gamma \cdot \mathcal{F}$  für  $\gamma \in \mathbb{C}^*$  mit  $\gamma^2 = i^N$  wegen  $\mathcal{F}^2(f)(x) = f(-x)$ .

<sup>13</sup>Für  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$  gilt  $\sum_n \sum_m \lambda_n \lambda_m (\tilde{\gamma}_n \tilde{\gamma}_m + \tilde{\gamma}_m \tilde{\gamma}_n) = \sum_{\nu, \mu, n, m} \lambda_n \lambda_m U_{\nu n} U_{\mu m} (\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu) = 2 \sum_{\nu, \mu, n, m} \lambda_n \lambda_m U_{\nu n} U_{\mu m} S_{\nu\mu} = 2 \sum_n \sum_m \lambda_n \lambda_m \tilde{S}_{nm}$ . Setze jetzt  $\lambda_i = 0$  für  $i \neq \nu, \mu$ .

## 11 Ausgewählte Themen II

Die Abbildung  $O(\tilde{S}, K) \ni M \mapsto U^{-1}MU \in O(S, K)$  definiert einen Isomorphismus<sup>14</sup>

$$O(\tilde{S}, K) \cong O(S, K).$$

Die Abbildung  $\gamma_\nu \mapsto \tilde{\gamma}_\nu$  setzt sich zu einem Ringisomorphismus  $\rho$  des Ringes  $\text{End}_K(K^{2^n})$  fort und damit zu einem Gruppenautomorphismus  $\rho : Gl(2^n, K) \rightarrow Gl(2^n, K)$ .

**Der Fall  $K = \mathbb{C}$ .** Sei dann  $\text{Spin}(\tilde{S}, \mathbb{C}) = \rho(\text{Spin}(S, \mathbb{C}))$  für die Spinorgruppe  $\text{Spin}(S, \mathbb{C})$  definiert in Abschnitt 11.5. Beachte: Es gilt  $g^{-1}\tilde{V}g \subset \tilde{V}$  für den  $K$ -Aufspann  $\tilde{V}$  der Spinormatrizen  $\tilde{\gamma}$ . Die Abbildung  $g \mapsto (\tilde{v} \mapsto g^{-1}\tilde{v}g)$  definiert einen Gruppenhomomorphismus (2-blättrige Überlagerung)

$$\text{Spin}(\tilde{S}, \mathbb{C}) \longrightarrow SO(\tilde{S}, \mathbb{C}).$$

Die Einbettung  $\tilde{G} \hookrightarrow Gl(2^n, \mathbb{C})$  definiert die Spindarstellungen.

Da zwei symmetrische invertierbare Matrizen  $\tilde{S}, S$  lassen sich über dem Körper  $K = \mathbb{C}$  durch einen Basiswechsel ineinander überführen, existiert  $U \in Gl(2n, \mathbb{C})$  mit der Eigenschaft  $U^T S U = \tilde{S}$ . Daraus folgt

**Lemma 11.14.** Für jedes  $S = {}^T S \in Gl(2n, \mathbb{C})$  existieren Spinoren  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$  in  $\text{End}(\mathbb{C}^{2n})$ .

**Beispiel.** Im Fall  $2n = 4$  definieren die Matrizen<sup>15</sup>

$$\gamma_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\nu \\ -\sigma_\nu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3 \quad \text{sowie} \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_4 \\ \sigma_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Spinoren für die Lorentzform  $\tilde{S} = \text{diag}(-1, -1, -1, 1)$ . Hierbei sind  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  die **Pauli-Matrizen**. Die beiden Spinordarstellungen  $\mathcal{S}^\pm$  haben die Dimension  $2^{n-1} = 2$ .

