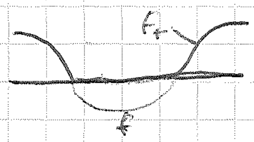
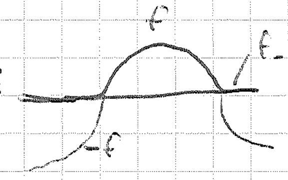
Notation: $f: X \to \mathbb{R}$.



$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}$

"positiver Teil von f".



$f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$

"negativer Teil"

$\Rightarrow f_+, f_- \geq 0 \quad f = f_+ - f_-, \ |f| = f_+ + f_-$

Ist f messbar, dann auch f_+:

$$f_+ = \frac{1}{2}(f_+ + f_+) = \frac{1}{2}(f + \cancel{f_-} + |f| - \cancel{f_-}) = \underbrace{\frac{1}{2}(f + |f|)}_{\text{messbar nach Lemma}}$$

Ähnlich ist f_- messbar. Es gilt also:

$\boxed{f \text{ messbar}} \Longleftrightarrow \boxed{f_+ \text{ und } f_- \text{ messbar}}$

Wir erweitern den Begriff der Messbarkeit auf Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$.

Def: $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar, wenn $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \{x \mid f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{X}$

$M(X, \mathfrak{X}) := \{f: X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ messbar}\}$

Bem: $f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \mid f(x) > n\}}_{\in \mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$

Analog $f^{-1}(-\infty) \in \mathfrak{X}$.

Kriterium: $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$.

f messbar $\Longleftrightarrow$ $f^{-1}(-\infty), f^{-1}(+\infty) \in \mathfrak{X}$, $f_0: X \to \mathbb{R}$ messbar ist,

wobei
$$f_0(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \neq \pm\infty \\ 0, & f(x) = \pm\infty \end{cases}$$

Daraus folgt zusammen mit dem Lemma:

$f \in M(X, \mathfrak{X}) \Rightarrow cf, f^2, |f|, f_+, f_- \in M(X, \mathfrak{X})$

$f, g \in M(X, \mathfrak{X})$. Dann ist $f+g$ nicht wohldefiniert auf der Menge

$E := \{x \mid f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\} \cup \{x \mid f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\}$

Definieren wir
$$(f+g)(x) := \begin{cases} f(x) + g(x), & x \in X - E \\ 0, & x \in E \end{cases}$$

dann gilt $f+g \in M(X, \mathfrak{X})$

($f \cdot g$) folgt später!)

Lemma: Sei $(f_n) \subset M(X, \mathfrak{X})$ eine Funktionenfolge. Wir setzen

$f(x) := \inf_n f_n(x)$

$F(x) := \sup_n f_n(x)$

$f^*(x) := \liminf_n f_n(x)$

$F^*(x) := \limsup_n f_n(x)$

Dann gilt $f, F, f^*, F^* \in M(X, \mathfrak{X})$

Bew:
$$\{x \mid f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \mid f_n(x) \geq \alpha\}}_{\in \mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$$

$$\{x \mid F(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

$\Rightarrow f^* = \sup_n (\inf_{m \geq n} f_m(x))$ ist messbar.

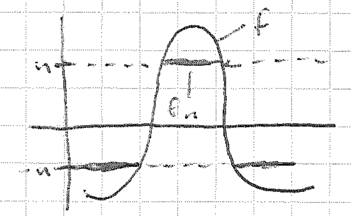
Analog F^*.

Kor.: Konvergiert $(f_n) \subset M(X,\mathfrak{X})$ gegen f, dann ist $f \in M(X,\mathfrak{X})$

Bew.: $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n} \sup f_n$.

zurück zu $f \cdot g$: $n = 1, 2, \dots$

$$f_n(x) := \begin{cases} n, & f(x) > n \\ f(x), & |f(x)| \leq n \\ -n, & f(x) < n \end{cases}$$



$\Rightarrow f_n$ sind messbar, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $\lim f_n = f$

$\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} f_n \cdot g_n}_{\text{messbar}} \xRightarrow{\text{Kor.}} \underbrace{= f_n g}_{\text{messbar}}$ $\qquad$ $\underbrace{f \cdot g}_{\text{messbar}} \Longleftarrow \underbrace{= \lim\limits_{n\to\infty} f_n \cdot g}_{\text{messbar}}$

SATZ: (Approximation durch messbare Treppenfunktionen.)

Sei $f \in M(X,\mathfrak{X})$, $f \geq 0$.

Dann $\exists$ Folge $(\varphi_n) \subset M(X,\mathfrak{X})$, $\varphi_n \geq 0$, mit:

(1) φ_n nimmt nur endlich viele Werte an ("Treppenfunktion")

(2) $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, $\forall n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$

Beweis: φ_1: $\left.\begin{array}{l} X_0 := f^{-1}[0,\frac{1}{2}) \in \mathfrak{X} \\ X_1 := f^{-1}[\frac{1}{2},1) \in \mathfrak{X} \\ X_2 := f^{-1}[1,+\infty] \in \mathfrak{X} \end{array}\right\} X = \underbrace{X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2}_{\text{disjunkte Vereinigung}}$

$$\varphi_1(x) := \begin{cases} 0, & x \in X_0 \\ 1/2, & x \in X_1 \\ 1, & x \in X_2 \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 \in M(X,\mathfrak{X})$$

φ_2: $\left.\begin{array}{l} X_0 := f^{-1}[0,\frac{1}{4}) \\ X_1 := f^{-1}[\frac{1}{4},\frac{2}{4}) \\ \vdots \\ X_7 := f^{-1}[\frac{7}{4},2) \end{array}\right\}$ $X_j \in \mathfrak{X}\ \forall j$, $X = X_0 \sqcup \dots \sqcup X_8$ $\quad \varphi_2(x) := \begin{cases} 0, & x \in X_0 \\ 1/4, & x \in X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 7/4, & x \in X_7 \\ 2, & x \in X_8 \end{cases}$

$\varphi \in M(X,\mathfrak{X}) \Longleftarrow$

Komplexwertige Funktionen:
($\to$ Fouriertransformation)

Def.: $f : X \to \mathbb{C}$ heißt messbar, wenn sowohl der Realteil von f als auch der Imaginärteil messbar sind.

MAßE

Def.: Sei $(X,\mathfrak{X})$ ein messbarer Raum. Ein Maß auf $\mathfrak{X}$ ist eine Funktion $\mu : \mathfrak{X} \to \overline{\mathbb{R}}$, sodass gilt:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$, (2) $\mu(E) \geq 0\ \forall E \in \mathfrak{X}$

(3) Ist $(E_n)_{n=1,2,\dots} \subset \mathfrak{X}$ eine disjunkte Folge, dann gilt:

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad \text{(abzählbare Additivität)}$$

Bem.: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = +\infty$, dann existiert ein $\exists n : \mu(E_n) = +\infty$, oder die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ divergiert.

Def.: μ heißt endlich, wenn $\mu(E) < +\infty\ \forall E \in \mathfrak{X}$

Def.: μ heißt σ-endlich, wenn $\exists (E_n) \subset \mathfrak{X}$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ und $\mu(E_n) < +\infty$

Bsp.: (1) $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(X)$ Potenzmenge. $p \in X$

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & p \in E \\ 0, & p \in X - E \end{cases}$$

ist ein Maß, das sog. Diracmaß konzentriert im Punkt p.

μ ist ein endliches Maß.

(2) $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$$\mu(E) := \begin{cases} \text{card}(E), & \text{wenn } E \text{ endlich} \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

μ ist nicht endlich, da $\mu(\mathbb{N}) = +\infty$

μ ist ein σ-endliches Maß, das sog. Abzählmaß

<u>Bem.:</u> $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \mathcal{B}$ Borel σ-Algebra

Wir werden später sehen, dass $\exists!$ Maß λ auf $\mathcal{B}$ mit

$\lambda(\underbrace{(a,b)}_{\text{Intervall}: a,b \in \mathbb{R}}) = |b-a|$ λ heißt Lebesguemaß

<u>Lemma 1:</u> Sei μ ein Maß auf $\mathcal{X}$, $E, F \in \mathcal{X}$, $E \subset F$. Dann gilt:

$\mu(E) \leq \mu(F)$ und wenn $\mu(E) < \infty$ dann gilt:

$\mu(F-E) = \mu(F) - \mu(E)$

<u>Beweis:</u> $F = E \sqcup (F-E)$

$3) \Rightarrow \mu(F) = \mu(E) + \underbrace{\mu(F-E)}_{\geq 0}$

Wenn $\mu(E) < \infty$, dann darf man $\mu(E)$ auf beiden Seiten subtrahieren.

<u>Lemma 2:</u> ① $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \subset X$, $E_n \in \mathcal{X} \forall n$

Dann $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$

② $X \supset F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$, $F_n \in \mathcal{X}$, $\mu(F_1) < \infty$

Dann $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim \mu(F_n)$

<u>Bew.:</u> ① $A_1 := E_1$, $A_n := E_n - E_{n-1}$; $n \geq 2$

Zunächst für $\mu(E_n) < +\infty \ \forall n$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\mu(\bigcup E_n) = \mu(\bigsqcup A_n) \overset{③}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$$
$$= \lim_m \sum_{n=1}^{m} (\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})) \overset{\text{Teleskop}}{=} \lim_m \mu(E_m)$$

Wenn $\exists n: \mu(E_n) = +\infty$, dann $\mu(\bigcup E_n) = +\infty = \lim \mu(E_n)$

② Folgt aus ① mit $\underline{E_n = F_1 - F_n}$ (+③ und De Morgansche Gesetze
aufsteigende Folge + Durchschnittbildung)

Man erhält $\mu(F_1) - \lim \mu(F_n) = \mu(F_1) - \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)$

$\mu(F_1) < \infty \Rightarrow \lim \mu(F_n) = \mu(\bigcap F_n)$

<u>Def.:</u> Ein <u>Maßraum</u> ist ein Tripel $(X, \mathcal{X}, \mu)$, wobei:

- $(X, \mathcal{X})$ ein Meßbarer Raum ist
- $\mu: \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein Maß auf $\mathcal{X}$

<u>Sprechweisen:</u> Wir sagen eine Aussage A gilt <u>μ-fast überall</u>, wenn $\exists N \in \mathcal{X}$, $\mu(N) = 0$ (<u>"Nullmenge"</u>)

A für alle $x \in X - N$ gilt.

z.B. $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ $f = g$ μ-f.ü. $\Leftrightarrow \exists N \in \mathcal{X}, \mu(N) = 0$
$f(x) = g(x) \ \forall x \in X - N$

$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ μ-fast überall, wenn $\exists N \in \mathcal{X}$, $\mu(N) = 0$,

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \ \forall x \in X - N$

<u>Erzeugte Maße</u>

$X = \mathbb{R}$.

