



Ruprecht-Karls-Universität  
Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:

banagl@mathi.uni-heidelberg.de

## ANALYSIS II ÜBUNGSAUFGABEN 7

**DEADLINE:** Fr. 5. 6. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. Wir identifizieren die Menge  $M_n(\mathbb{R})$  aller reellen  $n \times n$ -Matrizen  $(x_{ij})$  mit dem euklidischen Raum  $\mathbb{R}^{n^2}$  mit Koordinaten  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}$ . Zeigen Sie, dass die spezielle lineare Gruppe

$$SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von  $M_n(\mathbb{R})$  der Kodimension 1 ist.

2. Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $f : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus und  $M \subset U$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Beweisen Sie:

(a)  $f(M)$  ist eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

(b) Sei  $p \in M$  ein beliebiger Punkt. Dann ist das Bild des Tangentialraums  $T_p M$  unter dem Differential  $(Df)(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gerade der Tangentialraum  $T_{f(p)} f(M)$ .

3. Benutzen Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren, um den kürzesten Abstand zwischen der Ellipse  $x^2 + 2y^2 = 6$  und der Geraden  $x + y = 5$  zu ermitteln. Warum definieren die Nebenbedingungen eine Untermannigfaltigkeit?

4. Finden Sie Minimum und Maximum von  $x^2 - xy + y^2 - z^2$  auf dem vollen Ellipsoid  $\{(x, y, z) \mid 3x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 4\}$ .

*Hinweis:* Gehen Sie in zwei Schritten vor. Bestimmen Sie zunächst lokale Extrema auf der offenen Menge  $\{(x, y, z) \mid 3x^2 + 3y^2 + z^2 < 4\}$ . Benutzen Sie dann die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren, um die lokalen Extrema unter der Nebenbedingung  $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 4$  zu bestimmen.