Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Mathematisches Institut

Prof. Dr. Markus Banagl

D–69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54–5763

Telefax: (06221) 54–8312

email: banagl@mathi.uni-heidelberg.de

HÖHERE ANALYSIS
ÜBUNGSAUFGABEN 5

DEADLINE: Fr. 20. 11. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. Sei $\mathcal{B}$ die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Produktalgebra $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ist. Letztere ist definiert als die von den offenen Mengen in $\mathbb{R}^2$ erzeugte σ-Algebra.

2. Sei $X = Y = [0,1]$ das Einheitsintervall und $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ die σ-Algebra der Borel Mengen auf $[0,1]$. Sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{X}$ und ν das Zählmaß auf $\mathcal{Y}$, d.h. ist $E \in \mathcal{Y}$ endlich, dann ist $\nu(E)$ die Kardinalität von E und $\nu(E) = +\infty$ sonst. Zeigen Sie, dass die Diagonale $\Delta = \{(x,x) \in X \times Y \mid x \in X\}$ eine messbare Teilmenge von $Z = X \times Y$ ist, aber
$$\int \nu(\Delta_x) d\mu(x) \neq \int \mu(\Delta^y) d\nu(y).$$

3. Benutzen Sie die charakteristische Funktion F obiger Diagonale Δ, um zu zeigen, dass die Voraussetzung der σ-Endlichkeit im Satz von Tonelli nicht ersatzlos gestrichen werden kann.

4. Sei f integrierbar auf $(X, \mathcal{X}, \mu)$ und g integrierbar auf $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$. Sei $h : Z = X \times Y \to \mathbb{R}$ die Funktion $h(x,y) = f(x)g(y)$. Beweisen Sie: Ist π auf $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ein Produktmaß von μ und ν, dann ist h π-integrierbar und
$$\int_Z h d\pi = \left(\int_X f d\mu \right) \cdot \left(\int_Y g d\nu \right).$$