$\mathcal{F} := \{$ endliche Vereinigungen von Intervallen der Form

$(a,b], (-\infty, b], (a, +\infty), (-\infty, +\infty) \}$

Wir definieren auf $\mathcal{F}$ die <u>Längenfunktion</u> $\ell: \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\ell(I) := \begin{cases} b-a, & I = (a,b] \quad a,b \in \mathbb{R} \quad a < b \\ +\infty, & I = (-\infty, b] \\ +\infty, & I = (a, +\infty) \\ +\infty, & I = (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

Für $I = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} I_j \qquad \ell(I) := \sum_{j=1}^{n} \ell(I_j)$

<u>Frage:</u> Ist $(\mathbb{R}, \mathcal{I}, \ell)$ ein Maßraum?

Nein, $\mathcal{I}$ ist keine σ-Algebra! (nicht abg. unter endliche Vereinigungen)

<u>Def.:</u> X eine Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$

$\mathcal{A}$ heißt <u>Algebra</u>, wenn gilt:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$, (2) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow X - E \in \mathcal{A}$

(3) $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \cup \dots \cup E_n \in \mathcal{A}$

<u>Bsp.:</u> $\mathcal{I}$ ist eine Algebra. (Bew. siehe Übung)

Def.: Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra. Ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist eine Funktion

$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, sodass

(1) $\mu(\emptyset) = 0$. (2) $\mu(E) \geq 0 \ \forall E \in \mathcal{A}$

(3) Wenn $(E_n) \subset \mathcal{A}$ eine disjunkte Folge ist mit

$\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$, dann gilt: $\mu(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

<u>Hilfssatz:</u> Sei $(E_n) \subset \mathcal{A}$ mit $\bigcup E_n \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \quad \mu(\bigcup E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ („Subadditivität") (trivial)

<u>Satz</u> ℓ ist ein Maß auf $\mathcal{I}$.

<u>Bew.:</u> (1), (2) klar.

(3): Es genügt (3) zu zeigen für $I = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} I_j$,

$I, I_j \in \{(a,b], (-\infty, b], (a, +\infty), (-\infty, +\infty)\}$

Wir behandeln nur den Fall $I = (a,b]$

$(a,b] = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j]$

$\cdot\ \ell(a,b] \geq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(a_j, b_j]$:

Durch Umindizieren:

$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b$.

$\ell(a,b] = b - a \geq \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = \sum_{j=1}^{n} \ell(a_j, b_j]$

n bel. $n \to \infty$: $\ell(a,b] \geq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(a_j, b_j]$

$\cdot\ \ell(a,b] \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(a_j, b_j]$; Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $\varepsilon_j > 0$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \varepsilon$

$\exists j_0 : a_{j_0} - a < \frac{\varepsilon_{j_0}}{2}$. Umindizieren $j_0 = 1$

$a_1 - a < \frac{\varepsilon_1}{2} \quad I_1 := (a_1 - \frac{\varepsilon_1}{2}, b_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}) \Rightarrow a \in I_1$

$j \geq 2$: $I_j := (a_j, b_j + \varepsilon_j) \Rightarrow [a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$

$\{I_j\}_j$ ist eine offene Überdeckung des kompakten

Intervalls $[a,b]$. $\Rightarrow \exists m : [a,b] \subset I_1 \cup \dots \cup I_m$

$b - a \leq (b_m + \varepsilon_m) - (a_1 - \frac{\varepsilon_1}{2}) \leq \cancel{b_1 + \varepsilon_1/2}\ (b_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}) - (a_1 - \frac{\varepsilon_1}{2})$

Umindizieren falls nötig

$\sum_{j=2}^{m} (b_j + \varepsilon_j - a_j)$

$= (b_1 - a_1) + \varepsilon_1 + \sum_{j=2}^{m} ((b_j - a_j) + \varepsilon_j)$

$= \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j) + \sum \varepsilon_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) + \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \ell(a,b] = b - a \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(a_j, b_j]$

Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine Algebra auf X,

μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Wir wollen $\mathcal{A}$ zu einer σ-Algebra

$\mathcal{A}^*$ erweitern, sodass $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ und μ sich zu einem Maß μ^* auf $\mathcal{A}^*$ fortsetzen lässt.

Def.: Sei $B \subset X$ beliebig.

$$\mu^*(B) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \,\middle|\, (E_n) \subset \mathcal{A},\ B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}$$

Man nennt $\mu^*(B)$ das äußere Maß von B, obwohl $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ gar kein Maß sein muss. (μ^* nicht additiv!)

Eigenschaften: $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(B) \geq 0 \ \forall B$

Wenn $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

Lemma: (I) Wenn $B \in \mathcal{A}$, dann $\mu^*(B) = \mu(B)$

(II) Subadditivität: (E_n), $E_n \subset X$, dann gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

Beweis: (I) $B \in \mathcal{A}$, $E_1 := B$, $E_2 = \emptyset$, $E_3 = \emptyset \ldots$

$$\Rightarrow (E_n) \subset \mathcal{A},\quad B \subseteq \bigcup E_n$$

$$\mu^*(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(B) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) \ldots = \mu(B)$$

Nun zu $\mu(B) \leq \mu^*(B)$:

Geg. $(E_n) \subset \mathcal{A}$, $B \subset \bigcup E_n$

$$B = \bigcup \underbrace{(E_n \cap B)}_{\in \mathcal{A}} \quad \text{Hilfssatz} \Rightarrow$$

$$\mu(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \Rightarrow \mu(B) \leq \mu^*(B)$$

(II) $E_n \subset X$, $\varepsilon > 0$. $\exists E_{n,k} \in \mathcal{A}$, $E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n,k}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n,k}) - \mu^*(E_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n,k})}_{\leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)\right) + \varepsilon$$

(geom. Reihe)

ε beliebig $\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$

Wir verwenden μ^* um eine geeignete σ-Algebra $\mathcal{A}^*$ zu finden auf der μ^* abz. additiv ist.

Def.: (Carathéodory):

$E \subset X$ heißt μ^*-messbar, wenn $\forall A \overset{\text{bel}}{\subset} X$:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$$

Sei $\mathcal{A}^*$ die ~~Menge~~ Familie aller μ^*-messbaren Mengen.

Erweiterungssatz von Carathéodory:

Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine Algebra auf X und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann ist die Familie $\mathcal{A}^*$ der μ^*-messbaren Menge eine σ-Algebra, die die gegebene Algebra enthält, und μ^* ein Maß auf $\mathcal{A}^*$.

Bew.: • $\underset{E}{\emptyset} \in \mathcal{A}^*$: $A \overset{\text{bel}}{\subset} X$ $\quad \mu^*(A) = \mu^*(\overbrace{A \cap \emptyset}^{=\emptyset}) + \mu^*(\overbrace{A - \emptyset}^{=A})$ ✓

$$X \in \mathcal{A}^*: \quad \mu^*(A) = \mu^*(\overbrace{A \cap X}^{=A}) + \overbrace{\mu^*(\underbrace{A - X}_{=\emptyset})}^{=\emptyset}$$

$\mathcal{A}^*$ ist abgeschlossen unter der Komplementbildung: Sei E μ^*-messbar

$$\mu^*(\underbrace{A \cap (X - E)}_{A - E}) + \mu^*(\underbrace{A - (X - E)}_{A \cap E}) = \mu^*(A)$$

• $\mathcal{A}^*$ ist abg. unter Bildung von endlichen Durchschnitten: $E, F \in \mathcal{A}^*$

$A \overset{bel}{\subset} X$. $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A - F)$

$= \mu^*((A \cap F) \cap E) + \mu^*((A \cap F) - E) + \mu^*(A - F)$

$= \mu(B \cap F) + \mu^*(B - F)$

$\mu^*(A) \overset{E \in}{=} \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(\underbrace{A - (E \cap F)}_{=: B})$

Wir haben gezeigt: $\mathcal{A}^*$ ist eine Algebra.

Wir zeigen: μ^* ist endlich additiv auf $\mathcal{A}^*$.

E, F μ^*-messbar, $E \cap F = \emptyset$. $A \overset{bel}{\subset} X$

$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*((A \cap (E \cup F)) \cap E) + \mu^*((A \cap (E \cup F)) - E)$

$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$

Für $A := X \Rightarrow \mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$

Wir zeigen simultan, dass $\mathcal{A}^*$ ein σ-Algebra ist und μ^* abzählbar additiv auf $\mathcal{A}^*$ ist. Seien $E_n \subset \mathcal{A}^*$, (E_n) disjunkt

$E := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$F_n := E_1 \sqcup \ldots \sqcup E_n \Rightarrow F_n$ μ^*-messbar. $A \overset{\subset}{bel} X$

$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A - F_n)$ $\quad F_n \subset E$

$= \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) \quad \Rightarrow A - F_n \supset A - E$

$n \to \infty$: $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A - E) \leq \mu^*(A)$

$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$

$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A - E) \leq \mu^*(A)$

$\Rightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$. $\Rightarrow E \in \mathcal{A}^*$

Für $A = E$: $\boxed{\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)} + \underbrace{\mu^*(E - E)}_{= 0}$.

$\Rightarrow \mathcal{A}^*$ ist eine σ-Algebra, μ^* ist ein Maß auf $\mathcal{A}^*$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$

Sei $E \in \mathcal{A}$ z.z. E ist μ^*-messbar

(Wir wissen, dass $\mu^*(E) = \mu(E)$

$A \subset X$ beliebig. $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$

Bleibt z.z. $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E) \leq \mu^*(A)$.

