Übungsaufgaben 7

1.) z.z.: $SL_n(\mathbb{R})$ ist U'Mnfk. von $M_n(\mathbb{R})$ der Kodim. 1.

<u>Bew.:</u> Betrachte die Abb.

$$F: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto \det(A) - 1 .$$

Mit der Leibniz-Formel lässt sich F als Polynom schreiben, somit folgt $F \in C^1(\mathbb{R}^{n^2})$.

Sei $B \in SL_n(\mathbb{R})$ beliebig. $B = (b_{ij})$

Nach Def. gilt: $F(B) = 0$

Nach dem Laplace-Entwicklungssatz gilt:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \quad \text{für } A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \det}{\partial a_{1j}}(A) = (-1)^{1+j} \det(A_{1j}) \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

Da $\det(B) = 1$, muss einer der Summanden in der Laplace-Entwicklung von $\det(B)$ ungleich 0 sein.

$$(-1)^{1+j} b_{1j} \det(B_{1j}) \neq 0$$
$$\Longrightarrow \det(B_{1j}) \neq 0$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial a_{1j}}(B) = \frac{\partial \det}{\partial a_{1j}}(B) \neq 0$$

Nach dem <u>Satz über imp. Fkt.</u> folgt nun:

$\exists\, T \subset \mathbb{R}^{n^2-1}$ offene Umg. von $\widetilde{B}$, wobei $\widetilde{B} = (b_{kl})_{(k,l) \neq (1,j)}$

$\exists!\, g: T \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar

sodass $F(\widetilde{A}, g(\widetilde{A})) = 0 \quad \forall\, \widetilde{A} \in T$

und $g(\widetilde{B}) = b_{1j}$

Definiere nun

$$\varphi: T \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2} = M_n(\mathbb{R})$$
$$\widetilde{A} \longmapsto (\widetilde{A}, \underbrace{g(\widetilde{A})}_{\text{Komponente } (1,j)})$$

Nun gilt:

① φ ist ein <u>Homöo.</u> auf $\operatorname{im}\varphi$, denn betrachte:

$$\psi: \operatorname{im}\varphi \longrightarrow T \qquad \text{Projektion}$$
$$(a_{kl}) \longmapsto (a_{kl})_{(k,l)\neq(1,j)}$$

Dann:

$$\psi\circ\varphi = id_T \quad , \quad \varphi\circ\psi = \operatorname{im}\varphi$$

ψ stetig und φ stetig, da g stetig.

② $\varphi \in C^1(T, \operatorname{im}\varphi)$, da $g \in C^1(T,\mathbb{R})$.

$$D\varphi(\tilde{A}) = \left(\frac{\mathbb{1}_{n^2-1}}{Dg(\tilde{A})} \right) \in \mathbb{R}^{n^2\times(n^2-1)} \quad \text{für } \tilde{A}\in T$$

eig in der $(1,j)$-Zeile

$\Longrightarrow D\varphi(\tilde{A})$ injektiv $\Longrightarrow$ φ <u>Immersion</u>

③ Wg $F(\tilde{A}, g(\tilde{A})) = 0$ für $\tilde{A}\in T$ folgt

$\det(\tilde{A}, g(\tilde{A})) = 1$, also $\det(\varphi(\tilde{A})) = 1$.

$\Longrightarrow \operatorname{im}\varphi \subset SL_n(\mathbb{R})$

Da $\frac{\partial F}{\partial a_{1j}}(B)$ regulär ist, ist auch $\frac{\partial F}{\partial a_{1j}}$ regulär in einer offenen Umg. von B wg. Stetigkeit. Hieraus kann man mit Hilfe des MWS folgern, dass es eine möglicherweise kleinere offene Umg. $\mathcal{U}$ von B in $M_n(\mathbb{R})$ gibt, sodass

$\forall A\in\mathcal{U}: \quad F(A) = 0 \Longrightarrow A = (\tilde{A}, g(\tilde{A}))$ für ein $\tilde{A}\in T$.

Setze $T' := \varphi^{-1}(\mathcal{U}\cap SL_n(\mathbb{R}))$ und $\varphi' = \varphi|_{T'}$

<u>Dann:</u>

$$\underbrace{\varphi'}_{\text{Homöo. + Immersion}} : T' \longrightarrow \operatorname{im}\varphi' = \underbrace{\mathcal{U}\cap SL_n(\mathbb{R})}_{\text{offene Umg. von } B}$$

Da $B\in SL_n(\mathbb{R})$ beliebig war, ist $SL_n(\mathbb{R})$ U'Mfk von $M_n(\mathbb{R})$ der Kodim. 1.

□

<u>Alternativ:</u> Richtungsableitung von det in Richtung X am Pkt $X\in SL_n(\mathbb{R})$:

$$\partial_X \det(X) = \lim_{h\to 0} \frac{\det(X+hX)-\det(X)}{h} = \det(X) \underbrace{\lim \frac{(1+h)^n-1}{h}}_{=n}$$
$$= n\cdot\det(X) = n$$

2.) a) z: $f(M)$ ist k-dim. U'Mnfk. von $\mathbb{R}^n$.