Die Pauli-Matrizen sind wie folgt erklärt: Der **Minkowski Raum**  $(\mathbb{R}^4, q_L)$  ist der  $\mathbb{R}^4$  versehen mit der quadratischen Lorentz Form

$$q_L(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2.$$

Die zugehörige orthogonale Gruppe  $O(3, 1)$  ist die **Lorentzgruppe**. Der Minkowski Raum kann mit dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\text{Herm}$  der komplex hermiteschen  $2 \times 2$  Matrizen identifiziert werden

$$\mathbb{R}^4 \ni x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \sum_{i=1}^4 x_i \sigma_i = \begin{pmatrix} x_4 + x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} = \not{x} \in \text{Herm}$$

mit  $x_4 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\not{x})$ . Matrixen  $M \in Sl(2, \mathbb{C})$  operieren auf  $\text{Herm}$  vermöge  $H \mapsto M^\dagger H M$  durch  $\mathbb{R}$ -lineare Transformationen  $\psi(M)$ . Wegen  $\det(M^\dagger H M) = \det(H)$  und  $q_L(x) = \det(\not{x})$  definiert dies einen Homomorphismus  $M \mapsto \psi(M)$

$$\boxed{\psi : Sl(2, \mathbb{C}) \longrightarrow O(3, 1)(\mathbb{R})}.$$

Man kann zeigen  $\text{Kern}(\psi) = \pm id_{2,2}$ , und für  $\varepsilon = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$  gilt

$$\boxed{O(3, 1)(\mathbb{R}) = \text{Bild}(\psi) \cup -\text{Bild}(\psi) \cup \varepsilon \cdot \text{Bild}(\psi) \cup -\varepsilon \cdot \text{Bild}(\psi)}.$$

<sup>14</sup>  $M \in O(\tilde{S}, K) \iff {}^T M \tilde{S} M = \tilde{S} \iff {}^T M^T U S U M = U^T \tilde{S} U \iff U M U^{-1} \in O(\tilde{S}, K)$ .

<sup>15</sup>  $\theta_1 + \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots, \theta_n + \frac{\partial}{\partial \theta_n}, \theta_1 - \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots, \theta_n - \frac{\partial}{\partial \theta_n}$  definieren  $S$ -Spinoren für die Matrix  $S = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ .  
Damit konstruiert man sofort ganz explizit  $S$ -Spinoren für beliebige Diagonalmatrizen  $S$ .

## 11.8 Heisenberggruppe

Nach Satz 8.18 ist die Fourier Transformation unitär, definiert also einen Automorphismus des Zustandsraumes  $L^2(\mathbb{R})$ . Lemma 8.15 2) und 3) lässt sich so deuten, daß die Fourier Transformation die physikalischen Operatoren von Impuls  $\frac{1}{2\pi i}X = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dx}$  und Ort  $\frac{1}{2\pi i}Y = x$  vertauscht; also als Transformation von der (kohärenten) **Ortsraumdarstellung** in die (kohärente) **Impulsraumdarstellung**. Das Wirkungsquantum  $\hbar$  wurde hierzu der Einfachheit halber zu 1 normiert. Man hat die unitären Transformationen

$$U_t(f): f(x) \mapsto f(x+t) \quad , \quad V_s(f): f(x) \mapsto e^{2\pi i x s} \cdot f(x)$$

$$W_r(f): f(x) \mapsto e^{2\pi i r} \cdot f(x)$$

des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R})$  in sich, welche man (hier nur symbolisch<sup>16</sup>) auch in der Form  $U_t = \exp(2\pi i t \tilde{X})$  und  $V_s = \exp(2\pi i s \tilde{Y})$  schreibt, denn es gelten die Funktionalgleichungen  $U_t \circ U_{t'} = U_{t+t'}$  und  $V_s \circ V_{s'} = V_{s+s'}$  mit

$$\frac{d}{dt}U_t(f)|_{t=0}(x) = \frac{d}{dt}f(x+t)|_{t=0} = \partial_x f(x) = (Xf)(x)$$

$$\frac{d}{ds}V_s(f)|_{s=0}(x) = 2\pi i x \cdot f(x) = (Yf)(x) \quad ,$$

$$\frac{d}{dr}W_r(f)|_{r=0}(x) = 2\pi i \cdot f(x) = 2\pi i \cdot (id_{L^2(\mathbb{R})}f)(x) \quad .$$

Die Operatoren  $U_t, V_s$  und  $W_r$  (für  $r, s, t \in \mathbb{R}$ ) erzeugen eine Gruppe unitärer Operatoren, die sogenannte **Heisenberggruppe**. Es gilt

$$U_t \circ V_s = W_{st} \circ V_s \circ U_t = e^{2\pi i st} \cdot V_s \circ U_t \quad .$$

Bis auf einen **Phasenfaktor**  $W_{st} = \exp(2\pi i st)$  vertauschen also  $U_t$  und  $V_s$ . Die Operatoren  $W_s$  induzieren die identische Abbildung auf dem Zustandsraum aller Geraden  $\mathbb{C} \cdot v$  im Hilbertraum. In der Tat bildet  $W_s$  die Gerade  $\mathbb{C} \cdot v$  auf  $\mathbb{C} \cdot \exp(2\pi i r) \cdot v = \mathbb{C} \cdot v$  ab.