$\varepsilon > 0$, $\exists F_n \in \mathcal{A}$, $A \subset \bigcup F_n$: $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) - \mu^*(A) \leq \varepsilon$

$A \cap E$: $\mu^*(A \cap E) \leq \sum \mu^*(\overbrace{F_n \cap E}^{\in \mathcal{A}}) = \sum \mu(F_n \cap E)$

$A - E$: $\mu^*(A - E) \leq \sum \mu^*(\overbrace{F_n - E}^{\in \mathcal{A}}) = \sum \mu(F_n - E)$

$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(F_n \cap E) + \mu(F_n - E))$

$= \sum \mu(F_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$

μ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$

ε bel. $\Rightarrow \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E) \leq \mu^*(A)$

$\Rightarrow E \in \mathcal{A}^*$

<u>Anwendung</u>: Das Lebesgue-Maß

Wir wenden den Erweiterungssatz an auf

$(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{F}, \ell)$ Längenfunktion

(Wir wissen, dass ℓ Maß auf $\mathfrak{F}$ ist)

Wir erhalten eine σ-Algebra $\mathcal{J}^*$, $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}^*$ und ein Maß ℓ^* auf $\mathcal{J}^*$

<u>Def.:</u> $\mathcal{J}^*$ heißt <u>Familie der Lebesgue-messbaren Mengen</u> in $\mathbb{R}$

$\lambda := \ell^*$ heißt Lebesgue-Maß auf $\mathcal{J}^*$

$\mathfrak{X}(\mathcal{J})$ ist (nach Def.) die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{J}$ enthält $\Rightarrow$

$\mathcal{J} \subset \mathfrak{X}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}^*$

$\mathfrak{X}(\mathcal{J}) = \mathcal{B}$, die Borel σ-Algebra.

$\Rightarrow \mathcal{J} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{J}^*$

<u>Korollar:</u> Borelmengen sind lebesgue-messbar

Insbesondere sind alle offenen Mengen $\subset \mathbb{R}$ leb.-messbar.

<u>Bem.:</u> Es gilt $\mathcal{B} \neq \mathcal{J}^*$

Wir konstruieren später ein Bsp. einer nicht leb.-messbaren Menge.

Dazu benötigt man aber:

TRANSLATIONSINVARIANZ DES LEBESGUE-MAßES

$x \in \mathbb{R}$. $E \subset \mathbb{R}$. $E + x := \{y + x \mid y \in E\}$

<u>Lemma:</u> Wenn $E \in \mathcal{J}$, dann:

$$E + x \in \mathcal{J} \text{ und } \ell(E+x) = \ell(E)$$

<u>Beweis:</u> $(a,b] = (a+x, b+x]$

$(-\infty, a] + x = (-\infty, a+x]$, etc..

$\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) + x = \bigcup (I_j + x)$

$\ell((a,b]+x) = \ell((a+x, b+x]) = (b+x) - (a+x) = b - a = \ell((a,b])$ etc..

<u>Prop.:</u> $E \subset X$ bel. $\Rightarrow \ell^*(E+x) = \ell^*(E)$

<u>Beweis:</u> Sei $\varepsilon > 0$.

$\ell^*(E) = \inf\{\sum \ell(F_n) \mid F_n \in \mathcal{J}, E \subset \bigcup F_n\}$

$\Rightarrow \exists F_n \in \mathcal{J}$, $E \subset \bigcup F_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(F_n) - \ell^*(E_n) \leq \varepsilon$

$E + x \subset \bigcup \underbrace{(F_n + x)}_{\in \mathcal{J} \text{ (Lemma)}}$

$\ell^*(E+x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(F_n + x)$

$\overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} = \sum \ell(F_n) \leq \ell^*(E) + \varepsilon$

ε bel. $\Rightarrow \ell^*(E+x) \leq \ell^*(E)$

$\ell^*(E) = \ell^*((E+x) - x)$

$\leq \ell^*(E+x)$

$\Rightarrow \ell^*(E+x) = \ell^*(E)$

<u>Prop.:</u> $E \in \mathcal{J}^* \Rightarrow E + x \in \mathcal{J}^*$

<u>Beweis:</u> Sei $A \subset X$ beliebig

$\ell^*(A \cap (E+x)) + \ell^*(A - (E+x))$

$\Rightarrow = \ell^*((A'+x) \cap (E+x)) + \ell^*((A'+x) - (E+x))$, $A' := A - x$

$= \ell^*((A' \cap E) + x) + \ell^*((A' - E) + x)$

$\overset{\text{Prop 1.}}{=} \ell^*(A' \cap E) + \ell^*(A' - E) = \ell^*(A') = \ell^*(A - x) = \ell^*(A)$

$\Rightarrow E + x$ ist ℓ^*-messbar

<u>Zusammenfassend:</u> Ist $E \subset \mathbb{R}$ lebesgue-messbar, dann auch $E+x$ und $\lambda(E+x) = \lambda(E)$

BEISPIEL EINER NICHT LEBESGUE-MESSBAREN MENGE E

Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}$: $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$\rightsquigarrow$ Äquivalenzklassen $[x]$ $\quad \mathbb{R}/_{\mathbb{Q}} := \{[x] \mid x \in \mathbb{R}\}$

Für jede Klasse $\xi \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}$, wähle einen Repräsentanten in $(0,1)$:

$\xi = [x_\xi]$, $E := \{x_\xi \mid \xi \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}\} \subset (0,1)$

Behauptung: E ist nicht leb-messbar

$x \in (0,1)$ $[x] =: \xi = [x_\xi] \Rightarrow x - x_\xi = r \in \mathbb{Q}$

$$x = x_\xi + r, \text{ d.h. } x \in E + r$$

$$|r| = |x - x_\xi| < 1, \text{ d.h. } r \in (-1, +1)$$

Wenn $r, s \in \mathbb{Q}$, $r \neq s$ dann: $(E+r) \cap (E+s) = \emptyset$

$x_\xi + r = x_\eta + s \Rightarrow x_\xi - x_\eta = s - r \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\xi = [x_\xi] = [x_\eta] = \eta \Rightarrow x_\xi = x_\eta \Rightarrow r = s$ ↯

$S := \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} (E+r)$. Angenommen: E wäre lebesgue-messbar $\Rightarrow$ Auch S λ-messbar

$$S \subset (-1,2] \Rightarrow \lambda(S) \leq \lambda(-1,2] = 3$$

$$\lambda(S) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} \lambda(E+r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} \lambda(E) \Rightarrow \lambda(E) = 0 \Rightarrow \lambda(S) = 0$$

$(0,1) \subset S \Rightarrow 1 = \lambda((0,1)) \leq \lambda(S)$ ↯ $\Rightarrow E$ nicht λ-messbar

INTEGRALE VON MESSBAREN "EINFACHEN" FUNKTIONEN

Sei $(X, \mathcal{X}, \mu)$ ein Maßraum.

$$M^+(X, \mathcal{X}) := M(X, \mathcal{X}) \cap \{f \geq 0\}$$

<u>Def.:</u> Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ heißt <u>einfach</u>, wenn $f(X)$ endlich. ("Treppenfunktion"). Einfache messbare Funktionen besitzen immer eine Darstellung $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$; $a_j \in \mathbb{R}$, $E_j \in \mathcal{X}$

Wir nennen eine solche Darstellung <u>Standarddarstellung</u> wenn $a_j \neq a_k$ $\forall j \neq k$ und $E_j \cap E_k = \emptyset$ $\forall j \neq k$

Die Standarddarstellung erhält man durch

$f(X) = \{a_1, \dots, a_n\}$ $\quad E_j := f^{-1}(\{a_j\}) \in \mathcal{X}$

Def.: Sei $f \in M^+(X, \mathcal{X})$ einfach. Wir setzen

$$\int f \, d\mu := \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j), \in \overline{\mathbb{R}},$$

wobei $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ die Standarddarstellung ist.

<u>Bem.:</u> Konvention $0 \cdot (+\infty) = 0$, d.h. $\int 0 \, d\mu = 0$

Da $a_j \geq 0$ $\forall j$, treten keine undefinierten Ausdrücke der Form $(+\infty) + (-\infty)$ auf.

<u>Lemma.</u>

(a) $f, g \in M^+$ einfach, $c \geq 0$. Dann gilt:

$$\int \underbrace{cf}_{\in M^+} \, d\mu = c \cdot \int f \, d\mu, \quad \int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

(b) $\nu(E) := \int f \chi_E \, d\mu$, $E \in \mathfrak{X}$

definiert ein Maß $\nu : \mathfrak{X} \to \overline{\mathbb{R}}$.

__Bew.:__ (a) $c = 0$ trivial nach Bem.

Sei $c > 0$. $f = \sum a_j \chi_{E_j}$ die Standarddarstellung

$\Rightarrow cf = \sum_j c a_j \chi_{E_j}$ Stand. darst.

$\Rightarrow \int cf \, d\mu = \sum_j c a_j \mu(E_j) = c \cdot \sum_j a_j \mu(E_j) = c \cdot \int f \, d\mu$

$f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$; $g = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{F_k}$ Stand. darst.

$$\left.\begin{array}{l} \{c_h \mid h = 1, \dots, p\} := \{a_j + b_k \mid 1 \le j \le n,\ 1 \le k \le m\} \\ (h) := \{(j,k) \mid a_j + b_k = c_h\} \\ \underset{\in \mathfrak{X}}{G_h} := \underbrace{\bigsqcup}_{\text{disjunkt}} \{E_j \cap F_k \mid (j,k) \in (h)\} \end{array}\right\} \text{Standdarst. } f+g = \sum_{h=1}^p c_h \chi_{G_h}$$

$$\int (f+g) \, d\mu = \sum_{h=1}^p c_h \mu(G_h) = \sum_{h=1}^p c_h \sum_{(j,k) \in (h)} \mu(E_j \cap F_k)$$

$$= \sum_h \sum_{(j,k) \in (h)} (a_j + b_k) \cdot \mu(E_j \cap F_k)$$

$$= \sum_h \sum_{(j,k) \in (h)} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_h \sum_{(j,k) \in (h)} b_k \mu(E_j \cap F_k)$$

$$= \sum_{j=1}^n a_j \underbrace{\sum_{k=1}^m \mu(E_j \cap F_k)}_{\substack{= \mu(E_j) \\ (\text{denn } X = \bigsqcup F_k)}} + \sum_{k=1}^m b_k \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu(E_j \cap F_k)}_{\mu(F_k)}$$

$$= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

(b) $f = \sum_j a_j \chi_{E_j}$ S.D.

$\Rightarrow f \chi_E = \sum_j a_j \chi_{E_j \cap E}$ S.D.

