Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D–69120 Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
Telefon: (06221) 54–5763
Telefax: (06221) 54–8312
email: banagl@mathi.uni-heidelberg.de

HÖHERE ANALYSIS
ÜBUNGSAUFGABEN 1

DEADLINE: Fr. 23. 10. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. Sei $(\mathcal{X}_i)_{i\in I}$, I nicht leer, eine Familie von σ-Algebren auf einer Menge X. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i\in I}\mathcal{X}_i$ wieder eine σ-Algebra ist.

2. Sei $(X, \mathcal{X})$ ein messbarer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ messbar, und $C > 0$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass die abgeschnittene Funktion $f_C : X \to \mathbb{R}$,
$$f_C(x) := \begin{cases} C, & f(x) > C \\ f(x), & |f(x)| \leq C \\ -C, & f(x) < -C, \end{cases}$$
messbar ist.

3. Zeigen Sie: Sind X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{X}$ eine σ-Algebra auf X, dann ist
$$\mathcal{Y} = \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{X}\}$$
eine σ-Algebra auf Y.

4. Sei $(X, \mathcal{X})$ ein messbarer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: f ist messbar genau dann, wenn $f^{-1}(A) \in \mathcal{X}$ für jede Borel Menge $A \subset \mathbb{R}$.