Bew.: Sei $q \in f(M)$ beliebig.

$\underset{f \text{ bijektiv}}{\overset{f(M) \subset V}{\Longrightarrow}} \exists!\ p \in M : f(p) = q$

$\overset{M \text{ Mnfk.}}{\Longrightarrow} \exists\ W \subset \mathcal{U}$ offene Umg. von p, $T \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^k$

$\exists\ \varphi : T \longrightarrow M \cap W$ Homöo. + Immersion

Definiere: $\varphi' := f \circ \varphi : T \longrightarrow f(M \cap W) = f(M) \cap f(W)$

① φ' ist Homöo. als Verknüpfung zweier Homöo.

② $D\varphi' = Df \cdot D\varphi$ $\quad (f, \varphi \in C^1)$

$D\varphi$: injektiv, da φ Immersion

Df: bijektiv, da f Diffeo.

denn: $id_{\mathcal{U}} = f^{-1} \circ f$

$\Longrightarrow \mathbb{1}_n = D(f^{-1}) \cdot Df$

$\Longrightarrow (Df)^{-1} = D(f^{-1})$

Also ist φ' Immersion.

③ $f(W)$ ist offene Umg. von $f(p) = q$ in V, da f Homöo. ist.

$\square$

b) z: $Df(p)(T_pM) = T_{f(p)} f(M)$, $p \in M$

Bew.: Sei φ wie in Aufgabe 2a.

Dann gilt:

$$T_pM = \operatorname{im} D\varphi(x) \quad , x = \varphi^{-1}(p)$$

Wie in 2a gesehen, beschreibt $f \circ \varphi$ die U'Mnfk. $f(M)$ lokal um $f(p)$, also

$$T_{f(p)} f(M) = \operatorname{im} D(f \circ \varphi)(x) \quad , \quad x = (f \circ \varphi)^{-1}(f(p))$$

Nun gilt nach der Kettenregel:

$$D(f \circ \varphi)(x) = Df(\varphi(x)) \cdot D\varphi(x)$$
$$= Df(p) \cdot D\varphi(x)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{im} D(f \circ \varphi)(x) = Df(p)(\operatorname{im} D\varphi(x))$$

$\square$

3.) $g_1(x_1,y_1,x_2,y_2) := x_1^2 + 2y_1^2 - 6$

$g_2(x_1,y_1,x_2,y_2) := x_2 + y_2 - 5$

Es gilt: $D\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}(x_1,y_1,x_2,y_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat Rang 2

für $g_1(x_1,y_1,x_2,y_2) = 0 = g(x_1,y_1,x_2,y_2)$,

da $(x_1,y_1) = 0 \Rightarrow g_1(x_1,y_1,x_2,y_2) = -6 \neq 0$.

Somit ist $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid g_1(x) = 0 = g_2(x)\}$

eine U'Mnfk von $\mathbb{R}^4$ der Dim. 2.

Wir minimieren das Abstandsquadrat statt des Abstands.

$f(x_1,y_1,x_2,y_2) = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$

unter den Nebenbed. $g_1 = 0$, $g_2 = 0$.

Notw. Bed.:

$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, ein $\mu \in \mathbb{R}$.

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x_1-x_2) \\ 2(y_1-y_2) \\ -2(x_1-x_2) \\ -2(y_1-y_2) \end{pmatrix}$, $\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ (1) $2(x_1-x_2) = 2\lambda x_1$

(2) $2(y_1-y_2) = 4\lambda y_1$

$$\left.\begin{array}{l} (3)\ -2(x_1-x_2) = \mu \\ (4)\ -2(y_1-y_2) = \mu \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 - x_2 = y_1 - y_2 \quad (5)$$

$(2) \wedge (5) \Rightarrow 2(x_1-x_2) = 4\lambda y_1$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \lambda(x_1 - 2y_1) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0 \vee x_1 = 2y_1$

Fall 1: $\lambda = 0$: $\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$, d.h. $\exists$ Schnittpkt

$\overset{\text{Nebenbed.}}{\Longrightarrow} x_1^2 + 2y_1^2 = 6 \wedge x_1 + y_1 = 5$

$\Rightarrow (5-y_1)^2 + 2y_1^2 = 6$

$\Rightarrow 3y_1^2 - 10y_1 + 19 = 0$

$\Rightarrow y_1 = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 19}_{<0}}$ keine reelle Lsg

Fall 2: $x_1 = 2y_1$ (6)

$$\overset{g_1=0}{\Longrightarrow} \quad (2y_1)^2 + 2y_1^2 = 6$$
$$\Longrightarrow \quad y_1^2 = 1$$
$$\Longrightarrow \quad y_1 = 1 \quad \vee \quad y_1 = -1$$

Fall A: $y_1 = 1$:

$$\overset{(6)}{\Longrightarrow} \quad (x_1, y_1) = (2,1)$$
$$\overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad x_2 - y_2 = x_1 - y_1 = 1$$
$$\overset{g_2=0}{\Longrightarrow} \quad 2x_2 = 6 \quad \wedge \quad 2y_2 = 4$$
$$\Longrightarrow \quad (x_2, y_2) = (3,2)$$

Wir überprüfen, ob $(2,1,3,2)$ wirklich die notw. Bed. erfüllt. Also ist $(2,1,3,2)$ ein kritischer Pkt.