$\Rightarrow \nu(E) = \int f \chi_E = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j \cap E)$

__Fakt 1:__ $E \longmapsto \mu(E_j \cap E)$ ist ein Maß.

__Fakt 2:__ Eine Linearkombination von Maßen (nichtneg. Koeff.) ist wieder ein Maß.

DAS INTEGRAL VON (NICHTNEG.) MESSBAREN FUNKTIONEN

__Def.:__ Sei $f \in M^+(X, \mathfrak{X})$.

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu \mid \varphi \in M^+ \text{ einfach}, \varphi \le f \right\}$$

Wenn $E \in \mathfrak{X}$, dann sehen wir auch

$$\int_E f \, d\mu := \int \underbrace{f \chi_E}_{\in M^+} d\mu \quad (f \chi_X = f)$$

__Lemma__ (Monotonie) $f, g \in M^+$

(a) $f \le g \Rightarrow \int f \, d\mu \le \int g \, d\mu$

(b) $E, F \in \mathfrak{X}$, $E \subset F \Rightarrow \int_E f \, d\mu \le \int_F f \, d\mu$

__Bew.:__ (a) $\underset{\text{einfach}}{\varphi} \le f \Rightarrow \varphi \le g$

(b) $E \subset F \Rightarrow f \chi_E \le f \chi_F \overset{a)}{\Rightarrow} \underset{\int_E f}{\underset{\parallel}{\int f \chi_E}} \le \underset{\int_F f}{\underset{\parallel}{\int f \chi_F}}$

SATZ VON DER MONOTONEN KONVERGENZ

<u>(Beppo Levi).</u> $(f_j) \subset \mathcal{M}^+$, $f_n \le f_m \; \forall n$, $f_n \to f$

(Wir schreiben auch $f_n \nearrow f$) Dann gilt:

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$
$(f \in \mathcal{M}^+)$

<u>Bew.:</u> $f_n \le f_{n+1} \le f \overset{\text{Monotonielemma}}{\Longrightarrow} \int f_n \le \int f_{n+1} \le \int f$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \le \int f$

Es geht also nur noch um die umgekehrte Ungleichung

$\int f \le \lim \int f_n$. Dazu genügt es zu zeigen, dass

$\int \varphi \le \lim \int f_n \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}^+$ einfach, $\varphi \le f$

Wir zeigen: $\forall \alpha \in (0,1)$: $\alpha \cdot \int \varphi \le \lim \int f_n$

Wir setzen
$$A_n := \{ x \in X \mid \alpha \varphi(x) \le f_n(x) \} \in \mathcal{X}$$

$f_n \le f_{n+1} \Longrightarrow A_n \subset A_{n+1} \quad X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ (da $f_n \nearrow f$)

$$\int_{A_n} \alpha \varphi \le \int_{A_n} f_n \overset{(b)}{\le} \int f_n \quad \forall n$$

$\Rightarrow \alpha \lim \int_{A_n} \varphi \le \lim \int f_n \quad (*)$

$\nu(E) := \int_E \varphi \, d\mu \overset{\text{Lemma (b)}}{\Longrightarrow} \nu$ ist ein Maß auf $\mathcal{X}$

$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset \Rightarrow \nu(\bigcup A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu(A_n)$

$\int \varphi = \nu(X) \qquad = \lim\limits_n \int_{A_n} \varphi$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \alpha \int \varphi \le \lim \int f_n$ ■

<u>Lemma.</u> $f, g \in \mathcal{M}^+$, $c \ge 0 \Longrightarrow$

$$\int c f \, d\mu = c \cdot \int f \, d\mu, \quad \int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

<u>Bew.:</u> $c = 0$ trivial. Sei $c > 0$.

Approx.satz $\Rightarrow \exists \varphi_n \in \mathcal{M}^+$, einfach, $\varphi_n \nearrow f$

$\Longrightarrow c\varphi_n \nearrow cf$. Satz v.d. monotonen Konvergenz $\Longrightarrow$

$$\int cf = \lim \int c\varphi_n \underset{\varphi_n \text{ einfach}}{\overset{!}{=}} c \cdot \lim \int \varphi_n = c \cdot \int f$$

$f + g$ ähnlich

<u>Anwendungen:</u>

<u>Lemma von Fatou</u> $(f_n \subset \mathcal{M}^+) \Rightarrow$

$$\int (\liminf f_n) \, d\mu \le \liminf \int f_n \, d\mu$$

Bew.: $g_m := \inf \{ f_m, f_{m+1}, \ldots \} \in \mathcal{M}^+$

$\Rightarrow \liminf f_n = \lim g_m$

$g_m \le g_{m+1}$. Satz v.d. monotonen Konvergenz $\Rightarrow \lim \int g_m \overset{(**)}{=} \int \liminf f_n$

Für $n \ge m$: $g_m \le f_n \Rightarrow \int g_m \le \int f_n$

$\Longrightarrow \int g_m \le \liminf \int f_n$

$n \to \infty$: $\int \liminf f_n \overset{(**)}{=} \lim \int g_m \le \liminf \int f_n$

<u>Kor 1. (zum S. v.d. mono. Konvergenz)</u> Sei $f \in \mathcal{M}^+$. Für $E \in \mathcal{X}$

$\nu(E) := \int_E f \, d\mu \Rightarrow \nu$ ist ein Maß auf $\mathcal{X}$

<u>Bew.:</u> $\cdot f \geq 0 \Rightarrow \nu(E) = \int_E f \geq 0$

$\cdot E = \emptyset \Rightarrow f\chi_E = 0 \Rightarrow \nu(E) = \int f \chi_E \, d\mu = 0$

$\cdot$ Abzählbare Additivität: $E := \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \mathfrak{X}$.

$f_n := \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} \in M^+$. $f_n \nearrow f\chi_E$

Satz von d. mon. Konv. $\Rightarrow$ $\lim \int f_n = \int f\chi_E = \int_E f = \nu(E)$

$\lim \int f_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int f\chi_{E_k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k)$

<u>Kor. 2 (zum Lemma von Fatou).</u> $f \in M^+$

$f = 0$ μ-fast überall $\Leftrightarrow \int f \, d\mu = 0$

Bew.: $\Leftarrow$) Ang. $\int f = 0$

Zu zeigen: $\mu \underbrace{\{x \mid f(x) > 0\}}_{\displaystyle = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \; E_n := \{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}} = 0$

$* \in \mathfrak{X}$

$0 = \int f \geq \int_{E_n} f \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \mu(E_n) \geq 0$

$\Rightarrow \mu(E_n) = 0 \; \forall n. \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$

$\Rightarrow$) Ang. $f = 0$ μ-f.ü.,

$E := \{x \mid f(x) > 0\}$. $\mu(E) = 0$

$f_n := n\chi_E \Rightarrow f \leq \liminf f_n$.

Lemma v. Fatou $\Rightarrow$

$\int f \leq \int \liminf f_n \leq \liminf \underbrace{\int f_n}_{\displaystyle \int n\chi_E = n \underbrace{\mu(E_n)}_{=0} = 0}$

Bem. Kor. 2 $\Rightarrow \nu$ $(\nu(E) = \int_E f)$ ist "absolut stetig" bzgl. μ,

d.h. wenn $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$

(denn $\mu(E) = 0 \Rightarrow f\chi_E = 0$ μ-f.ü. $\overset{\text{Kor. 2}}{\Rightarrow} \nu(E) = \int f\chi_E = 0$)

Wenn ν und μ σ-endlich sind, dann gilt auch die Umkehrung:

Sind ν, μ Maße auf $\mathfrak{X}$ und ν absolut stetig bzgl. μ, dann

$\exists f \in M^+$: $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$. (Satz von Radon-Nikodým)

$\int_E d\nu = \nu(E) = \int_E f \, d\mu$. "$d\nu = f d\mu$" "$\frac{d\nu}{d\mu} = f$". (nur eindeutig fast überall)

<u>Kor. 3 (Stärkere Version des Satzes von der monotonen Konvergenz)</u>:

$(f_n) \subset M^+$, $f_n \leq f_{n+1} \; \forall n$, $f_n \to f$ μ-fast überall.

Dann gilt: $\lim \int f_n = \int f$

Bew.: $\exists N \in \mathfrak{X}$ (Nullmenge) $: \mu(N) = 0$ und $f_n(x) \to f(x) \; \forall x \in M := X - N$

$f_n\chi_M \nearrow f\chi_M$. Satz v.d. monotonen Konvergenz $\Rightarrow$

$\lim \int_M f_n = \int_M f$

$\lim \int f_n = \lim \left(\int_M f_n + \underbrace{\int_N f_n}_{=0} \right) = \lim \int_M f_n = \int_M f = \int_M f + \underbrace{\int_N f}_{=0} = \int f$

<u>Kor. 4:</u> $(f_n) \in M^+$

$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n \, d\mu \right)$

Beweis: Wende den Satz von der mon. Konvergenz auf die Partialsummen an $g_m = f_1 + \ldots + f_m$

$\Rightarrow g_m \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(L-)INTEGRIERBARE FUNKTIONEN

<u>Def.:</u> Eine messbare, reellwertige Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ heißt (Lebesgue-)<u>integrierbar</u>, wenn:

$$\int f^+ d\mu < +\infty \text{ und } \int f^- d\mu < +\infty \quad (f = f^+ - f^-) \quad f^+, f^- \in M^+$$

$L := L(X, \mathfrak{X}, \mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ integrierbar} \}$

Für $f \in L$, $\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \mathbb{R}$

Für $E \subset \mathfrak{X}$: $\int_E f d\mu := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$.

Eigenschaften:

① $f = f_1 - f_2$, $f_1, f_2 \in M^+ \Rightarrow \int f = \int f_1 - \int f_2$:

$f_1 - f_2 = f = f^+ - f^- \Rightarrow f_1 + f^- = f_2 + f^+$

$\Rightarrow \int f_1 + \int f^- = \int (f_1 + f^-) = \int (f_2 + f^+) = \int f_2 + \int f^+$

Da alle diese Terme endlich sind, folgt:

$\int f_1 - \int f_2 = \int f^+ - \int f^-$

② $E = \coprod_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \mathfrak{X} \Rightarrow \int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f$:

$\nu^+(A) := \int_A f^+ d\mu$, $\nu^-(A) = \int_A f^- d\mu$ $\quad \nu^+, \nu^-$ Maße, also abzählbar additiv $(A \in \mathfrak{X})$

③ Für das Riemann-Int. gilt nicht i. A., dass

$\int_a^\infty f(x)dx < \infty$ impliziert $\int_a^\infty |f(x)| dx < +\infty$

Bsp.: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ stetig auf $\mathbb{R}$ $\quad 0 < a < b$

$\Rightarrow \int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx = -\frac{\cos(x)}{x}\Big|_a^b = \int_a^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx$

(R-Integral)

$\left| \int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \left[-\frac{1}{x} \right]_a^b$

$= \frac{2}{a} \to 0, a \to \infty$

$\underset{\text{Cauchy}}{\Longrightarrow} \int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert $\left(\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} < +\infty \right)$

Aber: $\int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin x$

$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \Big\}$ divergiert, da H.Reihe

$\nexists \int_0^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$, $\exists \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$

Lebesgue-Integral: $f \in L \Rightarrow |f| \in L$ und $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$

Bew.: $f \in L \Rightarrow f^+, f^- \in L \cap M^+ \Rightarrow |f| = f^+ + f^-$

$\left| \int f \right| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \left| \int f^+ + \int f^- \right.$ $\quad |f|^+ = f^+ + f^- \geq 0$

$= \int |f|$ $\quad |f|^- = 0$

$\frac{\sin x}{x} \notin L(\mathbb{R}, \mathfrak{F}^*, \lambda)$ $\quad$ Problem: $\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^+$ u. $\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^-$ nicht endlich

④ f messbar, $g \in L$, $|f| \leq |g| \Rightarrow f \in L$ und $\int |f| \leq \int |g|$

[Bew.: $|f|, |g| \in M^+ \Rightarrow \int |f| \leq \int |g| < +\infty$]

⑤ <u>Linearität:</u> Wenn $f, g \in L^1$ und $c \in \mathbb{R}$, dann sind auch $cf, f+g \in L$

und $\int cf = c \int f$, $\int (f+g) = \int f + \int g$

[Bew. Idee: $c = 0$ ✓ $c > 0$: $(cf)^+ = c \cdot f^+$, etc.