Die Heisenberggruppe ist isomorph zur Matrixgruppe aller Matrizen der Gestalt

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

beschrieben werden, mit

$$u_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad w_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Diese Matrixgruppe operiert auf  $L^2(\mathbb{R})$  durch die Zuordnung  $u_t \mapsto U_t, v_s \mapsto V_s, w_r \mapsto W_r$ , denn man prüft leicht nach

$$u_t \circ v_s = w_{st} \circ v_s \circ u_t \quad .$$

<sup>16</sup>Man würde gerne schreiben  $U_t: f(x) \mapsto e^{\partial_x t} f(x)$ , denn  $f(x+t) = e^{\partial_x t} f(x)$  gilt für analytische Funktionen  $f$  und kleine  $t$ ; siehe Lemma 4.39. Für beliebige Funktionen  $f \in L^2(X)$  ist der Ausdruck  $e^{\partial_x t} f(x)$  aber sinnlos!

## 11.9 Variationsrechnung

Sei  $L(q, x, t) : \mathbb{R}^{2n} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\infty$ -Funktion für  $t \in [a, b]$  sowie  $q, x \in \mathbb{R}^n$ . Sei dann  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^2$ -differenzierbare Abbildung, die folgendes Integral  $\mathbb{L}(f)$  minimiert

$$\mathbb{L}(f) := \int_a^b L(f(t), \dot{f}(t), t) dt.$$

**Satz 11.15.** *Unter den obigen Voraussetzungen gilt für  $i = 1, \dots, n$*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dx_i} L(f(t), \dot{f}(t), t) \right) = \frac{d}{dq_i} L(f(t), \dot{f}(t), t).$$

**Beweis.** Für jede feste differenzierbare Kurve  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $g(a) = g(b) = 0$  besitzt die in der Variable  $s \in \mathbb{R}$  nach Satz 4.32 differenzierbare reellwertige Funktion  $\phi(s) := \mathbb{L}(f + s \cdot g)$  im Punkt  $s = 0$  ein Minimum. Aus Lemma 4.9 folgt  $\frac{d\phi}{ds}(0) = 0$ . Die Differentiation nach  $s$  kann nach Satz 4.32 mit dem Integral vertauscht werden. Dies gibt

$$\frac{d\phi}{ds}(0) = \int_a^b \frac{d}{ds} L(f(t) + s \cdot g(t), \dot{f}(t) + s\dot{g}(t), t)|_{s=0} dt = 0$$

oder wegen der Kettenregel  $\int_a^b \left( \frac{d}{dq} L(f(t), \dot{f}(t), t) \cdot g(t) + \frac{d}{dx} L(f(t), \dot{f}(t), t) \cdot \dot{g}(t) \right) dt = 0$ ; der einfacheren Schreibweise zuliebe ist hier oBdA  $n = 1$ . Durch partielle Integration folgt wegen  $g(a) = g(b) = 0$  dann (\*)

$$\int_a^b h(t) \cdot g(t) dt = 0$$

für  $h(t) = \frac{d}{dq} L(f(t), \dot{f}(t), t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dx} L(f(t), \dot{f}(t), t) \right)$ . Dies gilt für alle Funktionen  $g \in C_c^\infty(U)$  auf  $U = (a, b)$ . Somit verschwindet die stetige Funktion  $h(t)$  in jedem Punkt  $t = t_0 \in U$ , und damit auch auf  $[a, b]$ , da man anderenfalls wegen Abschnitt 5.16 eine Funktion  $g \geq 0$  mit  $g(t_0) = 1$  und Träger in einem beliebig kleinen Intervall  $(-\varepsilon + t_0, t_0 + \varepsilon)$  finden könnte, für die das Integral (\*) nicht verschwindet.  $\square$