Fall B: $y_1 = -1$

Hier folgt analog, dass $(-2,-1,2,3)$ krit. Pkt. ist.

Es gilt: $f(2,1,3,2) = 2$

$f(-2,-1,2,3) = 32$

Existenz des Minimums:

Wir wissen, dass der minimale Abstand, falls existent, kleiner-gleich $\sqrt{2}$ ist. Also betrachte für

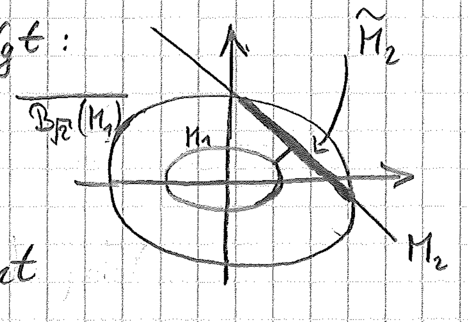
$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 6\} \quad \text{Ellipse}$$
$$\overline{B_{\sqrt{2}}(M_1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x',y') \in M_1 : (x-x')^2 + (y-y')^2 \leq 2\}$$

Da M_1 beschränkt und abgeschlossen, also kompakt ist, ist auch $\overline{B_{\sqrt{2}}(M_1)}$ kompakt.

$$M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 5\} \quad \text{Gerade}$$

Da $M_2 \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist, folgt:

$\tilde{M}_2 = \overline{B_{\sqrt{2}}(M_1)} \cap M_2$ kompakt



Dann ist auch

$\tilde{M} := M_1 \times \tilde{M}_2 \subset M$ kompakt

Auf $\tilde{M}$ nimmt f sein Minimum an.

$\Longrightarrow$ $\sqrt{2}$ ist der minimale Abstand.

$f(x,y,z) := x^2 - xy + y^2 - z^2$

4.) • krit. Pkte im Inneren des Ellipsoids

$$\nabla f = (2x-y, -x+2y, -2z) = 0$$

$$\iff \quad (x,y,z) = (0,0,0)$$

Es gilt: $\quad f(0,0,0) = 0$

• krit. Pkte auf dem Rand des Ellipsoids

Nebenbed.: $\quad g(x,y,z) := 3x^2 + 3y^2 + z^2 - 4 = 0$

$$\nabla g = (6x, 6y, 2z) = 0 \iff (x,y,z) = 0$$

Wg. $g(0,0,0) = -4 \neq 0$ ist $\nabla g \neq 0 \;\; \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $g(x,y,z) = 0$.

Also ist die Methode der Lagrange-Multiplikatoren anwendbar.

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2x - y &= 6\lambda x \\ -x + 2y &= 6\lambda y \\ -2z &= 2\lambda z \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x+y &= 6\lambda(x+y) \\ 3(x-y) &= 6\lambda(x-y) \\ z(\lambda+1) &= 0 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \lambda = 1/6 & \vee & x = -y \\ \lambda = 1/2 & \vee & x = y \\ \lambda = -1 & \vee & z = 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{g=0}{\Longrightarrow} \quad (\lambda = 1/6 \wedge x = y \wedge z = 0) \vee (\lambda = 1/2 \wedge x = -y \wedge z = 0)$$
$$\vee\, (\lambda = -1 \wedge x = -y \wedge x = y)$$

Fall 1: $\lambda = 1/6$: $\overset{g=0}{\Longrightarrow} \; (x,y,z) = \left(\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 0\right), \; f = 2$

Fall 2: $\lambda = 1/2$: $\overset{g=0}{\Longrightarrow} \; (x,y,z) = \left(\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \mp\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 0\right), \; f = 2/3$

Fall 3: $\lambda = -1$: $\overset{g=0}{\Longrightarrow} \; (x,y,z) = (0, 0, \pm 2), \; f = -4$

Da der volle Ellipsoid beschränkt und abgeschlossen, also kompakt ist, nimmt die stetige Fkt f Max. und Min. auf dem vollen Ellipsoid an.

Wir haben 4 mögliche Extremwerte: $\quad -4 < 0 < 2/3 < 2$

Also liegen die globalen Maxima bei $\left(\pm\sqrt{2/3}, \pm\sqrt{2/3}, 0\right)$ und die globalen Minima bei $(0, 0, \pm 2)$.