$|f+g| \leq |f| + |g|$, ③+④]

SATZ VON DER DOMINIERTEN KONVERGENZ (LEBESGUE)

$(f_n) \in \mathcal{L}$, $f_n \to f$ μ-fast überall, $f: X \to \mathbb{R}$ messbar. Wenn es ein $g \in \mathcal{L}$ gibt mit $|f_n| \leq g$ $\forall n$, dann $f \in \mathcal{L}$ und

$$\lim \int f_n = \int f$$

<u>Bew.:</u> Durch Umdefinieren von f_n, f auf einer Menge N mit $\mu(N) = 0$ dürfen wir annehmen, dass $f_n \to f$ überall.

$\Rightarrow |f| \leq |g| \overset{⑨}{\Longrightarrow} f \in \mathcal{L}$. $g + f_n \geq 0$ $\forall n$ $\Rightarrow$

wir dürfen das Lemma von Fatou anwenden und erhalten:

$\int g + \int f \overset{⑤}{=} \int (g+f) \leq \liminf \int (g + f_n) = \int g + \liminf \int f_n$

$\int g \in \mathbb{R}$, da $g \in \mathcal{L}$ $\Rightarrow \int f \leq \liminf \int f_n$

$g - f_n \geq 0$ $\forall n$. Lemma von Fatou $\Rightarrow$

$$\int (g - f) \leq \liminf \int (g - f_n) = \int g - \limsup \int f_n$$

$g \in \mathcal{L} \Rightarrow \limsup \int f_n \leq \int f \Rightarrow \lim \int f_n = \int f$

<u>Anwendung:</u> PARAMETERABHÄNGIGE INTEGRALE

$(X, \mathcal{X}, \mu)$ Maßraum. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir betrachten Fkt.en $f: X \times I \to \mathbb{R}$, sodass $(x \mapsto f(x,t))$ messbar ist $\forall t \in I$.

<u>Prop. 1:</u> $t_0 \in I$, wenn

(1) $f(x, t_0) = \lim_{t \to t_0} f(x,t)$ $\forall x \in X$, und

(2) $\exists g \in \mathcal{L}(X, \mathcal{X}, \mu): |f(x,t)| \leq g$ $\forall x, t \in X \times I$

dann gilt: $\displaystyle \int f(x, t_0)\, d\mu(x) = \lim_{t \to t_0} \int f(x,t)\, d\mu(x)$

<u>Bew.:</u> $t_n \in I$, $t_n \to t_0$: $f_n(x) = f(x, t_n)$ $f_n \to f$, $|f_n| \leq g$

Wende den Satz v. d. dom. Konvergenz auf (f_n) an

<u>Kor.:</u> Ist $(t \mapsto f(x,t))$ stetig auf I und gilt $|f(x,t)| \leq g$ für ein $g \in \mathcal{L}$, dann ist

$$F(t) := \int f(x,t)\, d\mu(x).$$

stetig.

<u>Prop. 2:</u> $t_0 \in I$. Wenn

(1) $(x \mapsto f(x, t_0)) \in \mathcal{L}$,

(2) $\partial_t f$ existiert auf $X \times I$, und

(3) $\exists g \in \mathcal{L}: |\partial_t f| \leq g$,

dann ist F auf I diff'bar und

$$F'(t) = \int (\partial_t f)(x,t)\, d\mu(x)$$

<u>Bew.:</u> $t_n \to t$, $t_n \neq t$ $\quad \underbrace{\lim_{n \to \infty} \underbrace{\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}}_{\text{messbar}}}_{\Rightarrow \text{messbar}} = \underbrace{(\partial_t f)(x,t)}_{\Rightarrow \text{messbar}}$

Mittelwertsatz: $\exists s \in I$ zwischen t_0 und t mit

$$f(x,t) - f(x,t_0) = (t - t_0)(\partial_t f)(x,s)$$

$\Rightarrow |f(x,t)| \leq |f(x,t_0)| + |t - t_0| \cdot |(\partial_t f)(x,s)|$

$$\leq \underbrace{|f(x,t_0)|}_{\in \mathcal{L}} + \underbrace{|t - t_0|}_{\text{const in } x} \cdot \underbrace{|g(x)|}_{\in \mathcal{L}}$$

$\Rightarrow (x \mapsto f(x,t)) \in \mathcal{L}$ $\forall t \in I$

Wir setzen $f_n(x) := \dfrac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}$

Satz von dom. Konv. $\Rightarrow$

$$\lim \int f_n \, d\mu(x) = \int \lim f_n \, d\mu(x)$$

$$\lim \frac{1}{t_n - t} \left(\int f(x,t_n) d\mu(x) - \int f(x,t) d\mu(x) \right) = \int (\partial_t f)(x,t) \, d\mu(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = F'(t)$$

<u>Bsp.:</u> Sei $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-int'bare Fkt.

$f(x,t) := h(x) e^{-ixt}$ $\quad (t \in \mathbb{R} = I)$ $\qquad \hat{h}(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x,t) \, d\lambda(x)$

"Fouriertransformierte" von h

$f(x,t)$ stetig in t: $|f(x,t)| \leq |h(x)|$

Kor. $\Rightarrow$ $\hat{h}(t)$ stetig auf $\mathbb{R}$

$\partial_t f = h(x)(-ix) e^{-ixt}$

$|\partial_t f| \leq |x \cdot h(x)|$. Wenn also $x \cdot h \in L$, dann impliziert Prop. 2, dass $\hat{h}$ diff'bar ist und $\hat{h}'(t) = \int (\partial_t f)(x,t) \, d\lambda(x)$

$$= -i \int x h(x) e^{-ixt} \, d\lambda(x)$$

$$= -i \, (x \cdot h)^\wedge$$

PRODUKTMAßE

X, Y Mengen. Kartesisches Produkt:

$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$

Seien $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y})$ messbare Räume

<u>Frage:</u> Ist $X \times Y$ kanonisch wieder ein messbarer Raum?

<u>Def.:</u> Mengen der Form $A \times B$, $A \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{Y}$ nennen wir messbare Rechtecke

$\mathcal{Z}_0 := \{$endliche Vereinigungen von messbaren Rechtecken$\}$

<u>Lemma:</u> $\mathcal{Z}_0$ ist eine Algebra auf $X \times Y = Z$

Bew.: • $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{Z}_0 \Rightarrow E_1 \cup \dots \cup E_n \in \mathcal{Z}_0$

• Komplemente: $(A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2) = ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2)) \cup ((A_1 - A_2) \times B_1)$

<u>Def.:</u> $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} :=$ die von den messbaren Rechtecken erzeugte σ-Algebra.
$\mathcal{Z} :=$

Achtung: nicht das kart. Prod.

$\mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{Z}$

<u>Satz (Produktmaße).</u> Seien $(X, \mathcal{X}, \mu)$, $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ Maßräume.

Dann $\exists$ ein Maß π auf $\mathcal{Z}$, sodass:

$$(*) \quad \pi(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y}$$

<u>Bew.:</u> Sei $A \times B = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j$, $A, A_j \in \mathcal{X}$; $B, B_j \in \mathcal{Y}$

$$x \in X, y \in Y: \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \chi_{A \times B}(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x) \chi_{B_j}(y)$$

$$\chi_A(x) \cdot \nu(B) = \int \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) d\nu(y) = \int \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x) \chi_{B_j}(y) d\nu(y)$$

$$\overset{\text{Satz v. d. mon. Konv.}}{\Longrightarrow} = \sum_{j=1}^{\infty} \int \chi_{A_j}(x) \chi_{B_j}(y) d\nu(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x) \nu(B_j)$$

$$\mu(A) \cdot \nu(B) = \int \chi_A \cdot \nu(B) \, d\mu(x) = \int \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x) \nu(B_j) d\mu(x)$$

$$\overset{\text{Satz v. d. mon. Konv.}}{\Longrightarrow} = \sum \int \chi_{A_j} \nu(B_j) d\mu(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \cdot \nu(B_j)$$

• Konstruktion eines Maßes π_0 auf $\mathcal{Z}_0$: Für $E \in \mathcal{Z}_0$,

$E = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j$ (o.B.d.A. disjunkt)

$$\pi_0(E) := \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\,\nu(B_j)$$

Obiges Argument zeigt, dass π_0 wohldefiniert und abzählbar additiv auf $\mathcal{Z}_0$ ist. Daher ist π_0 ein Maß auf $\mathcal{Z}_0$

· Wir erweitern nun π_0 auf $\mathcal{Z}$.

Sei π_0^* das äußere Maß zu π_0

Erweiterungssatz von Carathéodory $\Rightarrow$

Die Familie $\mathcal{Z}_0^*$ der π_0^*-messbaren Mengen ist eine σ-Algebra, $\mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{Z}_0^*$, und $\pi := \pi_0^*$ ist ein Maß auf $\mathcal{Z}_0^*$.

$\Rightarrow \mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}_0^*$: wir können also π auf $\mathcal{Z}$ einschränken.

$\rightarrow \mathcal{Z}$

<u>Bem.:</u> Unter dem Produktmaß von μ und ν verstehen wir immer das Maß $\pi = \pi_0^*$ wie im Bew. des Satzes.

