



Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:

banagl@mathi.uni-heidelberg.de

HÖHERE ANALYSIS ÜBUNGSAUFGABEN 3

DEADLINE: Fr. 6. 11. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. Zeigen Sie: Ist $E \subset \mathbb{R}$ abzählbar, dann hat E Lebesgue-Maß Null.
2. Für eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl x schreiben wir $xE := \{xy \mid y \in E\}$. Zeigen Sie: Ist E Lebesgue-messbar, dann auch xE und $\lambda(xE) = |x|\lambda(E)$.
3. Auf dem Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ betrachten wir die Funktionenfolge $f_n = \chi_{[n, +\infty)}$. Zeigen Sie, dass (f_n) eine monoton fallende Folge nichtnegativer messbarer Funktionen ist, die gegen $f = 0$ konvergiert, aber

$$\int f d\lambda \neq \lim \int f_n d\lambda.$$

Folgern Sie, dass es ohne weitere Voraussetzungen keinen dem Satz von der monotonen Konvergenz analogen Satz für monoton fallende Funktionenfolgen gibt. Modifizieren Sie die Folge so, dass die Konvergenz sogar gleichmäßig erfolgt, das Integral von f aber dennoch ungleich dem Limes der Integrale bleibt.

4. Zeigen Sie, dass unter der zusätzlichen Voraussetzung $\int f_1 d\mu < \infty$ der Satz von der monotonen Konvergenz auch für fallende Folgen $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq 0$ messbarer Funktionen gilt. Können Sie beide Versionen dieses Satzes dazu verwenden, um die Gleichheit von Riemann-Integral $\int_a^b f(x) dx$ und Lebesgue-Integral $\int_{[a,b]} f d\lambda$ für eine nichtnegative stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nachzuweisen? *Hinweis:* Für den ersten Teil betrachte man $g_n = f_1 - f_n$.