Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Mathematisches Institut

Prof. Dr. Markus Banagl

D–69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54–5763

Telefax: (06221) 54–8312

email:
banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS II
ÜBUNGSAUFGABEN 9

DEADLINE: Fr. 19. 6. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve. Zeigen Sie, dass der Beschleunigungsvektor $\gamma''(t)$ orthogonal zur Kurve ist, d.h. orthogonal auf $\gamma'(t)$ steht. Falls $\gamma''(t) \neq 0$, schreiben wir $n(t) := \gamma''(t)/||\gamma''(t)||$ für den normalisierten Vektor. Wir nennen $n(t)$ den *Normalenvektor* von γ in t.

2. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve. Die Funktion $\kappa : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\kappa(t) := ||\gamma''(t)||$, heißt *Krümmung* von γ. Sie ist ein Maß dafür, wie stark die Kurve von einer Geraden abweicht. Berechnen Sie die Krümmung einer Geraden. Es gelte nun und weiterhin $\gamma''(t) \neq 0$ für alle t. Dann heißt $b(t) := \gamma'(t) \times n(t)$ der *Binormalenvektor* von γ in t. Die Orthonormalbasis $(\gamma'(t), n(t), b(t))$ heißt *begleitendes Dreibein* von γ. Das innere Produkt $\tau(t) := \langle n'(t), b(t)\rangle$ heißt *Torsion* von γ in t. Sie misst, wie stark sich der Normalenvektor aus der zusammen mit dem Geschwindigkeitsvektor aufgespannten Ebene herausdreht. Berechnen Sie die Torsion, wenn γ in einer Ebene liegt.

3. Es gelte wieder $\kappa(t) > 0$ für alle t, wobei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Beweisen Sie (mit $v = \gamma'$):
$$(v'(t), n'(t), b'(t)) = (v(t), n(t), b(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Berechnen Sie Krümmung und Torsion der Schraubenlinie $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t/\sqrt{2}), \sin(t/\sqrt{2}), t/\sqrt{2})$.