Sind die Maßräume σ-endlich, dann kann man zeigen, dass π durch (*) eindeutig bestimmt ist.

MONOTONE KLASSEN

Sei X eine Menge.

Schreibweise: $E_n, E \subset X$. $E_n \nearrow E :\Leftrightarrow E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset$

$E_n \searrow E \Leftrightarrow E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$

<u>Def.:</u> $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt <u>monotone Klasse</u>, wenn gilt:

1) $E_n \in \mathcal{M}, n = 1,2,\dots$ $E_n \nearrow E \Rightarrow E \in \mathcal{M}$

2) $E_n \in \mathcal{M}, n = 1,2,\dots$, $E_n \searrow E \Rightarrow E \in \mathcal{M}$

Bsp. ① σ-Algebra sind monotone Klassen

② Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ beliebig. Beliebige Durchschnitte monotoner Klassen sind wieder monotone Klassen.

$\Rightarrow \exists$ kleinste monotone Klasse, die $\mathcal{A}$ enthält:

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \bigcap \{\mathcal{M} \text{ monotone Klasse} \mid \mathcal{A} \subset \mathcal{M}\}$$

die von $\mathcal{A}$ erzeugte monotone Klasse

① $\Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X}(\mathcal{A})$

<u>Lemma (über monotone Klassen)</u>

Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra, dann $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}(\mathcal{A})$

<u>Bew.:</u> Es ist nur mehr die Inklusion $\mathcal{X}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ zu zeigen. Hierzu genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ eine σ-Algebra ist.

Wir beweisen zunächst, dass $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ eine Algebra ist.

· $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$: $\mathcal{M}_E := \left\{ F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \,\middle|\, \begin{matrix} E - F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \\ F - E \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \\ E \cap F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \end{matrix} \right\}$

$\Rightarrow$ (a) $\emptyset, E \in \mathcal{M}_E$: $\mathcal{M}_E \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$

(b) Symmetrie: $F \in \mathcal{M}_E \Leftrightarrow E \in \mathcal{M}_F$

(c) $\mathcal{M}_E$ ist eine monotone Klasse

· $E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{A}$: $\Rightarrow F \in \mathcal{M}_E \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_E$.

da $\mathcal{A}$ eine Alg!

$\overset{c)}{\Rightarrow} \underbrace{\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_E \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_E}$

· $E \in \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow F \in \mathcal{M}_E \overset{b)}{\Rightarrow} E \in \mathcal{M}_F \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_F \overset{c)}{\Rightarrow} \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_F$

$\Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_F \quad \forall F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

- $E, F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}): \Rightarrow E \in \mathcal{M}_F$

$\Rightarrow E-F,\ F-E,\ E \cap F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

d.h. $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ist eine Algebra.

- $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ist eine σ-Algebra: $E_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),\ n=1,2,3\dots$

$E := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_n.\ F_n := E_1 \cup \dots \cup E_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

$F_n \nearrow E \underset{\text{mon. Kl.}}{\overset{\mathcal{M}(\mathcal{A})}{\Longrightarrow}} E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

Wir kehren zurück zu Produktmaßen und wollen Integration gegen Produktmaße studieren.

$(X, \mathfrak{X}, \mu),\ (Y, \mathcal{Y}, \nu),\ \pi$ auf $Z = X \times Y$

<u>Def.:</u> Sei $E \subset Z$ eine TM. $x \in X,\ y \in Y$

- <u>x-Schnitt:</u> $E_x := \{y \in Y \mid (x,y) \in E\} \subset Y$
- <u>y-Schnitt:</u> $E^y := \{x \in X \mid (x,y) \in E\} \subset X$

<u>Def.:</u> $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. $x \in X,\ y \in Y$

<u>x-Schnitt von f:</u> $f_x(y) := f(x,y).\ f_x: Y \to \overline{\mathbb{R}}$.

<u>y-Schnitt von f:</u> $f^y(x) := f(x,y)\ \ f^y: X \to \overline{\mathbb{R}}$

<u>Lemma.</u> (a) Ist $E \subset X \times Y$ messbar, dann sind auch

E_x, E^y messbar $\forall x \in X, y \in Y$

b) Ist $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, dann auch $f_x, f^y\ \forall x \in X, y \in Y$

<u>Bew.:</u> (a) $\mathcal{E} := \{E \in \mathcal{Z} \mid E_x \in \mathcal{Y}\ \forall x \in X\}$

$\Rightarrow \mathcal{E}$ ist eine σ-Algebra: $(E-F)_x = E_x - F_x$,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$$

- Sei $A \times B$ ein messbares Rechteck

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & x \in A \\ \phi, & x \notin A \end{cases}$$

$$A \times B \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{Z} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \mathcal{Z}}$$

(Analog für y-Schnitt)

(b) $x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\{y \mid f_x(y) > \alpha\} = \{y \in Y \mid f(x,y) > \alpha\}$$

$$= \underbrace{\underbrace{\{(x,y) \in Z \mid f(x,y) > \alpha\}}_{\text{vorr. messbar, d.h.} \in \mathcal{Z}}{}_x}_{(a) \Rightarrow \text{messbar}}$$

(Analog: f^y.)

<u>Lemma:</u> Seien $(X, \mathfrak{X}, \mu),\ (Y, \mathcal{Y}, \nu)$ σ-endlich Maßräume. Ist $E \in \mathcal{Z}$, dann sind die Funktionen

$$f(x) = \nu(E_x),\quad g(y) = \mu(E^y)$$

messbar, und

$$\int_X f \, d\mu = \pi(E) = \int_Y g \, d\nu$$

<u>Beweis:</u> - Zuerst nehmen wir an, dass die Maßräume endlich sind $\mathcal{M} := \{E \in \mathcal{Z} \mid f, g \text{ messbar } \& \int_X f = \pi(E) = \int_Y g\}$

$\mathcal{M} \subset \mathcal{Z}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{M}$ und dass

$\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist. Denn dann gilt nach dem

Lemma über mon. Klassen: $\mathcal{Z} = \mathfrak{X}(\mathcal{Z}_0) = \mathcal{M}(\mathcal{Z}_0) \subset \mathcal{M}$

$\Rightarrow \mathcal{Z} = \mathcal{M}$. (fertig)

• $\mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{M}$: ist $E = A \times B$ ein messbares Rechteck

$(A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y})$, dann $f(x) = \chi_A(x)\nu(B)$

$$g(y) = \chi_B \cdot \mu(A)$$

$$\Rightarrow \int_X f\,d\mu = \int \chi_A(x)\nu(B)\,d\mu(x) = \underbrace{\mu(A)\nu(B)}_{=\pi(A\times B)}$$

$$\int_Y g\,d\nu = \int \chi_B(y)\mu(A)\,d\nu(y) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{M}$$

Da jedes Element von $\mathcal{Z}_0$ als endliche, disjunkte Vereinigung von messbaren Rechtecken geschrieben werden kann folgt $\mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{M}$

• $\mathcal{M}$ ist eine mon. Klasse: Gegeben $E_n \in \mathcal{M}, E_n \nearrow E$

$$f_n(x) := \nu((E_n)_x);\ g_n(y) := \mu((E_n)^y).$$

$E_n \in \mathcal{M} \Rightarrow f_n, g_n$ messbar & $\int_X f_n = \pi(E_n) = \int_Y g_n \ \forall n$

$$f(x) = \nu(E_x),\ g(y) := \mu^x(E^y)$$

$\Rightarrow f_n \nearrow f,\ g_n \nearrow g$. Satz v. mon. Konvergenz $\Rightarrow$

$$\int_X f = \lim_n \int_X f_n = \lim \pi(E_n) \underset{\text{da } \pi \text{ ein Maß ist}}{=} \pi(E) = \lim_n \int_Y g_n = \int_Y g$$

$\Rightarrow E \in \mathcal{M}$. Da π ein endliches Maß ist, zeigt ein analoges Argument, dass $\mathcal{M}$ auch abgeschl. ist unter abz. Durchschnitten mon. fallender Folgen

$\Rightarrow \mathcal{M}$ ist eine mon. Klasse

• Für σ-endliche Maßräume. Schreibe $Z = X \times Y$ als $A_n \times B_n \nearrow Z$; $\pi(A_n \times B_n) < \infty$ und wende obige Argumente auf die Folge $(E \cap (A_n \times B_n))$ an.

SATZ VON TONELLI: $(X, \mathcal{X}, \mu)$, $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ σ-endlich $F \in M^+(X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$. Dann sind $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g: Y \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) = \int_Y F_x\,d\nu,\quad g(y) = \int_X F^y\,d\mu$$

messbar und $\int_X f\,d\mu = \int_{X\times Y} F\,d\pi = \int_Y g\,d\nu$

$$\left[\int_X \left(\int_Y (F_x\,d\nu)\right)d\mu = \int_{X\times Y} F\,d\pi = \int_Y \left(\int_X F^y\,d\mu\right)d\nu\right]$$

Bew.: ∘ Für $F = \chi_E$, $E \in \mathcal{Z}$, folgt die Aussage aus dem Lemma

• Für F = messbar, einfach, folgt die Aussage aus Linearität.

• Sei $F \in M^+(Z, \mathcal{Z})$ $\exists (\Phi_n)$, $\Phi_n \geq 0$ messbar und einfach, $\Phi_n \nearrow F$. Setze

$$\varphi_n(x) := \int_Y (\Phi_n)_x\,d\nu,\ \psi_n(y) := \int_X (\Phi_n)^y\,d\mu.$$

$\Rightarrow \varphi_n, \psi_n$ messbar und mon. in n.

Satz v. d. mon. Konv. $\Rightarrow \varphi_n \nearrow f$, $\psi_n \nearrow g$

Satz v. d. mon. Konv. $\Rightarrow \int_X f = \lim \int \varphi_n \underset{\Phi_n \text{ einfach}}{=} \lim \int_Z \Phi_n\,d\pi =$

$$= \lim \int \psi_n = \int_Y g.$$

Satz v. d. mon. Konv. $\Rightarrow \int_Z F\,d\pi = \lim \int_Z \Phi_n\,d\pi$

<u>Bem.</u> Der Satz von Tonelli ist im Allg. falsch für F, die auch negative Werte annehmen.

Auch die σ-Endlichkeit kann nicht gestrichen werden.

Fubini lässt auch neg. Werte zu!

