Übungsaufgaben 9

1.) Z: $\gamma'(t) \perp \gamma''(t)$

Bew.: γ ist nach der Bogenlänge parametrisiert.

$$\Rightarrow \quad t = L_{[a,t]}(\gamma) = \int_a^t \|\gamma'(t')\| \, dt'$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{d}{dt} \int_a^t \|\gamma'(t')\| \, dt' = \|\gamma'(t)\|$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \|\gamma'(t)\|^2 = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$$

$$\overset{\text{Ableiten}}{\Rightarrow} \quad 0 = \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle$$

$$= 2 \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \quad \text{, d.h. } \gamma''(t) \perp \gamma'(t) \qquad \square$$

2.) Krümmung einer Geraden:

allg. Geradengleichung:

$$\gamma(t) = mt + b \quad \text{mit} \quad m, b \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \quad \gamma'(t) = m$$

$$\Rightarrow \quad \gamma''(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \kappa(t) = \|\gamma''(t)\| = 0$$

Torsion von γ, wobei γ in einer Ebene liegt.

Nach geeigneter Wahl des Koord.systems gilt

$$\gamma_3(t) = 0 \qquad \text{(3. Komponente)}$$

Beachte: Die Def. des begleitenden Dreibeins ist unabhängig von der Wahl des Koord.systems, da das Kreuzprodukt, das euklidische Skalarprodukt und somit auch $\|\cdot\|_2$ unabhängig von dieser Wahl sind.

Nun gilt: $\quad \gamma_3'(t) = 0 \quad , \quad \gamma_3''(t) = 0$

$$\Rightarrow \quad n_3(t) = \kappa(t)^{-1} \gamma_3''(t) = 0 \quad , \quad n_3'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad b_1(t) = \gamma_2'(t) n_3(t) - \gamma_3'(t) n_2(t) = 0$$

$$\text{und} \quad b_2(t) = \gamma_2'(t) n_1(t) - \gamma_1'(t) n_3(t) = 0$$

$$\Longrightarrow \tau(t) = n_1'(t)\underbrace{b_1(t)}_{=0} + n_2'(t)\underbrace{b_2(t)}_{=0} + \underbrace{n_3'(t)}_{=0} b_3(t) = 0 \qquad \square$$

3.) Sei $A(t) := (v(t), n(t), b(t))$. Dann $A'(t) = (v'(t), n'(t), b'(t))$.

Dann ist $A(t)$ orthogonal, da $\{v(t), n(t), b(t)\}$ eine ONB von $\mathbb{R}^3$ für jedes $t \in [a,b]$ ist.

Also $A(t)^t A(t) = \mathbb{1}_3 \quad \forall t \in [a,b]$

$$\overset{\text{Ableiten}}{\Longrightarrow} A'(t)^t A(t) + A(t)^t A'(t) = 0$$

$$\Longrightarrow B(t) := A^t(t) A'(t) = -B^t(t),$$

d.h. $B(t)$ ist schiefsymmetrisch. $B(t) = \begin{pmatrix} 0 & -b_{21}(t) & -b_{31}(t) \\ b_{21}(t) & 0 & -b_{32}(t) \\ b_{31}(t) & b_{32}(t) & 0 \end{pmatrix}$

Es gilt:
- $b_{21}(t) = \langle n(t), v'(t) \rangle \overset{!}{=} \kappa(t) \langle n(t), n(t) \rangle = \kappa(t)$, da $v'(t) = \gamma''(t) = \kappa(t) n(t)$
- $b_{31}(t) = \langle b(t), v'(t) \rangle \overset{!}{=} \kappa(t) \underbrace{\langle \gamma'(t) \times n(t), n(t) \rangle}_{=0} = 0$
- $b_{32}(t) = \langle b(t), n'(t) \rangle = \langle n'(t), b(t) \rangle = \tau(t)$ nach Def.

<u>Somit:</u>

$$(v'(t), n'(t), b'(t)) = (v(t), n(t), b(t)) \cdot B(t)$$

wobei $B(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}$.

4.) $\gamma'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin(t/\sqrt{2}), \cos(t/\sqrt{2}), 1\right)$

$\Longrightarrow \|\gamma'(t)\| = 1$, also ist γ der Bogenlänge nach param.

$\gamma''(t) = \frac{1}{2} \left(-\cos(t/\sqrt{2}), -\sin(t/\sqrt{2}), 0\right)$

$\Longrightarrow \kappa(t) = \|\gamma''(t)\| = 1/2$

$\Longrightarrow n(t) = \kappa(t)^{-1} \gamma''(t) = \left(-\cos(t/\sqrt{2}), -\sin(t/\sqrt{2}), 0\right)$

Also: $b(t) = \gamma'(t) \times n(t) \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin(t/\sqrt{2}), -\cos(t/\sqrt{2}), 1\right)$

$n'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin(t/\sqrt{2}), -\cos(t/\sqrt{2}), 0\right)$

$\Longrightarrow \tau(t) = \langle n'(t), b(t) \rangle = 1/2$