



Ruprecht-Karls-Universität  
Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:

banagl@mathi.uni-heidelberg.de

## HÖHERE ANALYSIS ÜBUNGSAUFGABEN 2

**DEADLINE:** Fr. 30. 10. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein messbarer Raum. Beweisen Sie: Ist  $(\mu_n)$  eine Folge von Maßen auf  $\mathcal{X}$  mit  $\mu_n(X) = 1$ , dann ist  $\nu : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,

$$\nu(E) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_n(E), \quad E \in \mathcal{X},$$

ein Maß und  $\nu(X) = 1$ .

2. Zeigen Sie: Die in der Vorlesung definierte Familie  $\mathcal{F}$  der endlichen Vereinigungen von Intervallen der Form

$$(a, b], \quad (-\infty, b], \quad (a, +\infty), \quad (-\infty, +\infty)$$

ist ein Algebra auf  $\mathbb{R}$ .

3. Zeigen Sie: Ist das Intervall  $(a, +\infty)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , die disjunkte Vereinigung von Intervallen  $(a_j, b_j]$ , dann ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell((a_j, b_j]) = +\infty.$$

4. Sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{A}$  eine Algebra auf  $X$  und  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{A}$ . Für beliebige  $B \subset X$  definieren wir

$$\mu'(B) := \inf\{\mu(A) \mid B \subset A \in \mathcal{A}\}.$$

Zeigen Sie, dass  $\mu'(E) = \mu(E)$  für alle  $E \in \mathcal{A}$  und dass  $\mu^*(B) \leq \mu'(B)$ , wobei  $\mu^*$  das äußere Maß bezeichnet. Beweisen Sie außerdem, dass  $\mu^* = \mu'$  wenn  $X$  die abzählbare Vereinigung von Mengen mit endlichem  $\mu$ -Maß ist. Ist  $\mu'$  abzählbar subadditiv?