SATZ VON FUBINI. $(X, \mathfrak{X}, \mu)$, $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ σ-endlich

Ist $F: X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ L-integrierbar bzgl. π, dann

sind
$$f(x) := \int_Y F_x \, d\nu \in \overline{\mathbb{R}}, \quad g(y) := \int_X F^y \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$$

fast überall definiert, haben endliche Integrale und

$$\int_X f \, d\mu = \int_Z F \, d\pi = \int_Y g \, d\nu$$

Bew.: $F \in L(Z, \mathcal{Z}, \pi) \Longrightarrow F^+, F^- \in L$

Wende Tonelli auf F^+, F^- an:

$$\int_X f^+ \, d\mu = \int_Z F^+ < +\infty$$

$$\int_X f^- \, d\mu = \int_Z F^- < +\infty$$

$\Longrightarrow$ f^+ und f^- haben endliche Werte μ-fast überall

$\Longrightarrow$ $f^+ - f^-$ wohldefiniert μ-fast überall, und

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ - \int_X f^- = \int_Z F^+ - \int_Z F^- = \int_Z F$$

Analog für g.

<u>Bem.:</u> "Integrierbar" bedeutet nach unserer Def. dass die Werte in $\mathbb{R}$ liegen. Daher können wir nicht schließen, dass obige f, g integrierbar sind, aber sie sind fast überall gleich integrierbare Funktionen $\hat{f}, \hat{g}$.

VOLLSTÄNDIGE MAßRÄUME

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum

<u>Def.:</u> $N \in \mathfrak{X}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt <u>Nullmenge</u>.

Wenn $E \subset N$, dann $\mu(E) = 0$, sofern $E \in \mathfrak{X}$.

$E \in \mathfrak{X}$ gilt aber nicht immer! $\rightsquigarrow$

<u>Def.:</u> $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ heißt <u>vollständig</u>, wenn $\forall N \in \mathfrak{X}$ mit $\mu(N) = 0$ und $\forall E \subset N$ gilt $E \in \mathfrak{X}$.

<u>Bsp.</u> ① $(\mathbb{R}, \mathcal{F}^*, \lambda)$ ist vollständig:

Der Erweiterungssatz von Carathéodory liefert immer ein vollständiges Maß auf $\mathcal{F}^*$:

Wenn $\mu^*(A) = 0$, dann gilt für jedes $E \subset X$:

$$\mu^*(E) \leq \underbrace{\mu^*(E \cap A)}_{=0} + \mu^*(E - A) \leq \mu^*(E).$$

sodass A μ^*-messbar ist.

② Selbst wenn $(X, \mathfrak{X}, \mu)$, $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ vollständig sind, ist das Produkt π selten vollständig: Ang.:

$\exists A \in \mathfrak{X}, A \neq \emptyset, \mu(A) = 0$ und $\mathcal{Y} \neq \mathcal{P}(Y)$

(Dies ist z.B. der Fall für $\mu = \nu = \lambda$ (Lebesgue-Maß)

Sei $E \in \mathcal{P}(Y) - \mathcal{Y}$. Dann ist $A \times E \notin \mathfrak{X} \times \mathcal{Y} = \mathcal{Z}$

(Sonst wäre ja für $x \in A$ $(A \times E)_x = E$ messbar) aber $A \times E \subset A \times Y = N \in \mathfrak{X}$

$$\pi(N) = \pi(A \times Y) = \underbrace{\mu(A)}_{=0} \cdot \nu(Y) = 0$$

<u>Vollständigkeitssatz:</u> Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum

$\mathcal{N} := \{N \in \mathfrak{X} \mid \mu(N) = 0\}$

$\overline{\mathfrak{X}} := \{E \cup F \mid E \in \mathfrak{X} \,\&\, F \subset N$ für ein $N \in \mathcal{N}\}$

Dann ist $\overline{\mathfrak{X}}$ eine σ-Algebra, $\mathfrak{X} \subset \overline{\mathfrak{X}}$,

und $\exists!$ Erweiterung $\overline{\mu}$ von μ zu einem

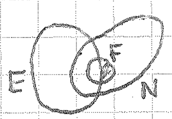
vollständigen Maß auf $\overline{\mathfrak{X}}$

<u>Def.:</u> $(X, \overline{\mathfrak{X}}, \overline{\mu})$ heißt <u>Vervollständigung</u> von $(X, \mathfrak{X}, \mu)$.

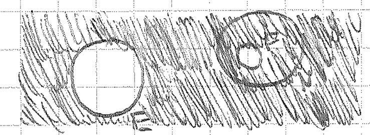
<u>Bew:</u> $\overline{\mathfrak{X}}$ ist eine σ-Algebra:

- $\mathfrak{X}$ und $\mathcal{N}$ sind abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen, daher auch $\overline{\mathfrak{X}}$
- <u>Komplemente:</u> Sei $E \cup F \in \overline{\mathfrak{X}}$, $F \subset N \in \mathcal{N}$

o.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass



$E \cap N = \emptyset$ (sonst ersetzen wir N durch $N - E$ und F durch $F - E$. Dann ist $N - E \in \mathcal{N}$, $F - E \subset N - E$, die Vereinigung ändert sich nicht.)



$$X - (E \cup F) = \underbrace{(X - (E \cup N))}_{\in \mathfrak{X}} \cup \underbrace{(N - F)}_{\subset N \in \mathcal{N}}$$

$\Rightarrow \overline{\mathfrak{X}}$ ist eine σ-Algebra, $\mathfrak{X} \subset \overline{\mathfrak{X}}$ klar

- <u>Konstruktion von $\overline{\mu}$:</u> $\boxed{\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)}$

Dann ist $\overline{\mu}$ auf $\overline{\mathfrak{X}}$ wohldefiniert: $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$,

$E_1, E_2 \in \mathfrak{X}$, $F_1 \subset N_1 \in \mathcal{N}$, $F_2 \subset N_2 \in \mathcal{N}$

$\mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \underbrace{\mu(N_2)}_{=0} = \mu(E_2)$ Symm. $\Rightarrow \mu(E_1) = \mu(E_2)$

Man überprüft dann, dass $\overline{\mu}$ tatsächlich ein Maß auf $\overline{\mathfrak{X}}$ ist, und dass $\overline{\mu}$ das einzige Maß auf $\overline{\mathfrak{X}}$ ist, das μ fortsetzt.

LEBESGUEMAß AUF $\mathbb{R}^n$.

$(\mathbb{R}^1, \mathcal{F}^*, \lambda)$. $\mathcal{L}^1 := F^*$, $\lambda_1 := \lambda$.

λ_1 ist vollständig auf $\mathcal{L}^1$, wir haben aber gesehen dass das Produktmaß $\pi = \lambda_1 \times \lambda_1$ auf $\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1$ nicht vollständig ist.

<u>Def.:</u> $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}^2, \lambda_2) := (\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \overline{\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1}, \overline{\lambda_1 \times \lambda_1})$

Die Mengen in $\mathcal{L}^2$ sind die <u>Lebesgue-messbaren</u> Mengen in $\mathbb{R}^2$. λ_2 ist das (2-dim) <u>Lebesguemaß</u>.

Induktiv erhalten wir $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda_n)$.

Wenn n fix ist, dann schreiben wir auch $\lambda = \lambda_n$

<u>Eigenschaften:</u> Analog zum 1-dim Fall gilt:

1. $\lambda((a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n \times b_n)) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$
2. $\mathcal{L}^n$ enthält alle Borel-Mengen
3. $E \in \mathcal{L}^n$: $\lambda_n(E) = \inf\{\lambda_n(U) \mid E \subset U, U \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n\}$

④ $K \subset \mathbb{R}^n$, K kompakt $\Rightarrow \lambda_n(K) < \infty$.

(d.h. λ_n ist ein sog. "Radonmaß")

⑤ Translationsinvarianz: $E \in \mathcal{L}^n$, $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$x + E \in \mathcal{L}^n$ und $\lambda_n(x+E) = \lambda_n(E)$

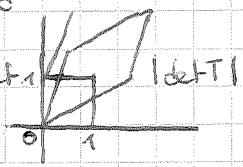
Bem.: Ist $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum für den

②, ④, ⑤ gelten, dann $\exists$ Konstante c, sodass

$\mu(E) = c \cdot \lambda(E)$ $\forall$ Borelmengen E.

⑥ Ist $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und

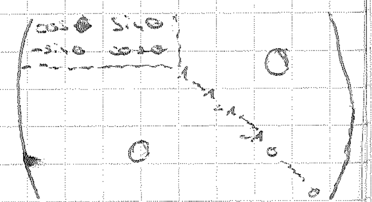
$E \in \mathcal{L}^n$, dann ist auch $T(E) \in \mathcal{L}^n$ und es gilt:



$$\lambda_n(T(E)) = |\det T| \cdot \lambda_n(E)$$

(siehe Transformationsregel aus Ana. 2!)

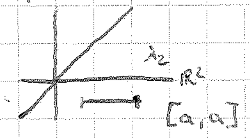
- Ist T orthogonal, dann folgt, dass



$$\lambda_n(T(E)) = \lambda_n(E)$$

- ist T singulär, dann $\lambda_n(T(\mathbb{R}^n)) = 0$

z.B. $\lambda_n(\text{Hyperebene}) = 0$



DIE TRANSFORMATIONSREGEL FÜR LEBESGUE-INTEGRALE.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T: U \to \mathbb{R}^n$ C^1-Abb.

Zunächst für $|\det DT(x)| > 0$ $\forall x \in U$.

Transformationsregel für Diffeomorphismen: Sei $T: U \to \mathbb{R}^n$ und

C^1-Abb., sodass $T: U \to T(U)$ ein Diffeomorphismus ist,

$T(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist f auf $T(U)$ (Leb.-)integrierbar,

dann gilt:
$$\int_{T(U)} f \, d\lambda_n \overset{(*)}{=} \int_U (f \circ T) \cdot |\det DT| \, d\lambda_n$$

Satz (Sard) Sei T eine C^1-Abb $T: U \to \mathbb{R}^n$.

Sei $C := \{x \in U \mid \det(DT(x)) = 0\}$ die Menge der

kritischen Punkte. Dann hat $T(C)$ λ_n-Maß Null.

Bew.: (aus Zeitgründen verschoben)

Bsp.: 1) Ist T ein Diffeom., dann ist $C = \emptyset$ und

folglich ist $T(C) = \emptyset$ eine Nullmenge. ✓

2) Ist T linear und singulär, dann $C = U$, aber

$T(U) \subset$ Hyperebene $\Rightarrow \lambda_n(T(U)) = 0$ ✓

3) Ist T konstant, dann $C = U$, aber $T(U) = \{\text{Pkt.}\}$,

und $\lambda_n(\{\text{Pkt.}\}) = 0$ ✓

In der folgenden stärkeren Version der Transf. regel sind

auch Punkte x mit $\det DT(x) = 0$ erlaubt.

Transformationsregel. $T: U \to \mathbb{R}^n$ C^1, sodass

$T: U \to T(U)$ Bijektion, $T(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist f auf $T(U)$

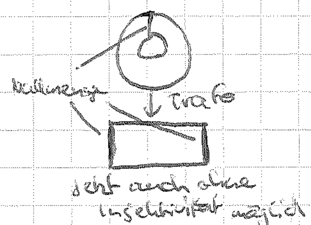
integrierbar, dann gilt (*).

Bew.: $g(x) = f(T(x)) \cdot |\det DT(x)|$, $C := \{x \in U \mid \det DT(x) = 0\}$

$\Rightarrow C$ ist abgeschlossen $\subset \mathbb{R}^n$, folglich Borel.

$$\int_U g\,d\lambda = \int_{U-C} g\,d\lambda + \underbrace{\int_C g\,d\lambda}_{=0,\text{ da } g=0 \text{ auf } C} = \int_{U-C} g\,d\lambda$$

$$\int_{T(U)} f\,d\lambda = \int_{T(U-C)} f + \underbrace{\int_{T(C)} f}_{=0,\text{ nach Satz von Sard.}} = \int_{T(U-C)} f$$



$U' := U - C$ ist offen

$T|_{U'}$ ist Diffeomorphismus. Nach der Transf.regel

für Diffeom.n ist $\int_{T(U')} f = \int_{U'} g$

Bem: Auch die Vorraussetzung der Bijektivität lässt sich weiter abschwächen (z.B. Abbildungsgrad 1.) (siehe Topologie)

L^p - RÄUME

L^p-Räume bilden in der höheren Analysis diejenige Rolle, die $\mathbb{R}$ in der klassischen Analysis spielen.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Sei $f: X \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion. Sei $0 < p < \infty$

Def.: $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$L^p := L^p(X, \mathcal{A}, \mu) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty\}$$

Für $p = 1$ ist $L^p = L$ der Raum der Leb.-integrierbaren Fkt.

Lemma: L^p ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

Bew.: $c \in \mathbb{R}$. $f \in L^p$

$\|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p \Rightarrow \|cf\|_p < \infty$

$g \in L^p$: $|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2\max(|f|, |g|))^p$

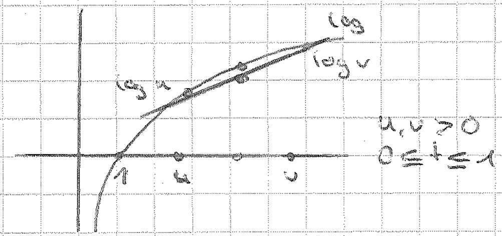
$x \mapsto x^p$ mon. wachsend.

$\leq 2^p \cdot (|f|^p + |g|^p)$

$$\int |f+g|^p\,d\mu \leq 2^p \Big(\underbrace{\int |f|^p\,d\mu}_{<\infty} + \underbrace{\int |g|^p\,d\mu}_{<\infty}\Big) \Rightarrow \|f+g\|_p < \infty$$

Wir wollen zeigen, dass für $\|\cdot\|_p$ die Dreiecksungleichung gilt:

log ist konkav:



$t \log u + (1-t)\log v$

$\leq \log(tu + (1-t)v)$

$u, v > 0$
$0 \leq t \leq 1$

Wende exp an (mon. wachsend):

$e^{t\log u} \cdot e^{(1-t)\log v} \leq tu + (1-t)v$

$u^t \cdot v^{1-t} \leq tu + (1-t)v$

Def.: $p, q > 0$ heißen konjugierte Exponenten, wenn

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow p + q = pq,\ (p-1)(q-1) = 1,$$

$\Downarrow$

$p, q > 1$

$p(q-1) = q$

$q(p-1) = p$

Die einzigen selbstkonjugierten Exponenten sind $p = q = 2$

Seien nun p, q konj. Exponenten. $t = \frac{1}{p}$, $1 - t = \frac{1}{q}$

$\Rightarrow u^{1/p} \cdot v^{1/q} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ $a, b > 0$. $u = a^p$ $v = b^q \Rightarrow$

$$\boxed{a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$$ (Young'sche Ungleichung)

• <u>Höldersche Ungleichung</u>: Seien p, q konj. Exp.

$f \in L^p,\ g \in L^q \Rightarrow fg \in L^1$ und $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

Explizit: $\int |fg|\, d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$

<u>Bew.:</u> • Wenn $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$, dann ist

$\int |f|^p = 0$ od. $\int |g|^q = 0$ und somit $f = 0$ μ-fast

überall oder $g = 0$ μ-fast überall

Schreibweise: $f \begin{Bmatrix} \leq_\mu \\ =_\mu \\ \geq_\mu \end{Bmatrix} g \iff f \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} g$ μ-fast überall

$\Rightarrow f \cdot g =_\mu 0 \Rightarrow \|fg\|_1 = 0$ ✓

• Seien nun $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$. $a := \frac{|f|}{\|f\|_p}$ $b := \frac{|g|}{\|g\|_q}$

Young $\Rightarrow \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \Rightarrow fg \in L^1$

$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |fg| \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int |f|^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \cdot \int |g|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\|fg\|_1 = \int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$

• <u>Minkowskische Ungleichung</u>. $p \geq 1$

$f, g \in L^p \Rightarrow \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q$

<u>Bew.:</u> • $p = 1$: $\|f+g\|_1 = \int |f+g| \leq \int (|f| + |g|)$

$= \int |f| + \int |g|$ ✓

• $p > 1$: Dann $\exists$ konj. Exp. q.

$|f+g|^p = |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$

Integrieren:

$\int |f+g|^p \leq \int |f| \cdot |f+g|^{p-1} + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1}$

$\leq \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{\overbrace{(p-1)q}^{=p}}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{\overbrace{(p-1)q}^{=p}}\right)^{\frac{1}{q}}$

Hölder

$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$

Wenn $\|f+g\|_p = 0$, dann stimmt die M-Ungl.

Sei jetzt $\|f+g\|_p > 0$. Dividieren durch $\|f+g\|_p^{p/q}$

$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ $\quad p - \frac{p}{q} = 1 \Rightarrow$

$\|$

$\|f+g\|_p$

<u>Problem:</u> $\|\cdot\|_p$ ist <u>keine</u> Norm auf L^p, da $\|\cdot\|_p$ nicht

pos. <u>definit</u> ist:

$\|f\|_p = 0 \iff \int |f|^p = 0 \iff |f|^p =_\mu 0 \iff f =_\mu 0$ (*)

<u>Lösung:</u> Nullraum $N(\mu) := \{f : X \to \mathbb{R}$ messbar $| f =_\mu 0\}$

$f \in N(\mu) \Rightarrow \|f\|_p = 0 < \infty \Rightarrow f \in L^p \Rightarrow \underline{N(\mu) \subset L^p}$

$N(\mu)$ ist ein Untervektorraum von L^p:

$f =_\mu 0 \Rightarrow c \cdot f =_\mu 0 \quad (c \in \mathbb{R})$

$f, g =_\mu 0 \Rightarrow f+g =_\mu 0$

<u>Def.:</u> $\mathbb{L}^p(X, \mathcal{X}, \mu) := L^p(X, \mathcal{X}, \mu) / N(\mu)$ Quotienten-VR.

$\mathbb{L}^p :=$

<u>Bem:</u> Die Elemente von $\mathbb{L}^p$ sind keine Funktionen,

sondern Äquivalenzklassen $[f] = \{f + \phi \mid \phi \in N(\mu)\}$; $f \in L^p$

$$= \{ g \in \mathcal{L}^p \mid f =_\mu g \}$$

Insbesondere haben Elemente in $\mathbb{L}^p$ keine punktweisen Werte.

<u>Def.:</u> $\|[f]\|_p := \|f\|_p$ ist wohldefiniert.

$[f] = [g] \Rightarrow f =_\mu g \Rightarrow \int |f|^p \, d\mu = \int |g|^p \, d\mu$

$\Rightarrow \|f\|_p = \|g\|_p$

<u>Vektorraumoperation:</u> $\left.\begin{array}{l} [f] + [g] := [f+g] \\ c \in \mathbb{R} : \; c[f] := [cf] \end{array}\right\}$ wohldef.

<u>Prop.</u> Für $p \geq 1$ ist $(\mathbb{L}^p, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Vektorraum

<u>Bew.:</u> $[f] = 0 \Rightarrow f \in N(\mu) \Rightarrow f =_\mu 0 \Rightarrow \|f\|_p = 0$

Wenn $\|f\|_p = 0 \Rightarrow (*) \; f =_\mu 0$, d.h. $f \in N(\mu)$, $[f] = 0$

$c \in \mathbb{R}$: $\|c[f]\|_p = |c| \, \|[f]\|_p$ ✓

Dreiecksungleichung ist die Minkowski Ungleichung.

<u>In der Praxis/Literatur:</u> Missbrauch von Schreibweise u. Terminologie: Man nennt die Elemente von $\mathbb{L}^p$ wieder "Funktionen" und schreibt f für Äquivalenzklassen.

DER RAUM $\mathbb{L}^\infty$

Sind p, q konjugiert und $q \to 1$, dann $p \to \infty$

Wir definieren Räume $\mathcal{L}^\infty$, $\mathbb{L}^\infty$

Das klassische Supremum ist auf Äqu. klassen modulo $N(\mu)$ <u>nicht</u> wohldefiniert, daher betrachten wir das sog. <u>wesentliche</u> Supremum: $f: X \to \mathbb{R}$ messbar.

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup} |f| := \inf \{ \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \mid |f| \leq_\mu \alpha \}$$

$\|f\|_\infty = \infty$ bedeutet $\nexists$ Nullmenge N mit $f|_{X \setminus N}$ beschränkt.

$\|f\|_\infty < \infty$: $\underbrace{\{ x \in X \mid |f(x)| > \|f\|_\infty \}}_{\text{auch eine Nullmenge} \Leftarrow} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{ x : |f(x)| > \|f\|_\infty + \tfrac{1}{n} \}}_{\text{ist eine Nullmenge nach Def. von } \|f\|_\infty}$

$\Rightarrow |f| \leq_\mu \|f\|_\infty$ (gilt natürlich auch wenn $\|f\|_\infty = \infty$)